Laboratorio di Ricerca Operativa

G. Liuzzi[1]

Venerdí 3 Aprile 2020

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Approssimazione

È dato un insieme di coppie $\mathcal{C} = \{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$. Immaginiamo che

$$y_i = f(x_i)$$

per qualche funzione ignota f. Ora, ipotizziamo che la funzione ignota f abbia la seguente espressione

$$f(x) = \phi(x; a, b, c) = ax^2 + bx + c$$

In corrispondenza alle coppie $(x_i, y_i) \in \mathcal{C}$, possiamo calcolare

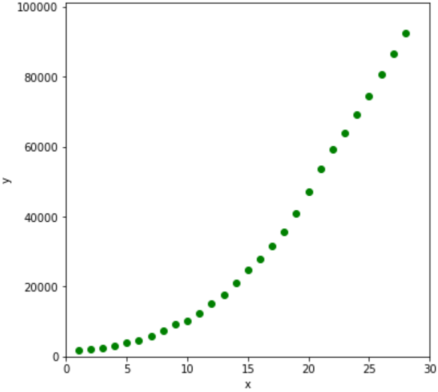
$$diff_i = (\phi(x_i; a, b, c) - y_i), \qquad \forall\ i = 1, \dots, n.$$

È ragionevole chiedersi quali valori dei parametri a, b, c rendono minime le quantità *diff*

Esempio

Consideriamo il seguente insieme di coppie $\mathcal{C}$

x_i	y_i
1	1694
2	2036
3	2502
4	3089
5	3858
6	4636
7	5883
8	7375
9	9172
10	10149
⋮	⋮
25	74386
26	80539
27	86498
28	92472



Normalizzazione dei dati

Calcoliamo valore atteso e varianza empirica dei dati

$$\mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \mu_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x-\mu_x)^2, \qquad \sigma_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y-\mu_y)^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= (x_i - \mu_x)/\sigma_x \\ \tilde{y}_i &= (y_i - \mu_y)/\sigma_y \end{aligned}$$

Matrice di interpolazione

Definiamo la matrice

$$\Phi = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_1^3 & x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_{n-1} & 1 \\ x_1^n & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi risulta

$$diff_i = (a \;\; b \;\; c)\phi_i^\top - y_i$$

dove $\phi_i^\top = (x_i^2 \;\; x_i \;\; 1)$ è l'i-esima riga della matrice Φ

Problemi

Provare a risolvere il probelmi

$$(1) \qquad \min \sum_{i=1}^{n} diff_i^2$$

$$(2) \qquad \min \sum_{i=1}^{n} |diff_i| \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{n} v_i \\ s.t. \ -v_i \leq (a\ b\ c)\phi_i^\top - y_i \leq v_i, \quad \forall\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

$$(3) \qquad \min \max_{i=1,\dots,n} \left\{ |diff_i| \right\} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} \min \ v \\ s.t. \ -v \leq (a\ b\ c)\phi_i^\top - y_i \leq v, \quad \forall\ i = 1, \dots, n \end{array}$$

Problema (1)

Il problema (1) ha soluzione

$$(a^* \ \ b^* \ \ c^*) = (\Phi^+ y)^\top$$

dove Φ^+ è la matrice pseudo-inversa di Φ.

Richiami

Ricordiamo la funzione approssimante

$$\phi(x; a, b, c) = ax^2 + bx + c$$

cioè una somma pesata (con pesi i parametri a, b, c) delle funzioni "elementari" x^2, x, 1.

È possibile definire altre funzioni ϕ utilizzando altre funzioni elementari in luogo di x^2, x e 1

Richiami

Ricordiamo la funzione approssimante

$$\phi(x; a, b, c) = ax^2 + bx + c$$

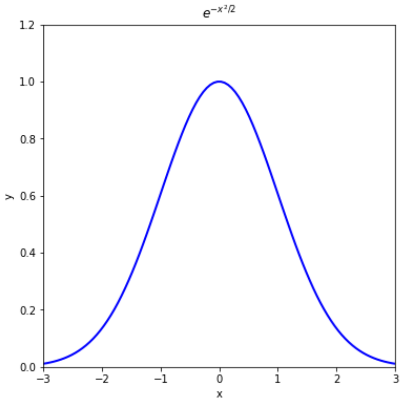
cioè una somma pesata (con pesi i parametri a, b, c) delle funzioni "elementari" x^2, x, 1.

