Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi[1]

Giovedì 23 Novembre 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Espansione con suff. decremento

INPUT: x_0, $\tilde{\Delta}_0^i$, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{e_1, \dots e_n\} = \{d_1, \dots, d_n\}$

$k \leftarrow 0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\max_i \tilde{\Delta}_k{}^i \geq \Delta_{min}$ **do**

$\quad y_k^1 \leftarrow x_k$

$\quad$ **for** $i = 1, \dots, n$

$\quad\quad$ **if** $f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i d_i) \leq f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2$ **then**

$\quad\quad\quad p_k^i \leftarrow d_i$ e $\boxed{\text{calcola } \Delta_k^i \text{ e } \tilde{\Delta}_{k+1}^i \text{ mediante una espansione lungo } p_k^i}$

$\quad\quad$ **elseif** $f(y_k^i - \tilde{\Delta}_k^i d_i) \leq f(y_k{}^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2$ **then**

$\quad\quad\quad p_k^i \leftarrow -d_i$ e $\boxed{\text{calcola } \Delta_k^i \text{ e } \tilde{\Delta}_{k+1}^i \text{ mediante una espansione lungo } p_k^i}$

$\quad\quad$ **else** $\Delta_k^i \leftarrow 0$, $p_k^i \leftarrow d_i$, $\tilde{\Delta}_{k+1}^i \leftarrow \tilde{\Delta}_k^i/2$

$\quad\quad y_k^{i+1} \leftarrow y_k^i + \Delta_k^i p_k^i$

$\quad$ **end for**

$\quad$ Scegli x_{k+1} s.t. $f(x_{k+1}) \leq f(y_k{}^{n+1})$ p.es. $x_{k+1} \leftarrow y_k{}^{n+1}$

$\quad k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: $\{x_k\}, \{y_k{}^i\}, \{p_k^i\}, \{\tilde{\Delta}_k{}^i\}$

Espansione lungo d_k^i con suff. decremento

Determina il più piccolo intero $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ tale che

$$\begin{aligned} f(y_k^i + 2^j \tilde{\Delta}_k^i d_k^i) &\leq f(y_k^i) - \gamma(2^j \tilde{\Delta}_k^i)^2, \\ f(y_k^i + 2^{j+1} \tilde{\Delta}_k^i d_k^i) &> f(y_k^i) - \gamma(2^{j+1} \tilde{\Delta}_k^i)^2 \end{aligned}$$

Poni $\Delta_k^i \leftarrow 2^j \tilde{\Delta}_k^i$ e $\tilde{\Delta}_{k+1}^i \leftarrow \Delta_k^i$

Convergenza a punti stazionari

Teorema

Se vale la (A1) e se f è continuamente differenziabile, allora

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$$

dim. Osserviamo prima di tutto che $x_k \in L(x_0)$ quindi $\{x_k\}$ ammette punti limite.
Sia $\bar{x}$ e K tali che

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}.$$

Per ogni $k \in K$ e $i = 2, \dots, n+1$

$$\|y_k^i - x_k\| \le \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_k^j \quad \text{quindi} \quad \lim_{k\to\infty, k\in K} y_k^i = \bar{x}.$$

Convergenza a punti stazionari

Teorema

Se vale la (A1) e se f è continuamente differenziabile, allora

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$$

dim. Osserviamo prima di tutto che $x_k \in L(x_0)$ quindi $\{x_k\}$ ammette punti limite.

Sia $\bar{x}$ e K tali che

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}.$$

Per ogni $k \in K$ e $i = 2, \ldots, n+1$

$$\|y_k^i - x_k\| \leq \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_k^j \quad \text{quindi} \quad \lim_{k\to\infty, k\in K} y_k^i = \bar{x}.$$

Convergenza a punti stazionari

Teorema

Se vale la (A1) e se f è continuamente differenziabile, allora

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$$

dim. Osserviamo prima di tutto che $x_k \in L(x_0)$ quindi $\{x_k\}$ ammette punti limite.
Sia $\bar{x}$ e K tali che

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}.$$

Per ogni $k \in K$ e $i = 2, \dots, n+1$

$$\|y_k^i - x_k\| \le \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_k^j \quad \text{quindi} \quad \lim_{k\to\infty, k\in K} y_k^i = \bar{x}.$$

