Ottimizzazione Non Lineare

A.A. 2017-18 – 15 Gennaio 2018

prova di esonero (A)

1. Sia $f(x)$ una funzione incognita di variabile reale per la quale è noto che $L = 2$ è una sovrastima della costante di Lipschitz e:
$$f(-2) = 0, \quad f(-1) = 1, \quad f(1) = 3, \quad f(3) = 0,$$
e si consideri il problema $\min_{-2 \le x \le 3} f(x)$.
   a) Motivando la risposta, stabilire se $f(x)$ in $x = 0$ può valere 0.
   b) Motivando la risposta, stabilire se $f(x)$ in $x = 0$ può valere 4.
   c) Determinare un punto di minimo globale della funzione
   $$\ell(x) = \max_{i=-2,-1,1,3} \{f(i) - L|x - i|\},$$
   sull'intervallo $[-2, 3]$.

2. Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y} \; f(x, y)$, ove $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - y$ ed il metodo senza derivate riportato in fig. 1.
   a) Determinare Δ_0, $\tilde{\Delta}_1$ ed il punto x_1 che si ottengono alla fine della prima terazione quando $\tilde{\Delta}_0 = 2$, $x_0 = (3,\ 3)^\top$ e $\gamma = 1/16$.
   b) Determinare Δ_0, $\tilde{\Delta}_1$ ed il punto x_1 che si ottengono alla fine della prima terazione quando $\tilde{\Delta}_0 = 1/2$, $x_0 = (3,\ 3)^\top$ e $\gamma = 1/16$.
   c) Determinare per quali valori di $\tilde{\Delta}_0$ alla fine della prima iterazione si ha $x_1 = x_0$ quando $x_0 = (2,\ 2)^\top$ e $\gamma = 1/16$.

INPUT: x_0, $\tilde{\Delta}_0$, $D = \{e_1\} = \{d_1\}$
$k \leftarrow 0$
for $k = 0, 1, \dots$ **do**
    if $f(x_k + \tilde{\Delta}_k d_1) \le f(x_k) - \gamma(\tilde{\Delta}_k)^2$ **then**
        $p_k \leftarrow d_1$, $\Delta_k \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k$ e $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \Delta_k$ con j tale che (1) è soddisfatta
    elseif $f(x_k - \tilde{\Delta}_k d_1) \le f(x_k) - \gamma(\tilde{\Delta}_k)^2$ **then**
        $p_k \leftarrow -d_1$, $\Delta_k \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k$ e $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \Delta_k$ con j tale che (1) è soddisfatta
    else $\Delta_k \leftarrow 0$, $p_k \leftarrow d_1$, $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \tilde{\Delta}_k / 2$
    $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k p_k$
end for

j più piccolo intero non negativo tale che:
$$\begin{array}{lcl} f(x_k + 2^j \tilde{\Delta}_k p_k) & \le & f(x_k) - \gamma(2^j \tilde{\Delta}_k)^2 \\ f(x_k + 2^{j+1} \tilde{\Delta}_k p_k) & > & f(x_k) - \gamma(2^{j+1} \tilde{\Delta}_k)^2 \end{array} \qquad (1)$$

Figure 1: Metodo per l'esercizio 2

3. Determinare tutti i punti di KKT del problema vincolato nonlineare
$$\begin{array}{ll} \min & x^2 - 3xy + 2x - y \\ s.t. & y - x \le 0 \\ & y \ge 0 \\ & x + 2y \le 3. \end{array} \qquad (2)$$

4. Sia $\mathcal{H} = \{\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2, \mathcal{D}^3\}$ una famiglia di insiemi tali che:
$$\mathcal{D}^i = \{x \in \mathbb{R}^n : \; \ell^i \le x \le u^i\}, \; \delta_i = \|u^i - \ell^i\|, \; c_i = \frac{1}{2}(u^i + \ell^i)$$
e per i quali si ha
$$\begin{array}{ccc} \delta_1 = 1, & \delta_2 = 2, & \delta_3 = 3 \\ f(c_1) = -1, & f(c_2) = 0, & f(c_3) = 1/2. \end{array}$$
Essendo $f_{min} = f(c_1)$ ed usando $\epsilon = 1$, stabilire (motivando la risposta) quanti e quali insiemi di $\mathcal{H}$ sono *potenzialmente ottimi*.

