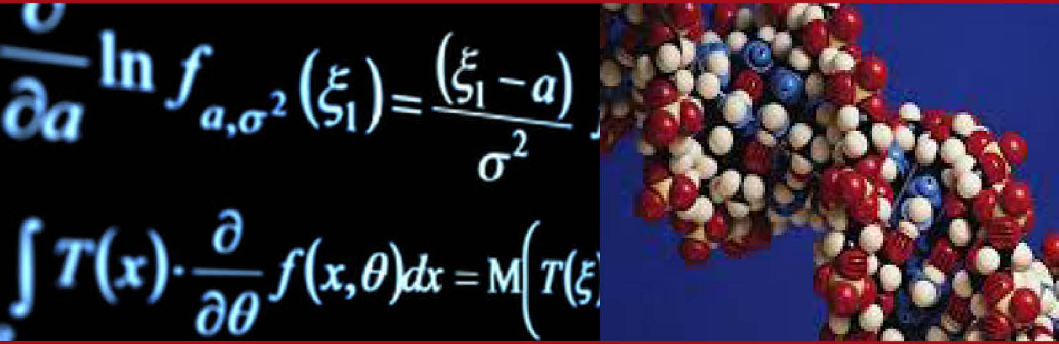
Marco Bernardoni
Sergio Rondinara edd.



# Teoria, modello

SEFIR
Città Nuova

# Teorie, modelli, astrazione e simulazione

ALBERTO PETTOROSSI [ * ]

I termini di *teoria* e *modello* sono usati nella logica matematica e hanno un significato ben preciso. Cercheremo di chiarire questo significato, almeno in modo informale, sia in relazione all'uso che di essi si fa nella rappresentazione della conoscenza sia in relazione agli effetti che essi hanno sulla dinamica delle macchine e sul comportamento delle persone che di tale conoscenza fanno uso.

Le macchine e le persone determinano, o almeno dovrebbero determinare, le loro azioni dopo averne vagliato le possibili conseguenze nell'ambito di teorie e modelli della realtà. Queste teorie e modelli risiedono, per così dire, nell'interno delle macchine e delle persone e sono costruiti e sviluppati, consciamente o inconsciamente, allo scopo di guidarle verso il raggiungimento di obiettivi prefissati. In effetti, nel caso delle macchine è un meccanismo deterministico quello che realizza la scelta delle azioni e non interviene la libertà, mentre nel caso delle persone entra spesso in gioco anche la libertà e questa permette scelte che non sono sempre conseguenze logiche di teorie formali e che possono dipendere da *scale di valori* esterne a tali teorie (aspetto che andrebbe ulteriormente approfondito ma i limiti di questo intervento non ce lo permettono.)

Le teorie e i modelli, e anche le scale di valori, poi, evolvono nel tempo e possono essere sviluppati, per così dire, "per aggiustamenti successivi", tenendo conto del fatto che i risultati ottenuti in situazioni precedenti siano stati o non siano stati quelli attesi. Questa evoluzione per successivi aggiustamenti si può realizzare non solo nelle persone, ma anche nelle macchine, qualora esse siano dotate di meccanismi adattativi.

Concluderemo il nostro contributo analizzando anche il rapporto esistente tra la costruzione di teorie e modelli da una parte e le metodologie scientifiche basate sull'*astrazione* e sulla *simulazione* dall'altra.

## 1. LA LOGICA MATEMATICA E LE TEORIE LOGICHE

Cominciamo allora col presentare i concetti di teoria e modello nell'ambito della rappresentazione della conoscenza, in generale, e della logica matematica, in particolare.

La logica matematica è basata su un *linguaggio formale* in cui si possono costruire *frasi ben formate* a partire da proposizioni elementari utilizzando i cosiddetti connettivi logici. Consideriamo, ad esempio, le seguenti proposizioni elementari: «piove», «mi bagno», «Roma è la capitale dell'Italia», «Roma è una parola di quattro lettere», «i pinguini volano», «Socrate è un uomo». I connettivi logici permettono di collegare proposizioni elementari tra loro e costruire frasi più complesse. Ad esempio, con il connettivo «se…

allora…» (anche indicato «… implica …») possiamo costruire le seguenti frasi: «se piove allora mi bagno»; «se x è un uomo allora x è mortale». Con il connettivo «e» possiamo costruire le frasi «piove e mi bagno», «x è un uomo e x è Socrate». Con il connettivo «non» possiamo costruire le frasi «non piove» e «Roma non è la capitale dell'Italia».

