Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi[1]

Venerdì 15 Dicembre 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{llll} \min\limits_x & f(x) & f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} & \\ c.v & h(x)=0 & h:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p & p \leq n \\ & g(x)\leq 0 & g:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m & \end{array} \qquad (P_0)$$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme ammissibile di (P_0)
Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & h(x)=0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & g(x)\leq 0 \end{array}$$

Problemi vincolati

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & h(x) \le 0 \\ & -h(x) \le 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & g(x) \le 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) + y_i^2 = 0, \; i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & g(x) \le 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) = y_i, \; y_i \le 0, \; i = 1, \dots, m \end{array}$$

Condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad (P)$$

Supponiamo di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)

$$\begin{array}{lcl} F(x^*) & = & \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \text{ è di discesa per } f \text{ in } x^*\} \\ G(x^*) & = & \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \text{ è ammissibile per } \mathcal{F} \text{ in } x^*\} \end{array}$$

Proposizione (C.N. di ottimo)

$F(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$

Condizioni di ottimalità

Se f, g sono continuamente differenziabili, possiamo definire

$$\begin{aligned} F_0(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f(x^*)^\top d < 0\} \\ G_0(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla g_i(x^*)^\top d < 0, i \in I_0(x^*)\} \end{aligned}$$

per cui risulta: $F_0(x^*) \subseteq F(x^*)$ e $G_0(x^*) \subseteq G(x^*)$ e quindi

Proposizione (C.N. di ottimo)

$F_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \emptyset$

cioè è **inammissibile** il sistema lineare di disequazioni

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*)^\top d < 0 \\ &\nabla g_i(x^*)^\top d < 0, \quad i \in I_0(x^*) \end{aligned}$$

Condizioni di ottimalità

Allora

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esiste un numero $\lambda_0^* \geq 0$ *e dei moltiplicatori* $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$, *non tutti nulli, tali che:* $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, *per ogni* $i = 1, \ldots, m$ *e*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

Definizione

Un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ *è un punto di FJ quando in* $\bar{x}$ *risulta* $F_0(\bar{x}) \cap G_0(\bar{x}) = \emptyset$.

N.B. sono punti di FJ tutte le $x \in \mathcal{F}$ per cui risulta $G_0(x) = \emptyset$.

Condizioni di regolarità

Definizione

Un punto $x \in \mathcal{F}$ *è* **regolare** *se* $G_0(x) \neq \emptyset$

Vale la seguente condizione sufficiente di regolarità.

Proposizione

Condizione sufficiente affinché nel punto $x \in \mathcal{F}$ *risulti* $G_0(x) \neq \emptyset$ *è che sia linearmente indipendente l'insieme* $\{\nabla g_i(x), i \in I_0(x)\}$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)
- che x^* sia **regolare**

  e.g. $\left\{\nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*)\right\}$ lin. indip.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ *tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

  e.g. $\left\{\nabla h_j(x^*),\ j = 1, \dots, p,\ \nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*)\right\}$ lin. indip.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ *tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0, \ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Condizioni di ottimalità – prob. convessi

Supponiamo:

- f, g differenziabili e **convesse**
- h **affini**, e.g. $h_j(x) = a^\top x - b = 0$

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $x^* \in \mathcal{F}$ e esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

allora x^* è un minimo locale (globale) di (P_0)

Funzione Lagrangiana

Per il problema (P_0), definiamo la funzione Lagrangiana

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x) \end{aligned}$$

Condizioni di ottimalità

Ci sono condizioni sufficienti di ottimo nel caso **non convesso**?
Supponiamo:

- f, g, h **due volte** continuamente differenziabili
- x^*, λ^*, μ^* soddisfano KKT

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$, *per ogni* $d \in Y^*$, $d \neq 0$

$$
\begin{aligned}
Y^* \quad = \quad \Big\{ d \in \mathbb{R}^n : \nabla h_j(x^*)^\top d = 0, j = 1, \dots, p \\
\nabla g_i(x^*)^\top d = 0,\ i \in I_0(x^*), \lambda_i^* > 0, \\
\nabla g_i(x^*)^\top d \geq 0,\ i \in I_0(x^*), \lambda_i^* = 0 \Big\}
\end{aligned}
$$

allora x^* *è un minimo locale stretto di* (P_0)

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & -0.1(x_1 - 4)^2 + x_2^2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 1 \geq 0 \end{array}$$