È possibile definire altre funzioni ϕ utilizzando altre funzioni elementari in luogo di x^2, x e 1

RBF (2)

Consideriamo la funzione

$$\rho(x; C) = e^{-\frac{\|x-C\|^2}{2}}$$



RBF (2)

Consideriamo la funzione

$$\rho(x; C) = e^{-\frac{\|x-C\|^2}{2}}$$

che dipende dal parametro “C”, detto “centro”.

La funzione ρ è nota con il nome di “**funzione di base radiale**” (RBF - radial basis function).

Definiamo la funzione approssimante ϕ nel seguente modo:

$$\phi(x; a, b, c, C_1, C_2) = a\rho(x; C_1) + b\rho(x; C_2) + c$$

cioè somma pesata (con pesi a, b, c) delle funzioni $\rho(x; C_1)$, $\rho(x; C_2)$ e 1.

Dato l'insieme di coppie (ingressi-uscite) $\mathcal{C}$, e **fissati i due centri** $C_1 = x_j$ e $C_2 = x_h$ per qualche $j, h \in \{1, \dots, n\}$, determinare a, b, c risolvendo

$$(1) \qquad \min \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i; a, b, c, C_1, C_2) - y_i)^2$$

RBF (2)

Consideriamo la funzione

$$\rho(x; C) = e^{-\frac{\|x-C\|^2}{2}}$$

che dipende dal parametro "C", detto "centro".

La funzione ρ è nota con il nome di "**funzione di base radiale**" (RBF - radial basis function).

Definiamo la funzione approssimante ϕ nel seguente modo:

$$\phi(x; a, b, c, C_1, C_2) = a\rho(x; C_1) + b\rho(x; C_2) + c$$

cioè somma pesata (con pesi a, b, c) delle funzioni $\rho(x; C_1)$, $\rho(x; C_2)$ e 1.

Dato l'insieme di coppie (ingressi-uscite) $\mathcal{C}$, e **fissati i due centri** $C_1 = x_j$ **e** $C_2 = x_h$ per qualche $j, h \in \{1, \dots, n\}$, determinare a, b, c risolvendo

$$(1) \qquad \min \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i; a, b, c, C_1, C_2) - y_i)^2$$

RBF (2)

Consideriamo la funzione

$$\rho(x; C) = e^{-\frac{\|x-C\|^2}{2}}$$

che dipende dal parametro "C", detto "centro".

La funzione ρ è nota con il nome di "**funzione di base radiale**" (RBF - radial basis function).

Definiamo la funzione approssimante ϕ nel seguente modo:

$$\phi(x; a, b, c, C_1, C_2) = a\rho(x; C_1) + b\rho(x; C_2) + c$$

cioè somma pesata (con pesi a, b, c) delle funzioni $\rho(x; C_1)$, $\rho(x; C_2)$ e 1.

Dato l'insieme di coppie (ingressi-uscite) $\mathcal{C}$, e **fissati i due centri** $C_1 = x_j$ **e** $C_2 = x_h$ per qualche $j, h \in \{1, \ldots, n\}$, determinare a, b, c risolvendo

$$(1) \qquad \min \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i; a, b, c, C_1, C_2) - y_i)^2$$

RBF (3)

Definiamo ora la funzione approssimante ϕ nel seguente modo:

$$\phi(x; a, b, c, d, C_1, C_2, C_3) = a\rho(x; C_1) + b\rho(x; C_2) + c\rho(x; C_3) + d$$

Dato l'insieme di coppie (ingressi-uscite) $\mathcal{C}$, e **fissati i centri** $C_1 = x_j$**,** $C_2 = x_h$**, e** $C_3 = x_k$ per qualche $j, h, k \in \{1, \ldots, n\}$, determinare a, b, c, d risolvendo

$$\min \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i; a, b, c, d, C_1, C_2, C_3) - y_i)^2 \tag{1}$$

RBF (m)

Definiamo ora la funzione approssimante ϕ nel seguente modo:

$$\phi(x; a, C) = \sum_{i=1}^{m} a_i \rho(x; C_i) + a_{m+1}$$

Dato l'insieme di coppie (ingressi-uscite) $\mathcal{C}$, e fissati i centri $C_i = x_{j_i}$, con $j_i \in \{1, \ldots, n\}$, $i = 1, \ldots, m$, determinare a_i, $i = 1, \ldots, m+1$ risolvendo

$$(1) \qquad \min \sum_{i=1}^{n} (\phi(x_i; a, C) - y_i)^2$$