Ora in logica matematica una teoria è semplicemente un insieme (finito o infinito) di frasi, dette *teoremi*, che si scelgono a partire tra tutte le possibili frasi ben formate che si possono costruire. Queste frasi sono scelte in modo arbitrario (sicché in generale si possono costruire infinite teorie differenti, e anche in contraddizione tra loro), ma certamente si desidera che questa scelta sia fatta in base ad alcuni criteri di veridicità. Esaminiamo qualcuno di questi criteri.

Il primo criterio è quello della *consistenza*. Questo criterio impedisce che in una data teoria siano presenti sia una frase che la negazione della stessa frase. Ad esempio, non è consistente alcuna teoria che includa le due frasi: «Roma è la capitale dell'Italia» e «Roma non è la capitale dell'Italia». Poi, normalmente e in particolare nel calcolo proposizionale, si desidera che le teorie soddisfino certe leggi, le cosiddette "leggi del pensiero" (le chiamiamo così, ma anche esse sono in un certo senso arbitrarie) e certe "regole di chiusura", indipendenti dalle particolari frasi considerate. Ad esempio, c'è una regola di chiusura che impone che se la frase "A" e la frase "A implica B" sono in una teoria, allora anche la frase "B" deve essere nella teoria. In tal caso si dice che la conclusione "B" è ottenuta per applicazione della regola del *modus ponens*. Queste leggi e regole sono state oggetto di analisi fin dall'antichità e sono state studiate anche in tempi recenti da vari studiosi. Ne ricordiamo solo due: George Boole (1815-1864), che ha sviluppato l'algebra della logica proposizionale e Gottlob Frege (1848-1925), che ha sviluppato la logica predicativa, detta anche calcolo dei predicati. Un'altra "legge del pensiero" molto nota è la cosiddetta "legge di de Morgan", secondo la quale se in una teoria c'è la frase "non (A o B)", allora nella stessa teoria ci deve essere la frase equivalente "(non A) e (non B)".

Affrontiamo ora il problema della *presentazione* "in modo finito" delle teorie logiche. Questo problema si pone in quanto ci sono teorie che sono costituite da un numero infinito di frasi e di queste, ovviamente, non se ne può fare un elenco esaustivo. Tale elenco richiederebbe troppo tempo e troppo spazio! Un esempio di una teoria con infinite frasi è la geometria euclidea la quale costituisce una possibile formalizzazione dello spazio tridimensionale in cui viviamo.

Per presentare in modo finito una teoria che ha un numero infinito di frasi si usano delle regole di chiusura, dette anche regole di deduzione, che permettono, a partire da un numero finito di frasi, detti *assiomi* (nel caso della geometria essi sono gli assiomi di Euclide), di derivare ogni altro teorema della teoria in un numero finito di passi. Ovviamente, per derivare tutti gli infiniti teoremi della teoria occorre un tempo infinito.

Quanto alle regole di deduzione, nella logica proposizionale si considerano il *modus ponens* e la *sostituzione*, mentre nella logica predicativa si considera anche la regola di *generalizzazione*. Del *modus ponens* abbiamo già detto. La regola di sostituzione è la regola che permette di derivare frasi specifiche a partire da frasi generiche. Ad esempio, la frase «piove o non piove» si deriva per sostituzione a partire dalla frase "A o non A", dove "A" è un simbolo che denota una frase generica. Infine la regola di generalizzazione permette di derivare frasi che riguardano un'infinità di oggetti elementari a partire da una frase che riguarda un oggetto generico. Ad esempio tale regola permette di dedurre la frase "per ogni x, A(x)" a partire dalla frase "A(x)" che appunto enuncia che la proprietà A vale per l'oggetto generico x. L'uso della regola di generalizzazione può essere molto utile qualora si voglia enunciare una proprietà che vale per un insieme infinito di oggetti. Ad esempio, quando nella geometria euclidea si deduce il teorema di Pitagora che enuncia una proprietà che vale per tutti i triangoli rettangoli, si può usare la regola di generalizzazione.

