

Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi¹

Mercoledì 29 Novembre 2017

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Shubert-Mladineo

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Un metodo per problemi con $n = 1$ e funzione obiettivo Lipschitz continua modulo L .

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } a \leq x \leq b \end{aligned}$$

Richiede la conoscenza di una *sovrastima* $\tilde{L} \geq L$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima \tilde{L} di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \quad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), \quad x \geq \tilde{x}$$

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), \quad x < \tilde{x}$$

L'idea

Pertanto, il minimo globale del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}| \\ \text{s.t.} \quad & a \leq x \leq b \end{aligned}$$

è una **sottostima** del minimo globale di f . Cioè, se indichiamo

$$\ell(x) = f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

e con \tilde{x}^* il punto di minimo globale di $\ell(x)$, risulta:

$$f(x^*) \geq \ell(\tilde{x}^*)$$

Andiamo oltre

Se abbiamo 2 punti \tilde{x}_1 e \tilde{x}_2 , risulterà

$$f(x) \geq f(\tilde{x}_1) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_1|$$

$$f(x) \geq f(\tilde{x}_2) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_2|$$

cioè

$$f(x) \geq \ell(x) = \max\{f(\tilde{x}_1) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_1|, f(\tilde{x}_2) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_2|\}$$

Se abbiamo k punti \tilde{x}_i ,

$$f(x) \geq \ell(x) = \max_{i=1, \dots, k} \{f(\tilde{x}_i) - \tilde{L}|x - \tilde{x}_i|\}$$

Andiamo oltre

Pertanto, il minimo globale del problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \ell(x) \\ \text{s.t.} \quad & a \leq x \leq b \end{aligned}$$

è una **sottostima** del minimo globale di f . Cioè, se indichiamo con \tilde{x}^* il punto di minimo globale di $\ell(x)$, risulta:

$$f(x^*) \geq \ell(\tilde{x}^*)$$

Il metodo di Schubert-Mladineo

INPUT: $\text{maxit}, \text{tol} > 0$

$X_0 \leftarrow \{a, b\}, k \leftarrow 0$

for $k = 0, 1, \dots, \text{maxit}$

Determina x_k^* minimo globale di $\ell_k(x)$ in $[a, b]$ con

$$\ell_k(x) = \max_{x_i \in X_k} \{f(x_i) - \tilde{L}|x - x_i|\}$$

if $f(x_k^*) - \ell_k(x_k^*) \leq \text{tol}$ **then break**

Poni $X_{k+1} \leftarrow X_k \cup \{x_k^*\}$

$k \leftarrow k + 1$

end