Convergenza a punti stazionari

Teorema

Se vale la (A1) e se f è continuamente differenziabile, allora

$$\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$$

dim. Osserviamo prima di tutto che $x_k \in L(x_0)$ quindi $\{x_k\}$ ammette punti limite.
Sia $\bar{x}$ e K tali che

$$\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}.$$

Per ogni $k \in K$ e $i = 2, \dots, n+1$

$$\|y_k^i - x_k\| \le \sum_{j=1}^{i-1} \Delta_k^j \quad \text{quindi} \quad \lim_{k\to\infty, k\in K} y_k^i = \bar{x}.$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dalla definizione dell'algoritmo segue che uno dei seguenti casi si presenta:

(1) $\Delta_k^i = 0$, $f(y_k^i \pm \tilde{\Delta}_k^i e_i) > f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2$;

(2) $\Delta_k^i > 0$,

$$\begin{array}{llcl} (a) & f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2 \\ (b) & f(y_k^i - 2\Delta_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(2\Delta_k^i)^2; \end{array}$$

(3) $\Delta_k^i > 0$,

$$\begin{array}{llcl} (a) & f(y_k^i + 2\Delta_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(2\Delta_k^i)^2 \\ (b) & f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i) & \leq & f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2 \end{array}$$

Nel caso (3.b), poniamo $\tilde{y}_k^i = y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i$, così possiamo scrivere

$$f(\tilde{y}_k^i - \tilde{\Delta}_k^i e_i) \geq f(\tilde{y}_k^i) - \gamma(-(\tilde{\Delta}_k^i)^2)$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dalla definizione dell'algoritmo segue che uno dei seguenti casi si presenta:

(1) $\Delta_k^i = 0$, $f(y_k^i \pm \tilde{\Delta}_k^i e_i) > f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2$;

(2) $\Delta_k^i > 0$,

$$\begin{array}{rrcl} (a) & f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2 \\ (b) & f(y_k^i - 2\Delta_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(2\Delta_k^i)^2; \end{array}$$

(3) $\Delta_k^i > 0$,

$$\begin{array}{rrcl} (a) & f(y_k^i + 2\Delta_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(2\Delta_k^i)^2 \\ (b) & f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i) & \leq & f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2 \end{array}$$

Nel caso (3.b), poniamo $\tilde{y}_k^i = y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i$, così possiamo scrivere

$$f(\tilde{y}_k^i - \tilde{\Delta}_k^i e_i) \geq f(\tilde{y}_k^i) - \gamma(-(\tilde{\Delta}_k^i)^2)$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dalla definizione dell'algoritmo segue che uno dei seguenti casi si presenta:

(1) $\Delta_k^i = 0,\ f(y_k^i \pm \tilde{\Delta}_k^i e_i) > f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2$;

(2) $\Delta_k^i > 0$,

$$\begin{array}{clcl} (a) & f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2 \\ (b) & f(y_k^i - 2\Delta_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(2\Delta_k^i)^2; \end{array}$$

(3) $\Delta_k^i > 0$,

$$\begin{array}{clcl} (a) & f(y_k^i + 2\Delta_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(2\Delta_k^i)^2 \\ (b) & f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i) & \leq & f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2 \end{array}$$

Nel caso (3.b), poniamo $\tilde{y}_k^i = y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i$, così possiamo scrivere

$$f(\tilde{y}_k^i - \tilde{\Delta}_k^i e_i) \geq f(\tilde{y}_k^i) - \gamma(-(\tilde{\Delta}_k^i)^2)$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Dalla definizione dell'algoritmo segue che uno dei seguenti casi si presenta:

(1) $\Delta_k^i = 0$, $f(y_k^i \pm \tilde{\Delta}_k^i e_i) > f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2$;

(2) $\Delta_k^i > 0$,

$$\begin{array}{lrcl} (a) & f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2 \\ (b) & f(y_k^i - 2\Delta_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(2\Delta_k^i)^2; \end{array}$$

(3) $\Delta_k^i > 0$,

$$\begin{array}{lrcl} (a) & f(y_k^i + 2\Delta_k^i e_i) & > & f(y_k^i) - \gamma(2\Delta_k^i)^2 \\ (b) & f(y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i) & \leq & f(y_k^i) - \gamma(\tilde{\Delta}_k^i)^2 \end{array}$$