In quanto detto sopra abbiamo sottolineato l'arbitrarietà della scelta degli assiomi e delle regole di deduzione.

Ciò non è stato fatto a caso, perché in definitiva una teoria logica è in larga misura un insieme arbitrario di teoremi. Possiamo anche dire che una teoria logica è un "gioco arbitrario" basato su un insieme di frasi e nulla garantisce che il gioco sia interessante in sé oppure sia un gioco utile in pratica.

In effetti nella logica proposizionale, che è la logica che viene usata nella legislazione dello Stato, ci sono teoremi che sembrano accettabili, come ad esempio, "(A e B) implica A", ma ci sono altri teoremi che sembrano non accettabili o non utili in pratica, come, ad esempio, "(A implica (non A)) oppure ((non A) implica A)".

# 2. I MODELLI DELLE TEORIE LOGICHE

È compito dei logici sviluppare nuovi calcoli logici allo scopo di costruire teorie che abbiamo buone caratteristiche intrinseche (che, cioè, non abbiamo tra i loro teoremi alcune frasi che sembrano non accettabili o non soddisfacenti) e che siano utili in contesti applicativi di interesse. Ad esempio, la criticità sopra esposta e varie altre criticità si possono evitare se si usa la cosiddetta logica intuizionistica invece della logica proposizionale. Poi, per dare una qualche solidità ai vari calcoli logici proposti, gli studiosi di logica matematica hanno sviluppato i *modelli* delle teorie e, cioè, hanno costruito strutture matematiche in cui valgono tutti i teoremi delle teorie, fornendo così una caratterizzazione delle teorie attraverso costruzioni matematiche indipendenti dalle regole di deduzione considerate.

Ad esempio, un modello di una frase F della logica proposizionale si costruisce dando un'assegnazione di 0 o 1 alle proposizioni elementari che occorrono in F tale per cui si ottiene per F il valore 1, usando le seguenti regole di calcolo:

[R1] (non A) = 1 se A = 0 (altrimenti (non A) = 0),

[R2] (A e B) = 1 se A = B = 1 (altrimenti (A e B) = 0),

[R3] (A o B) = 1 se A = 1 oppure B = 1 oppure A = B = 1 (altrimenti (A o B) = 0),

[R4] (A implica B) = 0 se A = 1 e B = 0 (altrimenti (A implica B) = 1).

Quando la frase F assume il valore 1 allora si dice anche che F è vera per quella data assegnazione. Se, al variare comunque della assegnazione dei valori 0 e 1 dati alle proposizioni elementari, la frase F in esame assume sempre il valore 1, diciamo che la frase è una *tautologia*.

Accade che una frase della logica proposizionale è un teorema se e solo se essa è una tautologia. Cioè, come si dice tecnicamente, la logica proposizionale è *completa* o gode della proprietà di completezza. In questo senso il ruolo dei modelli di una teoria è quello di garantire alla teoria, attraverso delle costruzioni matematiche del tutto indipendenti dagli assiomi e dalle regole di deduzione, una certa significatività o veridicità, definita appunto come equivalenza dell'algoritmo che deduce i teoremi con quello che verifica le tautologie.

La veridicità delle teorie e la loro significatività nello studio di determinate situazioni concrete è di fondamentale importanza quando queste teorie si usano per il ragionamento automatico o lo sviluppo di macchine "intelligenti" o la costruzione di sistemi informatici di supporto alle decisioni. E ciò è particolarmente importante quando tali macchine o sistemi informatici siano *safety critical*, cioè quando da essi dipendono la sicurezza o la vita delle persone.

