

Laboratorio di Ricerca Operativa

G. Liuzzi¹

Venerdì 24 Aprile 2020

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Il problema del commesso viaggiatore (TSP)

- Concorso indetto da Procter & Gamble nel 1962
- Determinare il tour di lunghezza minima passante per 33 città USA

Il problema del commesso viaggiatore (TSP)

HELP! WE'RE LOST!

HELP "CAR 54"...AND WIN CASH
 54...\$1,000 PRIZES
 ONE...\$10,000 GRAND PRIZE

Help Taggy and Muldoon find the shortest round trip route to visit all 33 locations shown on the map.
 All you do is draw connecting straight lines from location to location to show the shortest round trip route.

HERE'S THE CORRECT START . . .
 Begin at Chicago, Illinois. From there, lines show correct route as far as Erie, Pennsylvania. Next, do you go to Carlisle, Pennsylvania or Waco, West Virginia? Check the easy instructions on back of this entry blank for details.

© PROCTOR & GAMBLE 1962 OFFICIAL RULES ON REVERSE SIDE

Il problema del commesso viaggiatore (TSP)

HELP! WE'RE LOST!

HELP "CAR 54" ... AND WIN CASH
 54...\$1,000 PRIZES
 ONE...\$10,000 GRAND PRIZE

START FROM CHICAGO

Help Taddy and Muldoon find the shortest round trip route to visit all 33 locations shown on the map. All you do is draw connecting straight lines from location to location to show the shortest round trip route.

HERE'S THE CORRECT START...
 Begin at Chicago, Illinois. From there, lines show correct route as far as Erie, Pennsylvania. Next, do you go to Carlisle, Pennsylvania or Wino, West Virginia? Check the easy instructions on back of this entry blank for details.

© PROCTOR & GAMBLE 1962

OFFICIAL RULES ON REVERSE SIDE

- Vincitore: Gerald Thompson (Carnegie Mellon University)

Problema del Commesso Viaggiatore

Problema: Dato un insieme di città, determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una e una sola volta per tutte le città.

In termini più generali:

Dato un grafo $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e $E = V \times V$, e assegnate delle lunghezze δ_{ij} ad ogni arco $(i, j) \in E$, si vuole determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una ed una sola volta per ogni nodo del grafo.

Problema del Commesso Viaggiatore

Problema: Dato un insieme di città, determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una e una sola volta per tutte le città.

In termini più generali:

Dato un grafo $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e $E = V \times V$, e assegnate delle lunghezze δ_{ij} ad ogni arco $(i, j) \in E$, si vuole determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una ed una sola volta per ogni nodo del grafo.

- Un ciclo che passa una ed una sola volta per ogni nodo di G è detto ciclo HAMILTONIANO
- Il numero di soluzioni ammissibili del problema (ovvero di cicli Hamiltoniani nel grafo) è finito e pari a

Problema del Commesso Viaggiatore

Problema: Dato un insieme di città, determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una e una sola volta per tutte le città.

In termini più generali:

Dato un grafo $G = (V, E)$, con $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e $E = V \times V$, e assegnate delle lunghezze δ_{ij} ad ogni arco $(i, j) \in E$, si vuole determinare il ciclo di lunghezza minima che passa una ed una sola volta per ogni nodo del grafo.

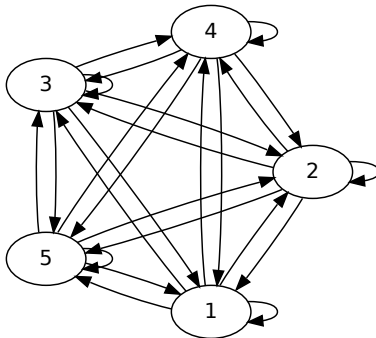
- Un ciclo che passa una ed una sola volta per ogni nodo di G è detto ciclo HAMILTONIANO
- Il numero di soluzioni ammissibili del problema (ovvero di cicli Hamiltoniani nel grafo) è finito e pari a

$$(n - 1)!$$

numero di permutazioni di $n - 1$ oggetti.

