

Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi¹

Venerdì 15 Dicembre 2017

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \quad f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0 \quad h: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 \quad g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
 \end{array} \quad (P_0)$$

Sia \mathcal{F} l'insieme ammissibile di (P_0)

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \leq 0
 \end{array}$$

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0 \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 \quad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
 \end{array} \quad (P_0)$$

Sia \mathcal{F} l'insieme ammissibile di (P_0)

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \leq 0
 \end{array}$$

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0 \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 \quad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
 \end{array} \quad (P_0)$$

Sia \mathcal{F} l'insieme ammissibile di (P_0)

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \leq 0
 \end{array}$$

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0 \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 \quad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
 \end{array} \quad (P_0)$$

Sia \mathcal{F} l'insieme ammissibile di (P_0)

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \leq 0
 \end{array}$$

Problemi vincolati

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$

Problemi vincolati

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$

Problemi vincolati

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) = y_i, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) = y_i, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) = y_i, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) = y_i, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

Condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (P)$$

Supponiamo di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)

$$F(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è di discesa per } f \text{ in } x^*\}$$

$$G(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è ammissibile per } \mathcal{F} \text{ in } x^*\}$$

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$$

Condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (P)$$

Supponiamo di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)

$$\begin{aligned} F(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è di discesa per } f \text{ in } x^*\} \\ G(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è ammissibile per } \mathcal{F} \text{ in } x^*\} \end{aligned}$$

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$$

Condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (P)$$

Supponiamo di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)

$$F(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è di discesa per } f \text{ in } x^*\}$$

$$G(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è ammissibile per } \mathcal{F} \text{ in } x^*\}$$

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$$

Condizioni di ottimalità

Se f, g sono continuamente differenziabili, possiamo definire

$$F_0(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x^*)^\top d < 0\}$$

$$G_0(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)^\top d < 0, i \in I_0(x^*)\}$$

per cui risulta: $F_0(x^*) \subseteq F(x^*)$ e $G_0(x^*) \subseteq G(x^*)$ e quindi

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \emptyset$$

cioè è **inammissibile** il sistema lineare di disequazioni

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)^\top d &< 0 \\ \nabla g_i(x^*)^\top d &< 0, \quad i \in I_0(x^*) \end{aligned}$$

Condizioni di ottimalità

Se f, g sono continuamente differenziabili, possiamo definire

$$F_0(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x^*)^\top d < 0\}$$

$$G_0(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)^\top d < 0, i \in I_0(x^*)\}$$

per cui risulta: $F_0(x^*) \subseteq F(x^*)$ e $G_0(x^*) \subseteq G(x^*)$ e quindi

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \emptyset$$

cioè è **inammissibile** il sistema lineare di disequazioni

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)^\top d &< 0 \\ \nabla g_i(x^*)^\top d &< 0, \quad i \in I_0(x^*) \end{aligned}$$

Condizioni di ottimalità

Allora

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esiste un numero $\lambda_0^ \geq 0$ e dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, non tutti nulli, tali che: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, per ogni $i = 1, \dots, m$ e*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

Definizione

Un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ è un punto di FJ quando in \bar{x} risulta $F_0(\bar{x}) \cap G_0(\bar{x}) = \emptyset$.

N.B. sono punti di FJ tutte le $x \in \mathcal{F}$ per cui risulta $G_0(x) = \emptyset$.

Condizioni di ottimalità

Allora

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esiste un numero $\lambda_0^ \geq 0$ e dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, non tutti nulli, tali che: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, per ogni $i = 1, \dots, m$ e*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

Definizione

Un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ è un punto di FJ quando in \bar{x} risulta $F_0(\bar{x}) \cap G_0(\bar{x}) = \emptyset$.

N.B. sono punti di FJ tutte le $x \in \mathcal{F}$ per cui risulta $G_0(x) = \emptyset$.

Condizioni di regolarità

Definizione

Un punto $x \in \mathcal{F}$ è **regolare** se $G_0(x) \neq \emptyset$

Vale la seguente condizione sufficiente di regolarità.