Un primo livello minimale di veridicità dei sistemi informatici e delle teorie su cui essi si basano, consiste nel dimostrare che alcuni loro modelli di interesse godono di certe prefissate proprietà. In questo campo si usano varie tecniche, tra cui quelle cosiddette di *Software Model Checking*, che permettono appunto di dimostrare la correttezza del software allo stesso modo in cui si dimostrano i teoremi nell'ambito di teorie logiche. Tutte le metodologie sviluppate nel corso degli ultimi decenni per la dimostrazione automatica dei teoremi trovano in questo ambito una nuova e interessante applicazione e si va così riscoprendo l'importanza della deduzione automatica e dell'Intelligenza Artificiale nella dimostrazione di correttezza di sistemi software (ma anche dei sistemi hardware), specie quando la struttura di questi sistemi è particolarmente complessa. Ovviamente, questo è di grande importanza perché la capacità di memorizzazione e manipolazione dell'informazione da parte delle macchine è molto maggiore e molto più affidabile di quella che è possibile all'uomo. In questo contesto si può applicare la metodologia dell'*astrazione*, di cui parleremo più sotto, che è un metodo per dimostrare che un dato sistema soddisfa (o non soddisfa) certe proprietà desiderate.

Un altro livello di veridicità di una teoria è quello che riguarda l'*adeguatezza* della teoria alle situazioni concrete in cui la si voglia utilizzare. Ad esempio, un teorema della logica proposizionale asserisce l'equivalenza della frase "(A e B) implica C" con la frase "(A implica C) o (B implica C)". Ma questa equivalenza non si può utilizzare in tutti i contesti in quanto potrebbe risultare inadeguata. Infatti, non è vero che se bastano la barca (A) e i remi (B) per attraversare un fiume (C) (cioè (A e B) implica C), allora si può attraversare quel fiume o con la sola barca (A implica C) o con i soli remi (B implica C). Possiamo garantirci del fatto che le nostre deduzioni sono adeguate alla situazione concreta in esame attraverso la *simulazione*. Anche di questa metodologia parleremo più sotto.

Cominciamo con l'illustrare brevemente attraverso degli esempi la metodologia dell'astrazione e poi vedremo quella della simulazione.

# 3. L'ASTRAZIONE NELLA COSTRUZIONE DI TEORIE

L'*astrazione* consiste nel definire un linguaggio e una teoria logica con cui si vuole descrivere una realtà di interesse, in modo tale che essi risultino in qualche modo un'*approssimazione* della realtà da cui si astrae nel senso che ora indichiamo. Nell'astrazione ci si deve garantire che le proprietà di interesse della realtà da descrivere e che possiamo conoscere attraverso esperimenti (fisici o mentali) e misure (strumentali o no), siano rispecchiate dalle proprietà della teoria logica risultato dell'astrazione stessa. In particolare, le deduzioni nella teoria logica astratta debbono concordare con il comportamento della realtà concreta in esame. Diamo due esempi per chiarire le idee.

Prendiamo il primo esempio di astrazione dal mondo della fisica. La teoria della gravitazione universale di Isaac Newton (1642-1727) è un'astrazione della realtà della meccanica celeste e consente di predire il movimento dei corpi celesti, nei limiti delle osservazioni sperimentali, con sufficiente precisione. Una descrizione più precisa del moto dei pianeti intorno al sole (ad esempio, la descrizione del moto di precessione del perielio dell'orbita di Mercurio) richiederebbe l'uso della teoria della relatività generale, ma appunto l'astrazione suggerita da Newton permette di predire, seppure in modo approssimato, il movimento di Mercurio. Il guadagno che si ha nell'utilizzo di tale approssimazione, o astrazione, consiste nel fatto che i calcoli che la predizione di tale movimento richiede, sono molto meno dispendiosi, in termini di spazio e di tempo, di quelli che l'uso della teoria della relatività generale richiederebbe.

Il secondo esempio di astrazione lo prendiamo dal mondo dell'aritmetica. Alle scuole elementari abbiamo imparato "la prova del 9". Secondo tale regola possiamo concludere che la somma dei numeri $m$ e $n$ non è il numero $p$ se la somma delle cifre di $m$ e di $n$ non è uguale, modulo 9, alla somma delle cifre del numero $p$. Ovviamente, la prova del 9 non assicura che la somma sia corretta, ma è sufficiente a dimostrare che la somma non è corretta.

Si vede, pertanto, che il processo di astrazione può essere di grande utilità in pratica, perché consente di accorgerci di eventuali errori della teoria che sia stata sviluppata con l'obiettivo di descrivere una data realtà esterna, sia essa una realtà fisica che una realtà matematica, come negli esempi sopra indicati.