Rappresentazione del problema

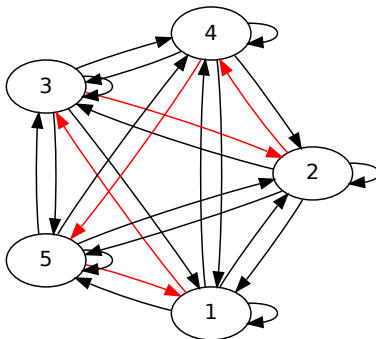
Sia $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Graficamente abbiamo:



Rappresentazione del problema

Sia $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Il ciclo corrispondente alla permutazione dei nodi $\{1, 3, 2, 4, 5\}$ è evidenziato in rosso



Formulazione matematica del problema

Passo 1. Scelta delle variabili:

Formulazione matematica del problema

Passo 1. Scelta delle variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene ad un ciclo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Formulazione matematica del problema

Passo 1. Scelta delle variabili:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j) \text{ appartiene ad un ciclo} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

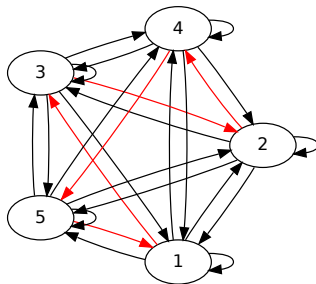
Quindi, per il ciclo di prima, se indichiamo con

$$\bar{E} = \{(1, 3), (3, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 1)\}$$

l'insieme degli archi che compongono il ciclo, abbiamo:

$$x_{13} = x_{32} = x_{24} = x_{45} = x_{51} = 1$$

$$x_{ij} = 1, \quad \forall (i, j) \in \bar{E},$$
$$x_{ij} = 0, \quad \forall (i, j) \in E \setminus \bar{E}.$$



Formulazione matematica del problema

Passo 2. Funzione obiettivo:

$$\min \sum_{(i,j) \in E} \delta_{ij} x_{ij}.$$

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E$$

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E$$

Servono dei vincoli (delle relazioni) che **IMPONGANO** che

$x_{ij} = 1$, se (i, j) appartiene ad un ciclo

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E$$

Servono dei vincoli (delle relazioni) che **IMPONGANO** che

$$x_{ij} = 1, \text{ se } (i, j) \text{ appartiene ad un ciclo}$$

Concentriamoci sul nodo 4

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

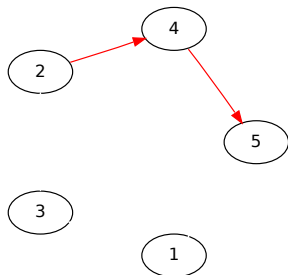
$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E$$

Servono dei vincoli (delle relazioni) che **IMPONGANO** che

$x_{ij} = 1$, se (i, j) appartiene ad un ciclo

Concentriamoci sul nodo 4
e notiamo che

- un solo arco ENTRA in 4
- un solo arco ESCE da 4



Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in E$$

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E$$

$$\sum_{(i,k) \in E} x_{ik} = 1, \quad \forall k \in V,$$

Formulazione matematica del problema

Passo 3. Vincoli:

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E$$

$$\sum_{(i,k) \in E} x_{ik} = 1, \quad \forall k \in V,$$

$$\sum_{(k,j) \in E} x_{kj} = 1, \quad \forall k \in V,$$

Albero ricoprente a costo minimo

Problema: Dato un grafo non orientato $G = (V, E)$, in cui $E \subset V \times V$ è un insieme di coppie non ordinate, ed una lunghezza δ_e per ogni $e \in E$, determinare l'albero $T = (V, F)$ a costo minimo.

N.B. un sottografo di G , $T = (V, F)$, è un albero se è aciclico e connesso. Allora $|F| = |V| - 1$

Formulazione come problema di PLI

Variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ appartiene a } T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

funzione obiettivo

$$\sum_{(i,j) \in E} \delta_{(i,j)} x_{ij}$$

Vincoli

- $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = |V| - 1$
- $\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1$, per ogni $S \subset V$, $S \neq \emptyset$