Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi[1]

Giovedì 30 Novembre 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Il metodo di Schubert-Mladineo

INPUT: `maxit`, `tol` > 0

$X_0 \leftarrow \{a, b\}$, $k \leftarrow 0$

for $k = 0, 1, \dots,$`maxit`

Determina x_k^* minimo globale di $\ell_k(x)$ in $[a, b]$ con

$$\ell_k(x) = \max_{x_i \in X_k} \{f(x_i) - \tilde{L}|x - x_i|\}$$

if $f(x_k^*) - \ell_k(x_k^*) \leq$`tol` **then break**

Poni $X_{k+1} \leftarrow X_k \cup \{x_k^*\}$

$k \leftarrow k + 1$

end

Verso l'estensione per $n > 1$

Per estendere il metodo di Schubert-Mladineo al caso $n > 1$ il primo passo è quello di interpretare il metodo come un metodo che produce una "sequenza di partizioni" dell'insieme ammissibile $\mathcal{D}$

- passo 0, $\mathcal{H}_0 = \{\mathcal{D}_0^1\} = \{\mathcal{D}\}$, $\ell_0^1(x)$
- passo 1, $\mathcal{H}_1 = \{\mathcal{D}_1^1, \mathcal{D}_1^2\}$, $\ell_1^1(x), \ell_1^2(x)$
- passo 2, $\mathcal{H}_2 = \{\mathcal{D}_2^1, \mathcal{D}_2^2, \mathcal{D}_2^3\}$, $\ell_2^1(x), \ell_2^2(x), \ell_2^3(x)$
- $\vdots$
- passo k, $\mathcal{H}_k = \{\mathcal{D}_k^i, i \in I_k\}$, $\ell_k^i(x)$, $i \in I_k$

Verso l'estensione per $n > 1$

Data la partizione corrente $\mathcal{H}_k$

- Associa ad ogni $\mathcal{D}_k^i$, $i \in I_k$ il numero

$$R_k^i = \min_{x \in \mathcal{D}^i} \ell_k^i(x)$$

essendo $\mathcal{D}_k^i = \{x : \ a^i \leq x \leq b^i\}$

$$\ell_k^i(x) = \max\{f(a^i) - \tilde{L}\|x - a^i\|, f(b^i) - \tilde{L}\|x - b^i\|\}$$

- Partiziona ulteriormente l'insieme $\mathcal{D}^i$ a cui corrisponde il numero R_k^i più basso

Il metodo di Schubert-Mladineo rivisto

INPUT: `maxit`, `tol`> 0

$\mathcal{H}_0 \leftarrow \{\mathcal{D}\} = \{\{x : a \leq x \leq b\}\}$, $k \leftarrow 0$

for $k = 0, 1, \ldots,$`maxit`

Per ogni $\mathcal{D}_k^i \in \mathcal{H}_k$ calcola

$$\begin{aligned} R_k^i &= \min_{x \in \mathcal{D}_k^i} \ell_k^i(x) \\ \ell_k^i(x) &= \max\{f(a^i) - \tilde{L}|x - a^i|, f(b^i) - \tilde{L}|x - b^i|\} \\ x_k^i &= \frac{a^i + b^i}{2} + \frac{f(a^i) - f(b^i)}{2\tilde{L}} \end{aligned}$$

Determina i^* tale che $R_k^{i^*} \leq R_k^i$

if $f(x_k^{i^*}) - R_k^{i^*} \leq$`tol` **then break**

Poni $\mathcal{H}_{k+1} \leftarrow \mathcal{H}_k \setminus \{D^{i^*}\} \cup \{\mathcal{D}_j^{i^*}, j = 1, \ldots, 2^n\}$

$k \leftarrow k + 1$

end

Il metodo diagonale ($n \geq 1$)

Quando $n > 1$ il passo

Per ogni $\mathcal{D}_k^i \in \mathcal{H}_k$ calcola

$$
\begin{aligned}
R_k^i &= \min_{x \in \mathcal{D}_k^i} \ell_k^i(x) \\
\ell_k^i(x) &= \max\{f(a^i) - \tilde{L}|x - a^i|, f(b^i) - \tilde{L}|x - b^i|\} \\
x_k^i &= \frac{a^i + b^i}{2} + \frac{f(a^i) - f(b^i)}{2\tilde{L}}
\end{aligned}
$$

è troppo costoso. Invece che richiedere la minimizzazione di $\ell_k^i(x)$ su tutto $\mathcal{D}_k^i$, si considerano solo i punti sul segmento che congiunge a^i e b^i cioè

Il metodo diagonale ($n \geq 1$)

$$x(\alpha) = \alpha b^i + (1 - \alpha)a^i$$

Quindi

$$f(x(\alpha)) \geq \ell_k^i(x(\alpha)) = \max\{f(b^i) - \tilde{L}\|x(\alpha) - b^i\|, f(a^i) - \tilde{L}\|x(\alpha) - a^i\|\}$$

Il valore α_k^i che minimizza $\ell_k^i(x(\alpha))$ su $[0, 1]$ è

$$\begin{aligned} \alpha_k^i &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f(a^i) - f(b^i)}{\tilde{L}\|a^i - b^i\|}\right) \\ R_k^i &= \ell_k^i(x(\alpha_k^i)) \end{aligned}$$

Partizionamento

Sia $\mathcal{D}^h \in \mathcal{H}_k$ l'insieme a cui corrisponde il valore R_k^h più basso

La nuova partizione H_{k+1} è quella che si ottiene da $\mathcal{H}_k$ sostituendo $\mathcal{D}^h$ con la sua partizione $\{\mathcal{D}^{h_j},\ j = 1, \dots, 2^n\}$ dove,

$$\mathcal{D}^{h_j} = \{x : \ a^{h_j} \leq x \leq b^{h_j}\}$$

e, per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha:

$$(a^{h_j})_i = (a^h)_i \text{ e } (b^{h_j})_i = (x_k^h)_i \text{ oppure}$$
$$(a^{h_j})_i = (x_k^h)_i \text{ e } (b^{h_j})_i = (b^h)_i$$

Partizionamento