Ovviamente molti altri esempi di astrazione potrebbero essere considerati nell'ambito di altre scienze empiriche o deduttive e da tutti questi esempi risulterebbe l'importanza che il processo di astrazione riveste nella costruzione di teorie formali con buone caratteristiche computazionali, cioè di teorie in cui le deduzioni sono interessanti perché possono essere fatte con limitate risorse di spazio o di tempo di calcolo.

Teorie siffatte sono di grande importanza nello sviluppo della cosiddetta *fisica computazionale*, in cui gli esperimenti si fanno sulla base di modelli computazionali approssimati che coinvolgono la manipolazione di grandi quantità di dati e anche l'uso di regole di inferenza di tipo statistico. Attraverso la fisica computazionale si possono studiare sistemi spesso con dinamiche caotiche e non lineari, con un grande numero di quantità osservabili e di gradi di libertà.

# 4. LA SIMULAZIONE DELLA REALTÀ PER LA VERIFICA E LA PREDIZIONE

Illustriamo brevemente il concetto di *simulazione*. La simulazione consiste essenzialmente: (i) in un processo di calcolo sulla base di teorie (più o meno astratte) proposte per una data realtà, ad esempio, per mezzo di calcoli logici o equazioni differenziali, e (ii) in una successiva fase di confronto tra i risultati calcolati e quelli effettivamente ottenuti durante gli esperimenti. Attraverso queste due fasi si riesce a valutare quanto le teorie siano vicine alla realtà, verificando appunto quanto i risultati ottenuti attraverso il calcolo siano corrispondenti a quelli che si ottengono negli esperimenti reali. La simulazione è una componente cruciale per lo sviluppo della scienza perché la scienza si basa su teorie validate e la simulazione serve per validare le teorie. La simulazione mette in relazione le "necessarie dimostrazioni" e le "sensate esperienze" che Galileo aveva riconosciuto essere elementi costitutivi fondamentali della scienza moderna.

Ovviamente, nessuna teoria può esaurire la realtà che formalizza e la sua corrispondenza alla realtà può essere solo relativa a una certa classe di proprietà e di fenomeni. Ad esempio, la formalizzazione cinematica di una certa realtà sarà in generale distinta dalla formalizzazione elettromagnetica della stessa realtà. Pertanto, le teorie e le conseguenti simulazioni hanno necessariamente dei limiti di espressività (spesso nel linguaggio comune si parla di queste formalizzazioni come di modelli, ma per mantenere una corrispondenza con quanto detto a proposito delle teorie logiche, la realtà fisica deve essere vista come modello delle formalizzazioni e non viceversa). Nonostante questi limiti intrinseci, la simulazione è un metodo di fondamentale importanza per l'utilizzo della scienza come metodo predittivo. Sulla base delle simulazioni è possibile, infatti, fare le previsioni meteorologiche o anche calcolare il rischio di alluvioni o frane in base delle precipitazioni atmosferiche, dell'irraggiamento solare e della conformazione orografica di un determinato territorio.

Un'annotazione finale. La natura divulgativa del nostro contributo non ci permette di offrire tutti i dettagli tecnici che contribuiscono alla definizione dei concetti presentati, quali appunto quelli di teoria, modello, completezza e consistenza. Il lettore interessato potrà fare riferimento a un testo di logica matematica, quale ad esempio quello di Mendelson [ 1 ].

---

[ * ] Dipartimento di Ingegneria civile e Ingegneria informatica, Università di Roma «Tor Vergata»; Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica "A. Ruberti", CNR.

[ 1 ] E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books, Monterey (California) 1987[3]. Si vedano anche: A. Pettorossi, «Formalized Languages and Theories: Adequacy, Consistency, Power, and Limitations», in P. Coda - R. Presilla (edd.), *Interpretazioni del reale*, Quaderni SEFIR 1, Lateran University Press-MURSIA, Roma 2000, pp. 141-158; A. Pettorossi, «Computing as Experimental Thinking», in P. Coda (ed.), *La questione ontologica tra scienza e fede*, Quaderni SEFIR 6, Lateran University Press, Roma 2004, pp. 35-53.