Nel caso (3.b), poniamo $\tilde{y}_k^i = y_k^i + \tilde{\Delta}_k^i e_i$, così possiamo scrivere

$$f(\tilde{y}_k^i - \tilde{\Delta}_k^i e_i) \geq f(\tilde{y}_k^i) - \gamma(-(\tilde{\Delta}_k^i)^2)$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Poniamo

(1) $z_k^i = y_k^i$, $\xi_k^i = \tilde{\Delta}_k^i$;

(2) $z_k^i = y_k^i$,

$$\xi_k^i = \begin{cases} \tilde{\Delta}_k^i & \text{caso (a)} \\ 2\Delta_k^i & \text{caso (b)} \end{cases}$$

(3)

$$z_k^i = \begin{cases} y_k^i & \text{caso (a)} \\ \tilde{y}_k^i & \text{caso (b)} \end{cases} \quad \xi_k^i = \begin{cases} 2\Delta_k^i & \text{caso (a)} \\ \tilde{\Delta}_k^i & \text{caso (b)} \end{cases}$$

E quindi,

$$f(z_k^i \pm \xi_k^i e_i) > f(z_k^i) - \gamma a(\xi_k^i)^2$$

con $z_k^i \to \bar{x}$, $\xi_k^i \to 0$ e $a = 1$ tranne che nel caso (3.b) in cui $a = -1$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Poniamo

(1) $z_k^i = y_k^i$, $\xi_k^i = \tilde{\Delta}_k^i$;

(2) $z_k^i = y_k^i$,

$$\xi_k^i = \begin{cases} \tilde{\Delta}_k^i & \text{caso (a)} \\ 2\Delta_k^i & \text{caso (b)} \end{cases}$$

(3)

$$z_k^i = \begin{cases} y_k^i & \text{caso (a)} \\ \tilde{y}_k^i & \text{caso (b)} \end{cases} \quad \xi_k^i = \begin{cases} 2\Delta_k^i & \text{caso (a)} \\ \tilde{\Delta}_k^i & \text{caso (b)} \end{cases}$$

E quindi,

$$f(z_k^i \pm \xi_k^i e_i) > f(z_k^i) - \gamma a(\xi_k^i)^2$$

con $z_k^i \to \bar{x}$, $\xi_k^i \to 0$ e $a = 1$ tranne che nel caso (3.b) in cui $a = -1$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

$$f(z_k^i + \xi_k^i e_i) > f(z_k^i) - \gamma a(\xi_k^i)^2$$
$$f(z_k^i - \xi_k^i e_i) > f(z_k^i) - \gamma a(\xi_k^i)^2$$

Applicando il Teorema della media, risulta

$$\nabla f(u_k^i)^\top e_i > -\gamma a(\xi_k^i)$$
$$\nabla f(v_k^i)^\top (-e_i) > -\gamma a(\xi_k^i)$$

con $u_k^i = z_k^i + t\xi_k^i e_i$, $v_k^i = z_k^i - s\xi_k^i e_i$, $t, s \in (0, 1)$.
Prendendo il limite per $k \to \infty, k \in K$, otteniamo

$$\nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0$$
$$\nabla f(\bar{x})^\top (-e_i) \geq 0$$

da cui segue che $\bar{x}$ è un punto stazionario di f. $\square$

Convergenza a punti stazionari (segue)

$$f(z_k^i + \xi_k^i e_i) > f(z_k^i) - \gamma a(\xi_k^i)^2$$
$$f(z_k^i - \xi_k^i e_i) > f(z_k^i) - \gamma a(\xi_k^i)^2$$

Applicando il Teorema della media, risulta

$$\nabla f(u_k^i)^\top e_i > -\gamma a(\xi_k^i)$$
$$\nabla f(v_k^i)^\top (-e_i) > -\gamma a(\xi_k^i)$$

con $u_k^i = z_k^i + t\xi_k^i e_i$, $v_k^i = z_k^i - s\xi_k^i e_i$, $t, s \in (0, 1)$.
Prendendo il limite per $k \to \infty, k \in K$, otteniamo

$$\nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0$$
$$\nabla f(\bar{x})^\top (-e_i) \geq 0$$

da cui segue che $\bar{x}$ è un punto stazionario di f. $\square$

Convergenza a punti stazionari (segue)

$$f(z_k^i + \xi_k^i e_i) > f(z_k^i) - \gamma a(\xi_k^i)^2$$
$$f(z_k^i - \xi_k^i e_i) > f(z_k^i) - \gamma a(\xi_k^i)^2$$

