

Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi¹

Giovedì 7 Dicembre 2017

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Definizione del problema

Il metodo DIRECT considera il problema

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1} \end{aligned} \tag{1}$$

per cui $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}\}$

Nota: qualunque problema

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } \ell \leq x \leq u \end{aligned}$$

con $-\infty < \ell_i < u_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$, può essere riportato nella forma del problema (1)

Definizione del problema

Il metodo DIRECT considera il problema

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1} \end{aligned} \quad (1)$$

per cui $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{0} \leq x \leq \mathbf{1}\}$

Nota: qualunque problema

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ \text{s.t. } \ell \leq x \leq u \end{aligned}$$

con $-\infty < \ell_i < u_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$, può essere riportato nella forma del problema (1)

Un metodo di partizionamento

DIRECT produce, iterazione dopo iterazione, partizioni sempre più fini dell'insieme ammissibile iniziale \mathcal{D} .

Se $\mathcal{H}_k = \{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$ è la partizione all'inizio della iterazione k

la partizione all'inizio della iterazione $k + 1$ sarà

$\mathcal{H}_{k+1} = \{\mathcal{D}^i : i \in I_{k+1}\}$ con

$$|\mathcal{H}_{k+1}| > |\mathcal{H}_k|$$

Schema generale di DIRECT

Set $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$, $\mathcal{H}_0 = \{D^0\}$, $I_0 = \{0\}$, $c = \mathbf{1}/2$, $k = 0$

repeat

Usa una procedura di selezione per determinare $I_k^* \subseteq I_k$

Usa una procedura di partizione per dividere \mathcal{D}^i , $i \in I_k^*$

Definisci la nuova partizione \mathcal{H}_{k+1}

Set $k = k + 1$

until (stopping criterion satisfied)

return $f_{min} = \min\{f(c) : c \in C_k\}$, $X_{min} = \{c \in C_k : f(c) = f_{min}\}$,
with $C_k = \{\text{centri degli insiemi in } \mathcal{H}_k\}$

Procedura di selezione

Definizione

Data la partizione $\{\mathcal{D}^i : i \in I\}$ con $\mathcal{D}^i = \{x : l_i \leq x \leq u_i\}$ e $x^i = \frac{u_i+l_i}{2}$. \mathcal{D}^h è **potenzialmente ottimo** se, scelto un $\epsilon > 0$, esiste una costante $L^h > 0$ tale che

$$f(x^h) - L^h \frac{\|u^h - l^h\|}{2} \leq f(x^i) - L^h \frac{\|u^i - l^i\|}{2}, \quad \forall i \in I$$

$$f(x^h) - L^h \frac{\|u^h - l^h\|}{2} \leq f_{min} - \epsilon |f_{min}|$$

$$I_k^* = \{i \in I_k : \mathcal{D}^i \text{ è potenzialmente ottimo}\}$$

Procedura di selezione

Definizione

Data la partizione $\{\mathcal{D}^i : i \in I\}$ con $\mathcal{D}^i = \{x : l_i \leq x \leq u_i\}$ e $x^i = \frac{u_i+l_i}{2}$. \mathcal{D}^h è **potenzialmente ottimo** se, scelto un $\epsilon > 0$, esiste una costante $L^h > 0$ tale che

$$f(x^h) - L^h \frac{\|u^h - l^h\|}{2} \leq f(x^i) - L^h \frac{\|u^i - l^i\|}{2}, \quad \forall i \in I$$

$$f(x^h) - L^h \frac{\|u^h - l^h\|}{2} \leq f_{min} - \epsilon |f_{min}|$$

$$I_k^* = \{i \in I_k : \mathcal{D}^i \text{ è potenzialmente ottimo}\}$$

Procedura di partizione

Supponiamo che $h \in I_k^*$ e cioè che si debba ulteriormente partizionare \mathcal{D}^h . Siano

$$\delta = \max_{1 \leq j \leq n} (u^h - \ell^h)_j,$$

$$J = \{j \in \{1, \dots, n\} : (u^h - \ell^h)_j = \delta\},$$

$$m = |J|$$

Per ogni $j \in J$, si valuta la funzione obiettivo sui punti

$$c^{hj} = c^h + \frac{\delta}{3}e_j, \quad c^{h_{j+m}} = c^h - \frac{\delta}{3}e_j,$$