Ottimizzazione Non Lineare

A.A. 2017-18 – 15 Gennaio 2018

prova di esonero (B)

1. Determinare tutti i punti di KKT del problema vincolato nonlineare

$$\begin{aligned} \min\ & 2x^2 - 4y^2 - 3x + 2y \\ s.t.\ & y - x \leq 0 \\ & y \geq 0 \\ & x \leq 3. \end{aligned} \tag{3}$$

2. Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y}\ f(x, y)$, ove $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - x - 2y$ ed il metodo senza derivate riportato in fig. 2.

   a) Determinare Δ_0, $\tilde{\Delta}_1$ ed il punto x_1 che si ottengono alla fine della prima terazione quando $\tilde{\Delta}_0 = 2$, $x_0 = (1,\ 3)^\top$ e $\gamma = 1/16$.

   b) Determinare Δ_0, $\tilde{\Delta}_1$ ed il punto x_1 che si ottengono alla fine della prima terazione quando $\tilde{\Delta}_0 = 1/2$, $x_0 = (1,\ 3)^\top$ e $\gamma = 1/16$.

   c) Determinare per quali valori di $\tilde{\Delta}_0$ alla fine della prima iterazione si ha $x_1 = x_0$ quando $x_0 = (1,\ 2)^\top$ e $\gamma = 1/16$.

INPUT: x_0, $\tilde{\Delta}_0$, $D = \{-e_2\} = \{d_1\}$
$k \leftarrow 0$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
  if $f(x_k + \tilde{\Delta}_k d_1) \leq f(x_k) - \gamma(\tilde{\Delta}_k)^2$ **then**
    $p_k \leftarrow d_1$, $\Delta_k \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k$ e $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \Delta_k$ con j tale che (4) è soddisfatta
  elseif $f(x_k - \tilde{\Delta}_k d_1) \leq f(x_k) - \gamma(\tilde{\Delta}_k)^2$ **then**
    $p_k \leftarrow -d_1$, $\Delta_k \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k$ e $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \Delta_k$ con j tale che (4) è soddisfatta
  else $\Delta_k \leftarrow 0$, $p_k \leftarrow d_1$, $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \tilde{\Delta}_k/2$
  $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k p_k$
end for

j più piccolo intero non negativo tale che:

$$\begin{aligned} f(x_k + 2^j \tilde{\Delta}_k p_k) &\leq f(x_k) - \gamma(2^j \tilde{\Delta}_k)^2 \\ f(x_k + 2^{j+1} \tilde{\Delta}_k p_k) &> f(x_k) - \gamma(2^{j+1} \tilde{\Delta}_k)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Figure 2: Metodo per l'esercizio 2

3. Sia $\mathcal{H} = \{\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2, \mathcal{D}^3\}$ una famiglia di insiemi tali che:

$$\mathcal{D}^i = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \ell^i \leq x \leq u^i\},\ \delta_i = \|u^i - \ell^i\|,\ c_i = \frac{1}{2}(u^i + \ell^i)$$

e per i quali si ha

$$\begin{array}{ccc} \delta_1 = 3, & \delta_2 = 2, & \delta_3 = 4 \\ f(c_1) = -1, & f(c_2) = -2, & f(c_3) = -1/2. \end{array}$$

Essendo $f_{min} = f(c_2)$ ed usando $\epsilon = 1$, stabilire (motivando la risposta) quanti e quali insiemi di $\mathcal{H}$ sono *potenzialmente ottimi.*

4. Sia $f(x)$ una funzione incognita di variabile reale per la quale è noto che $L = 2$ è una sovrastima della costante di Lipschitz e:

$$f(2) = 2, \quad f(4) = 4, \quad f(5) = 3, \quad f(7) = 2,$$

e si consideri il problema $\min_{2 \leq x \leq 7} f(x)$.

   a) Motivando la risposta, stabilire se $f(x)$ in $x = 3$ può valere 5.

   b) Motivando la risposta, stabilire se $f(x)$ in $x = 3$ può valere 0.

   c) Determinare un punto di minimo globale della funzione

$$\ell(x) = \max_{i=2,4,5,7} \{f(i) - L|x - i|\},$$

   sull'intervallo $[2, 7]$.

