Ottimizzazione Non Lineare

A.A. 2017-18 – 22 Dicembre 2017

prova d'esame (1)

1. Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y}\ f(x,y)$, ove $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ ed il metodo senza derivate riportato in fig. 1.

   a) Determinare il passo Δ_1 ed il punto x_1 che si ottengono alla fine della prima terazione quando $\Delta_0 = 1$, $x_0 = (2,\ 1)^\top$ e $D = \{\pm e_1,\ \pm e_2\}$.

   b) Determinare un passo $\Delta_0 > 0$ tale che alla fine della prima iterazione si abbia $\Delta_1 = \Delta_0/2$ e $x_1 = x_0$.

```
INPUT: x_0, Δ_0, D
for k = 0, 1, ... do
    Let d̄ ∈ D be s.t. f(x_k + Δ_k d̄) = min_{d_i ∈ D} f(x_k + Δ_k d_i)
    if f(x_k + Δ_k d̄) < f(x_k) then
        x_{k+1} ← x_k + Δ_k d̄, Δ_{k+1} ← Δ_k
    else
        Δ_{k+1} ← Δ_k/2, x_{k+1} ← x_k
    endif
end while
```

Figure 1: Metodo per l'esercizio 1

2. Sia $f(x)$ una funzione incognita di variabile reale per la quale è noto che:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = -2, \quad f(3) = 1.$$

   a) Determinare una costante $L > 0$ tale che, per la funzione (lineare a tratti)

$$\ell_L(x) = \max_{i=0,1,2,3} \{f(i) - L|x - i|\},$$

   risulti $\ell_L(0) = 0, \quad \ell_L(1) = 1, \quad \ell_L(2) = -2, \quad \ell_L(3) = 1.$

   b) Con la costante L trovata nel punto precedente, determinare un punto di minimo globale di $\ell_L(x)$ sull'intervallo $[0, 3]$.

3. Si consideri il problema vincolato

$$\begin{array}{l} \min\ x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \\ s.t.\ x_1^2 + x_2^2 \le 1. \end{array} \tag{1}$$

   a) Determinare tutti i punti di KKT del problema (1).

   b) Per il problema (1), scrivere una funzione di penalità sequenziale $P(x; \epsilon)$ e calcolarne il valore in $(0,\ 2)^\top$ quando $\epsilon = 1$.

   b) Per il problema (1), scrivere una funzione Lagrangiana aumentata $L_a(x, \lambda; \epsilon)$ e calcolarne il valore in $(0,\ 2)^\top$ quando $\epsilon = 1$ e $\lambda = 1$.

4. Per il metodo riportato in fig. 1, dimostrare che, se $\{x \in \mathbb{R}^2 :\ f(x) \le f(x_0)\}$ è compatto, $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$.

Ottimizzazione Non Lineare

A.A. 2017-18 – 22 Dicembre 2017

prova d'esame (1) – svolgimento

1. a) Nel punto x_0 la funzione obiettivo vale $f(x_0) = 2$. Il metodo riportato in figura, al fine di determinare la direzione $\bar{d}$ deve calcolare i valori di funzione obiettivo nei $2n$ punti $x_0 \pm \Delta_0 e_i$. Risulta:

$$\begin{array}{ll} w_1 = x_0 + \Delta_0 e_1 = (3,\ 1)^\top & f(w_1) = 5, \\ w_2 = x_0 - \Delta_0 e_1 = (1,\ 1)^\top & f(w_2) = 1, \\ w_3 = x_0 + \Delta_0 e_2 = (2,\ 2)^\top & f(w_3) = 5, \\ w_4 = x_0 - \Delta_0 e_2 = (2,\ 0)^\top & f(w_3) = 1. \end{array}$$

Quindi, la direzione $\bar{d}$ può indifferentemente essere $-e_1$ oppure $-e_2$. Supponiamo $\bar{d} = -e_1$. In questo caso, considerato che $f(w_2) < f(x_0)$, si avrà, al termine della prima iterazione, $x_1 = w_2$ e $\Delta_1 = \Delta_0$.

b) Il testo richiede, sostanzialmente, di determinare un passo iniziale che garantisca che la prima iterazione sia una iterazione di "fallimento" ovvero una iterazione nella quale il punto non cambia ed il passo si riduce. Se il passo Δ_0 è incognito, risulta:

$$\begin{array}{ll} w_1 = x_0 + \Delta_0 e_1 = (2+\Delta_0,\ 1)^\top & f(w_1) = (1+\Delta_0)^2 + 1, \\ w_2 = x_0 - \Delta_0 e_1 = (2-\Delta_0,\ 1)^\top & f(w_2) = (1-\Delta_0)^2 + 1, \\ w_3 = x_0 + \Delta_0 e_2 = (2,\ 1+\Delta_0)^\top & f(w_3) = 1 + (1+\Delta_0)^2, \\ w_4 = x_0 - \Delta_0 e_2 = (2,\ 1-\Delta_0)^\top & f(w_3) = 1 + (1-\Delta_0)^2. \end{array}$$

In particolare, si ha: $f(w_1) = 2 + 2\Delta_0 + \Delta_0^2$ e $f(w_2) = 2 - 2\Delta_0 + \Delta_0^2$. Affinché la prima iterazione si di fallimento, deve risultare: $f(w_1) \geq f(x_0)$ e $f(w_2) \geq f(x_0)$. Quindi:

$$\begin{array}{l} \Delta_0(\Delta_0 + 2) \geq 0, \\ \Delta_0(\Delta_0 - 2) \geq 0, \end{array}$$

da cui segue, considerato che $\Delta_0 > 0$, $\Delta_0 \geq 2$. Ad esempio, il valore $\Delta_0 = 2$ garantisce che la prima iterazione del metodo si concluderà come un fallimento.