Procedura di partizione

Supponiamo che $h \in I_k^*$ e cioè che si debba ulteriormente partizionare \mathcal{D}^h . Siano

$$\delta = \max_{1 \leq j \leq n} (u^h - \ell^h)_j,$$

$$J = \{j \in \{1, \dots, n\} : (u^h - \ell^h)_j = \delta\},$$

$$m = |J|$$

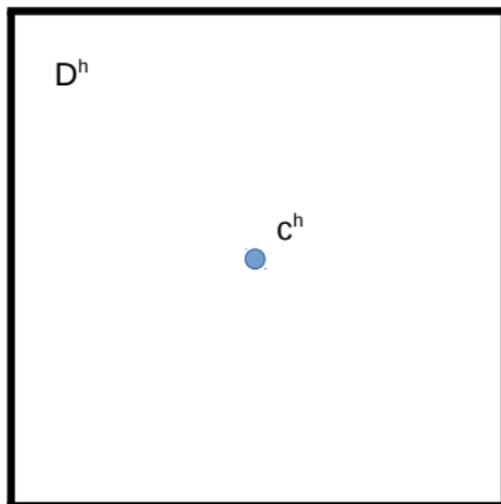
Per ogni $j \in J$, si valuta la funzione obiettivo sui punti

$$c^{h_j} = c^h + \frac{\delta}{3}e_j, \quad c^{h_{j+m}} = c^h - \frac{\delta}{3}e_j,$$

Procedura di partizione

L'insieme \mathcal{D}^h viene partizionato in $2m + 1$ sottoinsiemi tali che:

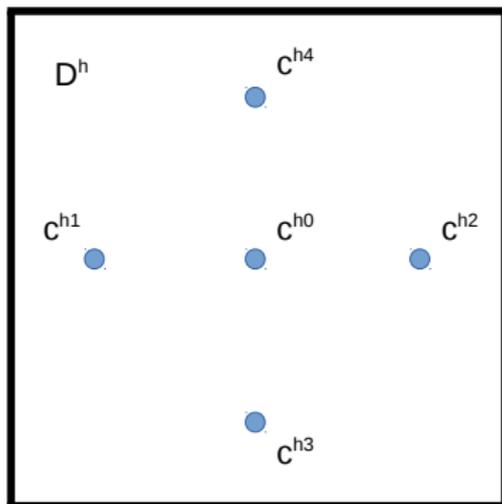
- hanno i punti $c^h, c^{h_j}, c^{h_{j+m}}, j \in J$, come centri;
- se $m > 1$, si fa in modo che gli insiemi più grandi contengano i punti con il miglior valore di funzione obiettivo



Procedura di partizione

L'insieme \mathcal{D}^h viene partizionato in $2m + 1$ sottoinsiemi tali che:

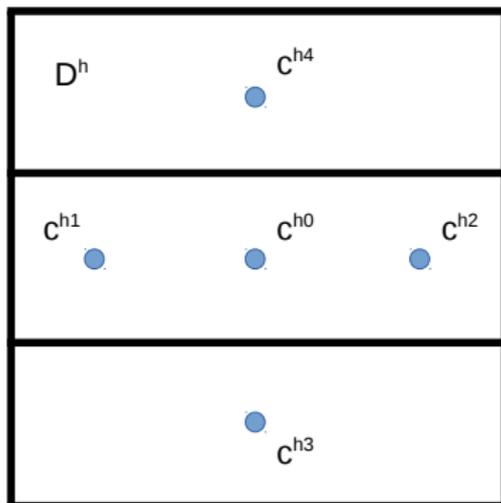
- hanno i punti $c^h, c^{hj}, c^{hj+m}, j \in J$, come centri;
- se $m > 1$, si fa in modo che gli insiemi più grandi contengano i punti con il miglior valore di funzione obiettivo



Procedura di partizione

L'insieme \mathcal{D}^h viene partizionato in $2m + 1$ sottoinsiemi tali che:

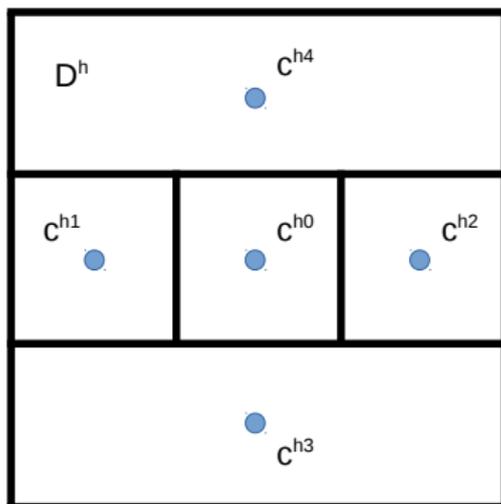
- hanno i punti $c^h, c^{hj}, c^{hj+m}, j \in J$, come centri;
- se $m > 1$, si fa in modo che gli insiemi più grandi contengano i punti con il miglior valore di funzione obiettivo



