Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi[1]

Mercoledì 29 Novembre 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Shubert-Mladineo

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \ x \in \mathcal{D}$$

Un metodo per problemi con $n = 1$ e funzione obiettivo Lipschitz continua modulo L.

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \ a \leq x \leq b$$

Richiede la conoscenza di una *sovrastima* $\tilde{L} \geq L$

Shubert-Mladineo

$$\min \; f(x)$$
$$s.t. \; x \in \mathcal{D}$$

Un metodo per problemi con $n = 1$ e funzione obiettivo Lipschitz continua modulo L.

$$\min \; f(x)$$
$$s.t. \; a \le x \le b$$

Richiede la conoscenza di una *sovrastima* $\tilde{L} \ge L$

Shubert-Mladineo

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &s.t. \ x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Un metodo per problemi con $n = 1$ e funzione obiettivo Lipschitz continua modulo L.

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &s.t. \ a \leq x \leq b \end{aligned}$$

Richiede la conoscenza di una *sovrastima* $\tilde{L} \geq L$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima $\tilde{L}$ di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), & x \geq \tilde{x} \\ f(x) &\geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), & x < \tilde{x} \end{aligned}$$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima $\tilde{L}$ di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), & x \geq \tilde{x} \\ f(x) &\geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), & x < \tilde{x} \end{aligned}$$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima $\tilde{L}$ di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), & x \geq \tilde{x} \\ f(x) &\geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), & x < \tilde{x} \end{aligned}$$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima $\tilde{L}$ di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$\begin{array}{rcll} f(x) & \geq & f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), & \qquad x \geq \tilde{x} \\ f(x) & \geq & f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), & \qquad x < \tilde{x} \end{array}$$

L'idea

Pertanto, il minimo globale del problema

$$\begin{array}{l} \min \;\; f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}| \\ s.t. \; a \le x \le b \end{array}$$

è una **sottostima** del minimo globale di f. Cioè, se indichiamo

$$\ell(x) = f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

e con $\tilde{x}^*$ il punto di minimo globale di $\ell(x)$, risulta:

$$f(x^*) \ge \ell(\tilde{x}^*)$$

L'idea

Pertanto, il minimo globale del problema

$$\begin{array}{l} \min \ f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}| \\ s.t. \ a \leq x \leq b \end{array}$$

è una **sottostima** del minimo globale di f. Cioè, se indichiamo

$$\ell(x) = f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

e con $\tilde{x}^*$ il punto di minimo globale di $\ell(x)$, risulta:

$$f(x^*) \geq \ell(\tilde{x}^*)$$

Andiamo oltre

Se abbiamo 2 punti $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$, risulterà

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\tilde{x}_1) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_1| \\ f(x) &\geq f(\tilde{x}_2) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_2| \end{aligned}$$

cioè

$$f(x) \geq \ell(x) = \max\{f(\tilde{x}_1) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_1|, f(\tilde{x}_2) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_2|\}$$

Se abbiamo k punti $\tilde{x}_i$,

$$f(x) \geq \ell(x) = \max_{i=1,\dots,k}\{f(\tilde{x}_i) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_i|\}$$

Andiamo oltre

Se abbiamo 2 punti $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$, risulterà

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\tilde{x}_1) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_1| \\ f(x) &\geq f(\tilde{x}_2) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_2| \end{aligned}$$

cioè

$$f(x) \geq \ell(x) = \max\{f(\tilde{x}_1) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_1|, f(\tilde{x}_2) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_2|\}$$

Se abbiamo k punti $\tilde{x}_i$,

$$f(x) \geq \ell(x) = \max_{i=1,\dots,k} \{f(\tilde{x}_i) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_i|\}$$

Andiamo oltre

Se abbiamo 2 punti $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$, risulterà

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\tilde{x}_1) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_1| \\ f(x) &\geq f(\tilde{x}_2) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_2| \end{aligned}$$

cioè

$$f(x) \geq \ell(x) = \max\{f(\tilde{x}_1) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_1|, f(\tilde{x}_2) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_2|\}$$

Se abbiamo k punti $\tilde{x}_i$,

$$f(x) \geq \ell(x) = \max_{i=1,\dots,k}\{f(\tilde{x}_i) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_i|\}$$

Andiamo oltre

Pertanto, il minimo globale del problema

$$\begin{array}{l} \min \ \ell(x) \\ s.t.\ a \leq x \leq b \end{array}$$

è una **sottostima** del minimo globale di f. Cioè, se indichiamo con $\tilde{x}^*$ il punto di minimo globale di $\ell(x)$, risulta:

$$f(x^*) \geq \ell(\tilde{x}^*)$$

Andiamo oltre

Pertanto, il minimo globale del problema

$$\begin{array}{l} \min \ \ell(x) \\ s.t. \ a \leq x \leq b \end{array}$$

è una **sottostima** del minimo globale di f. Cioè, se indichiamo con $\tilde{x}^*$ il punto di minimo globale di $\ell(x)$, risulta:

$$f(x^*) \geq \ell(\tilde{x}^*)$$

Il metodo di Schubert-Mladineo

INPUT: `maxit`, `tol`> 0

$X_0 \leftarrow \{a, b\}$, $k \leftarrow 0$

for $k = 0, 1, \ldots,$`maxit`

Determina x_k^* minimo globale di $\ell_k(x)$ in $[a, b]$ con

$$\ell_k(x) = \max_{x_i \in X_k} \{f(x_i) - \tilde{L}|x - x_i|\}$$

if $f(x_k^*) - \ell_k(x_k^*) \leq$`tol` **then break**
Poni $X_{k+1} \leftarrow X_k \cup \{x_k^*\}$
$k \leftarrow k + 1$

end