Proposizione

Condizione sufficiente affinché nel punto $x \in \mathcal{F}$ risulti $G_0(x) \neq \emptyset$ è che sia linearmente indipendente l'insieme $\{\nabla g_i(x), i \in I_0(x)\}$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)
- che x^* sia **regolare**

e.g. $\left\{ \nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*) \right\}$ lin. indep.

Allora

Teorema (Karush, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)
- che x^* sia **regolare**

e.g. $\left\{ \nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*) \right\}$ lin. indep.

Allora

Teorema (Karush, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)
- che x^* sia **regolare**

e.g. $\left\{ \nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*) \right\}$ lin. indep.

Allora

Teorema (Karush, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

e.g. $\left\{ \nabla h_j(x^*), j = 1, \dots, p, \nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*) \right\}$ lin. indep.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

e.g. $\left\{ \nabla h_j(x^*), j = 1, \dots, p, \nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*) \right\}$ lin. indep.

Allora

Teorema (Karush, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

e.g. $\left\{ \nabla h_j(x^*), j = 1, \dots, p, \nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*) \right\}$ lin. indep.

Allora

Teorema (Karush, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_2 - x_1^3 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_2 - x_1^3 \leq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_2 - x_1^3 \leq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_2 - x_1^3 \leq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$

Condizioni di ottimalità – prob. convessi

Supponiamo:

- f, g differenziabili e **convesse**
- h **affini**, e.g. $h_j(x) = a^T x - b = 0$

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $x^* \in \mathcal{F}$ e esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \mu_1^*, \dots, \mu_r^*$ tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

allora x^* è un minimo locale (globale) di (P_0)

Condizioni di ottimalità – prob. convessi

Supponiamo:

- f, g differenziabili e **convesse**
- h **affini**, e.g. $h_j(x) = a^\top x - b = 0$

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $x^* \in \mathcal{F}$ e esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, μ_1^*, \dots, μ_r^* tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^r \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

allora x^* è un minimo locale (globale) di (P_0)

Funzione Lagrangiana

Per il problema (P_0) , definiamo la funzione Lagrangiana

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^p \mu_j h_j(x) \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x) \end{aligned}$$

Condizioni di ottimalità

Ci sono condizioni sufficienti di ottimo nel caso **non convesso**?

Supponiamo:

- f, g, h **due volte** continuamente differenziabili
- x^*, λ^*, μ^* soddisfano KKT

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$, per ogni $d \in Y^*$, $d \neq 0$

$$Y^* = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} &\nabla h_j(x^*)^\top d = 0, j = 1, \dots, p \\ &\nabla g_i(x^*)^\top d = 0, i \in I_0(x^*), \lambda_i^* > 0, \\ &\nabla g_i(x^*)^\top d \geq 0, i \in I_0(x^*), \lambda_i^* = 0 \end{aligned} \right\}$$

allora x^ è un minimo locale stretto di (P_0)*

Condizioni di ottimalità

Ci sono condizioni sufficienti di ottimo nel caso **non convesso**?

Supponiamo:

- f, g, h **due volte** continuamente differenziabili
- x^*, λ^*, μ^* soddisfano KKT

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $d^\top \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$, per ogni $d \in Y^*$, $d \neq 0$

$$Y^* = \left\{ d \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} \nabla h_j(x^*)^\top d &= 0, j = 1, \dots, p \\ \nabla g_i(x^*)^\top d &= 0, i \in I_0(x^*), \lambda_i^* > 0, \\ \nabla g_i(x^*)^\top d &\geq 0, i \in I_0(x^*), \lambda_i^* = 0 \end{aligned} \right\}$$

allora x^ è un minimo locale stretto di (P_0)*

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & -0.1(x_1 - 4)^2 + x_2^2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min_x & x_1 + x_2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & -0.1(x_1 - 4)^2 + x_2^2 \\ \text{c.v} & x_1^2 + x_2^2 - 1 \geq 0 \end{array}$$