Applicando il Teorema della media, risulta

$$\nabla f(u_k^i)^\top e_i > -\gamma a(\xi_k^i)$$
$$\nabla f(v_k^i)^\top (-e_i) > -\gamma a(\xi_k^i)$$

con $u_k^i = z_k^i + t\xi_k^i e_i$, $v_k^i = z_k^i - s\xi_k^i e_i$, $t, s \in (0, 1)$.
Prendendo il limite per $k \to \infty, k \in K$, otteniamo

$$\nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0$$
$$\nabla f(\bar{x})^\top (-e_i) \geq 0$$

da cui segue che $\bar{x}$ è un punto stazionario di f. $\square$

Definizione del problema

Consideriamo il problema

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione (minimo globale)

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale di f su $\mathcal{F}$ quando

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}.$$

Definizione (minimo globale stretto)

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale stretto di f su $\mathcal{F}$ quando

$$f(x^*) < f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, x \neq x^*.$$

Definizione del problema

Consideriamo il problema

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione (minimo globale)

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale di f su $\mathcal{F}$ quando

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}.$$

Definizione (minimo globale stretto)

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale stretto di f su $\mathcal{F}$ quando

$$f(x^*) < f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, x \neq x^*.$$

Definizione del problema

Consideriamo il problema

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

con $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definizione (minimo globale)

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale di f su $\mathcal{F}$ quando

$$f(x^*) \leq f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}.$$

Definizione (minimo globale stretto)

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è un minimo globale stretto di f su $\mathcal{F}$ quando

$$f(x^*) < f(x), \qquad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, x \neq x^*.$$

Esistenza della soluzione

Attenzione:

- l'insieme $\mathcal{F}$ potrebbe essere vuoto;
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ma $\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\infty$;
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) > -\infty$, tuttavia potrebbe comunque non esistere un minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

Esistenza della soluzione

Attenzione:

- l'insieme $\mathcal{F}$ potrebbe essere vuoto;
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ma $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) = -\infty$;
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\inf_{x\in\mathcal{F}} f(x) > -\infty$, tuttavia potrebbe comunque non esistere un minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

Esistenza della soluzione

Attenzione:

- l'insieme $\mathcal{F}$ potrebbe essere vuoto;
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ ma $\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\infty$;
- $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) > -\infty$, tuttavia potrebbe comunque non esistere un minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

Esistenza della soluzione

Proposizione (Teorema di Weierstrass)

Sia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e compatto. Se f è continua su $\mathcal{F}$, allora esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

Proposizione

Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ e f un funzione continua su $\mathcal{F}$. Se esiste un insieme di livello di f su $\mathcal{F}$ che è non vuoto e compatto, allora esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

Esistenza della soluzione

Proposizione (Teorema di Weierstrass)

Sia $\mathcal{F} \neq \emptyset$ e compatto. Se f è continua su $\mathcal{F}$, allora esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

Proposizione

Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ e f un funzione continua su $\mathcal{F}$. Se esiste un insieme di livello di f su $\mathcal{F}$ che è non vuoto e compatto, allora esiste un punto di minimo globale di f su $\mathcal{F}$.

Esistenza della soluzione

Proposizione

Sia $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^n$ e f un funzione continua su $\mathcal{F}$. Condizione necessaria e sufficiente affinché tutti gli insiemi di livello di f su $\mathcal{F}$ siano compatti è che valgano contemporaneamente:

(i) *se* $\{x_k\}$ *t.c.* $x_k \in \mathcal{F}$ e $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$, *allora*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty;$$

(ii) *se* $\{x_k\}$ *t.c.* $x_k \in \mathcal{F}$ e $\lim_{k\to\infty} x_k = \tilde{x} \notin \mathcal{F}$, *allora*

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty;$$

Esistenza della soluzione

Proposizione

Sia f una funzione continua su $\mathbb{R}^n$ e si assuma che f sia "coerciva" su $\mathbb{R}^n$, ovvero

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty$$

per ogni succ. $\{x_k\}$ tale che $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Allora si ha:

- *tutti gli insiemi di livello di f sono compatti;*
- *esiste un minimo globale di f su $\mathbb{R}^n$.*

Esistenza della soluzione

Proposizione

Sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme limitato e aperto di $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si assuma che