Procedura di partizione

L'insieme \mathcal{D}^h viene partizionato in $2m + 1$ sottoinsiemi tali che:

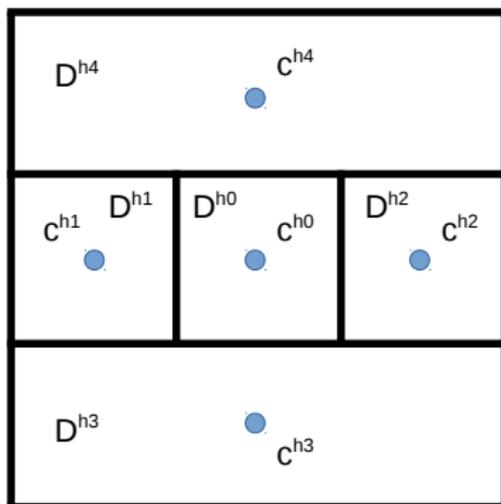
- hanno i punti $c^h, c^{hj}, c^{hj+m}, j \in J$, come centri;
- se $m > 1$, si fa in modo che gli insiemi più grandi contengano i punti con il miglior valore di funzione obiettivo



Procedura di partizione

L'insieme \mathcal{D}^h viene partizionato in $2m + 1$ sottoinsiemi tali che:

- hanno i punti $c^h, c^{h_j}, c^{h_{j+m}}, j \in J$, come centri;
- se $m > 1$, si fa in modo che gli insiemi più grandi contengano i punti con il miglior valore di funzione obiettivo



Esempio (1)

Supponiamo $n = 2$ e sia \mathcal{D}^h l'insieme iniziale \mathcal{D} , cioè l'iperbox unitario.

In questo caso:

$$\delta = \max_{1 \leq j \leq n} (u^h - \ell^h)_j = 1,$$

$$J = \{j \in \{1, \dots, n\} : (u^h - \ell^h)_j = 1\} = \{1, 2\},$$

$$m = |J| = 2$$

Valutiamo la funzione sui punti

$$c^{h_0} = c^h = \{1/2, 1/2\}$$

$$c^{h_1} = c^h + e_1/3 = \{5/6, 1/2\}, \quad c^{h_3} = c^h - e_1/3 = \{1/6, 1/2\}$$

$$c^{h_2} = c^h + e_2/3 = \{1/2, 5/6\}, \quad c^{h_4} = c^h - e_2/3 = \{1/2, 1/6\}$$

Esempio (1)

Supponiamo che risulti

$$f(c^{h_1}) = 3, \quad f(c^{h_3}) = 7$$

$$f(c^{h_2}) = 5, \quad f(c^{h_4}) = 6$$

Disegnare la partizione di \mathcal{D}^h così come determinata dalla procedura di partizione.

Esempio (2)

Supponiamo $n = 2$ e sia \mathcal{D}^h l'insieme

$$\mathcal{D}^h = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1, 1/3 \leq x_2 \leq 2/3\}$$

In questo caso:

$$\delta = \max_{1 \leq j \leq n} (u^h - \ell^h)_j = 1,$$

$$J = \{j \in \{1, \dots, n\} : (u^h - \ell^h)_j = 1\} = \{1\},$$

$$m = |J| = 1$$

Valutiamo la funzione sui punti

$$c^{h_0} = c^h = \{1/2, 1/2\}$$

$$c^{h_1} = c^h + e_1/3 = \{5/6, 1/2\}, \quad c^{h_2} = c^h - e_1/3 = \{1/6, 1/2\}$$

Esempio (2)

Disegnare la partizione di \mathcal{D}^h così come determinata dalla procedura di partizione.

Riferimenti

- 1 F. Schoen, M. Locatelli, "Global Optimization: Theory, Algorithms, and Applications" MOS-SIAM series on Optimization, SIAM Philadelphia
- 2 S. Lucidi, "Appunti dalle lezioni di OTTIMIZZAZIONE GLOBALE"
<http://www.diag.uniroma1.it/~lucidi/didattica/Ott-Glob.html>

Derivative-Free Library (DFL)

`www.iasi.cnr.it/~liuzzi/DFL`

download gratuito di metodi che non usano derivate prime per:

- 1 Ottimizzazione locale
- 2 Ottimizzazione globale
- 3 Ottimizzazione non differenziabile
- 4 Ottimizzazione mista intera
- 5 Ottimizzazione multiobiettivo