2. a) Affinché risulti $\ell(i) = f(i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, bisogna che:

$$\begin{array}{l} \ell(0) = \max\{0, 1-L, -2-2L, 1-3L\} = 0, \\ \ell(1) = \max\{-L, 1, -2-L, 1-2L\} = 1, \\ \ell(2) = \max\{-2L, 1-L, -2, 1-L\} = -2, \\ \ell(3) = \max\{-3L, 1-2L, -2-L, 1\} = 1, \end{array}$$

e quindi $L \geq 3$.

b) Sia $L = 4$. È possibile determinare il punto di minimo globale di $\ell(x)$ ed il relativo valore del minimo globale, determinando i punti di minimo della $\ell(x)$ nei 3 sottointervalli $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$. Risulta, pertanto,

$$\begin{array}{rl} -4x^{*,1} = 1 - 4(1 - x^{*,1}), & x^{*,1} = 3/8,\ \ell(x^{*,1}) = -3/2, \\ 1 - 4(x^{*,2} - 1) = -2 - 4(2 - x^{*,2}), & x^{*,2} = 15/8,\ \ell(x^{*,2}) = -5/2, \\ -2 - 4(x^{*,3} - 2) = 1 - 4(3 - x^{*,3}), & x^{*,3} = 17/8,\ \ell(x^{*,3}) = -5/2. \end{array}$$

Quindi, un punto di minimo globale di $\ell(x)$ sull'intervallo $[0, 3]$ è, per esempio, $x^* = 15/8$.

3. a) Una copia (x, λ) è una coppia di KKT se valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 2\lambda x_1 = 0, \\ 2(x_2 - 1) + 2\lambda x_2 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ \lambda \geq 0, \\ \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0. \end{array}$$

Se supponiamo $\lambda > 0$, allora $x_1 = 0$ e $x_2 = \pm 1$.
Quando $x_2 = 1$, si avrebbe $\lambda = 0$ che è in contraddizione con l'ipotesi iniziale $\lambda > 0$.
Quando $x_2 = -1$, si avrebbe $\lambda = -2$ che ancora contrasta con l'ipotesi $\lambda > 0$.
Supponiamo ora, $\lambda = 0$. Da questo segue, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$. Quindi, la coppia

$$((0,\ 1)^\top, 0)$$

è l'unica coppia di KKT del problema.

b) L'espressione di una funzione di penalità sequenziale per il problema è

$$P(x;\epsilon) = x_1^2 + (x_2-1)^2 + \frac{1}{\epsilon}\max\{x_1^2 + x_2^2 - 1, 0\}^2$$

e $P(0,2;1) = 10$.

c) L'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata per il problema è

$$L_a(x,\lambda;\epsilon) = x_1^2 + (x_2-1)^2 + \lambda \max\left\{x_1^2 + x_2^2 - 1, -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\} + \frac{1}{\epsilon}\max\left\{x_1^2 + x_2^2 - 1, -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\}^2$$

e $L_a(0,2,1;1) = 13$.

Ottimizzazione Non Lineare

A.A. 2017-18 – 22 Dicembre 2017

prova d'esame (2)

1. Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y}\ f(x,y)$, ove $f(x,y) = Mx^2 + y^2$ con $M > 0$ e l'insieme di punti $X_0 = \{a, b, c\}$ con
$$a = (1,\ 0)^\top; b = (0,\ 1)^\top; c = (0,\ -1)^\top.$$
   a) Determinare un valore di $M > 0$ tale che $f(a) < f(b)$ e $f(a) < f(c)$.
   b) Eseguire una iterazione del metodo senza derivate per il quale in fig. 2 è riportata la generica iterazione k, definendo l'insieme X_1 ottenuto dal metodo alla fine della iterazione.

- Se $\boxed{f_1 \le f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \le f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \le f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \le f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Figure 2: k-esima iterazione del metodo di Nelder&Mead per l'esercizio 1

2. Si consideri il problema vincolato seguente:
$$\begin{aligned} \min\ & x^2 + 3xy + y^2 - x \\ s.t.\ & x^2 + y^2 \le 1 \\ & x \ge 0,\ y \ge 0. \end{aligned}$$
   a) stabilire se il punto $(0,\ 0)^\top$ è stazionario per il problema;
   b) eseguire una iterazione del metodo di Frank-Wolfe con punto iniziale $(0,\ 0)^\top$ e parametri della ricerca unidimensionale di Armijo $\gamma = 1/4$, $\delta = 1/2$.

3. Sia $D = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x_1 \le 2,\ 2 \le x_2 \le 3\}$ con centroide il punto $c = (1/2,\ 5/2)$. Utilizzando la tecnica di partizione di `DIRECT`:
   a) determinare in quanti e quali nuovi punti bisogna calcolare la funzione obiettivo;
   b) assegnare valori a tali puti affinché la partizione di D prodotta contenga l'insieme
$$\bar{D} = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x_1 \le 4/3,\ 2 \le x_2 \le 3\};$$
   c) scrivere la definizione degli insiemi frutto della partizione di D.

4. Per il problema $\min_{x\in S}\ f(x)$, con S insieme convesso e f continuamente differenziabile su $\mathbb{R}^n$, dimostrare che condizione necessaria affinché x^* sia un minimo locale è
$$\nabla f(x^*)^\top (x - x^*) \ge 0, \quad \forall\ x \in S.$$