Ottimizzazione Non Lineare

A.A. 2017-18 – 15 Gennaio 2018

prova di esonero (C)

1. Sia $\mathcal{H} = \{\mathcal{D}^1, \mathcal{D}^2, \mathcal{D}^3\}$ una famiglia di insiemi tali che:

$$\mathcal{D}^i = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \ell^i \le x \le u^i\}, \ \delta_i = \|u^i - \ell^i\|, \ c_i = \frac{1}{2}(u^i + \ell^i)$$

e per i quali si ha

$$\begin{array}{ccc} \delta_1 = 1, & \delta_2 = 2, & \delta_3 = 3 \\ f(c_1) = -1, & f(c_2) = 0, & f(c_3) = 1/2. \end{array}$$

Essendo $f_{min} = f(c_1)$ ed usando $\epsilon = 1$, stabilire (motivando la risposta) quanti e quali insiemi di $\mathcal{H}$ sono *potenzialmente ottimi*.

2. Sia $f(x)$ una funzione incognita di variabile reale per la quale è noto che $L = 2$ è una sovrastima della costante di Lipschitz e:

$$f(1) = -1, \quad f(2) = -2, \quad f(4) = -4, \quad f(6) = -5,$$

e si consideri il problema $\min_{1 \le x \le 6} f(x)$.

a) Motivando la risposta, stabilire se $f(x)$ in $x = 5$ può valere -2.

b) Motivando la risposta, stabilire se $f(x)$ in $x = 5$ può valere -8.

c) Determinare un punto di minimo globale della funzione

$$\ell(x) = \max_{i=1,2,4,6} \{f(i) - L|x - i|\},$$

sull'intervallo $[1, 6]$.

3. Determinare tutti i punti di KKT del problema vincolato nonlineare

$$\begin{aligned} \min \ & 2x^2 - 3xy - x + 3y \\ s.t. \ & x + y \le 3 \\ & x - 2y \ge 0 \\ & y \ge 0. \end{aligned} \tag{5}$$

4. Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y} \ f(x, y)$, ove $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x + 2y$ ed il metodo senza derivate riportato in fig. 3.

a) Determinare Δ_0, $\tilde{\Delta}_1$ ed il punto x_1 che si ottengono alla fine della prima terazione quando $\tilde{\Delta}_0 = 2$, $x_0 = (3, \ 1)^\top$ e $\gamma = 1/16$.

b) Determinare Δ_0, $\tilde{\Delta}_1$ ed il punto x_1 che si ottengono alla fine della prima terazione quando $\tilde{\Delta}_0 = 1/2$, $x_0 = (3, \ 1)^\top$ e $\gamma = 1/16$.

c) Determinare per quali valori di $\tilde{\Delta}_0$ alla fine della prima iterazione si ha $x_1 = x_0$ quando $x_0 = (2, \ 1)^\top$ e $\gamma = 1/16$.

INPUT: x_0, $\tilde{\Delta}_0$, $D = \{-e_1\} = \{d_1\}$
$k \leftarrow 0$
for $k = 0, 1, \ldots$ **do**
  if $f(x_k + \tilde{\Delta}_k d_1) \le f(x_k) - \gamma(\tilde{\Delta}_k)^2$ **then**
    $p_k \leftarrow d_1$, $\Delta_k \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k$ e $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \Delta_k$ con j tale che (6) è soddisfatta
  elseif $f(x_k - \tilde{\Delta}_k d_1) \le f(x_k) - \gamma(\tilde{\Delta}_k)^2$ **then**
    $p_k \leftarrow -d_1$, $\Delta_k \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k$ e $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \Delta_k$ con j tale che (6) è soddisfatta
  else $\Delta_k \leftarrow 0$, $p_k \leftarrow d_1$, $\tilde{\Delta}_{k+1} \leftarrow \tilde{\Delta}_k/2$
  $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k p_k$
end for

j più piccolo intero non negativo tale che:

$$\begin{array}{lcl} f(x_k + 2^j \tilde{\Delta}_k p_k) & \le & f(x_k) - \gamma(2^j \tilde{\Delta}_k)^2 \\ f(x_k + 2^{j+1} \tilde{\Delta}_k p_k) & > & f(x_k) - \gamma(2^{j+1} \tilde{\Delta}_k)^2 \end{array} \tag{6}$$

Figure 3: Metodo per l'esercizio 4