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \infty$$

per ogni succ. $\{x_k\}$, con $x_k \in \mathcal{F}$, tale che $\lim_{k\to\infty} x_k = \hat{x} \in \partial\mathcal{F}$. Allora si ha:

- *tutti gli insiemi di livello di f sono compatti;*
- *esiste un minimo globale di f su $\mathcal{F}$;*

Una proprietà interessante

Alcuni metodi di ottimizzazione locale godono della seguente

Proprietà (Attrazione dei minimi globali)

Sia $\{x_k\}$ la succ. di punti prodotti da un metodo di ottimizzazione locale e x^* un minimo globale di f su $\mathbb{R}^n$. Allora, esiste un $\epsilon > 0$ tale che, se per un indice $\bar{k}$ si ha $x_{\bar{k}} \in B(x^*; \epsilon)$ allora:

- $x_k \in B(x^*; \epsilon)$ *per ogni* $k \geq \bar{k}$;
- $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Se $f \in C^2$ e nel minimo globale x^* risulta $\nabla^2 f(x^*)$ definita positiva, allora

- la maggior parte dei metodi senza derivate;
- la maggior parte delle modifiche glob. convergenti del metodo di Newton

godono della Prop. 1

Una proprietà interessante

Alcuni metodi di ottimizzazione locale godono della seguente

Proprietà (Attrazione dei minimi globali)

Sia $\{x_k\}$ la succ. di punti prodotti da un metodo di ottimizzazione locale e x^* un minimo globale di f su $\mathbb{R}^n$. Allora, esiste un $\epsilon > 0$ tale che, se per un indice $\bar{k}$ si ha $x_{\bar{k}} \in B(x^*; \epsilon)$ allora:

- $x_k \in B(x^*; \epsilon)$ *per ogni* $k \geq \bar{k}$;
- $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Se $f \in C^2$ e nel minimo globale x^* risulta $\nabla^2 f(x^*)$ definita positiva, allora

- la maggior parte dei metodi senza derivate;
- la maggior parte delle modifiche glob. convergenti del metodo di Newton

godono della Prop. 1

Una proprietà interessante

Alcuni metodi di ottimizzazione locale godono della seguente

Proprietà (Attrazione dei minimi globali)

Sia $\{x_k\}$ *la succ. di punti prodotti da un metodo di ottimizzazione locale e* x^* *un minimo globale di* f *su* $\mathbb{R}^n$*. Allora, esiste un* $\epsilon > 0$ *tale che, se per un indice* $\bar{k}$ *si ha* $x_{\bar{k}} \in B(x^*;\epsilon)$ *allora:*

- $x_k \in B(x^*;\epsilon)$ *per ogni* $k \geq \bar{k}$*;*
- $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.

Se $f \in C^2$ e nel minimo globale x^* risulta $\nabla^2 f(x^*)$ definita positiva, allora

- la maggior parte dei metodi senza derivate;
- la maggior parte delle modifiche glob. convergenti del metodo di Newton

godono della Prop. 1

Una proprietà interessante

Alcuni metodi di ottimizzazione locale godono della seguente

Proprietà (Attrazione dei minimi globali)

Sia $\{x_k\}$ la succ. di punti prodotti da un metodo di ottimizzazione locale e x^* un minimo globale di f su $\mathbb{R}^n$. Allora, esiste un $\epsilon > 0$ tale che, se per un indice $\bar{k}$ si ha $x_{\bar{k}} \in B(x^*;\epsilon)$ allora:

- *$x_k \in B(x^*;\epsilon)$ per ogni $k \geq \bar{k}$;*
- *$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$.*

Se $f \in C^2$ e nel minimo globale x^* risulta $\nabla^2 f(x^*)$ definita positiva, allora

- la maggior parte dei metodi senza derivate;
- la maggior parte delle modifiche glob. convergenti del metodo di Newton

godono della Prop. 1

Classificazione

La maggior parte dei metodi di ottimizzazione globale considera il problema

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$$

con $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ sottoinsieme compatto e non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

La totalità dei metodi di ottimizzazione globale rientra in una delle seguenti due categorie:

- metodi probabilistici;
- metodi deterministici.

Classificazione

La maggior parte dei metodi di ottimizzazione globale considera il problema

$$\min_{x \in \mathcal{D}} f(x)$$

con $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ sottoinsieme compatto e non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

La totalità dei metodi di ottimizzazione globale rientra in una delle seguenti due categorie:

- metodi probabilistici;
- metodi deterministici.