Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi[1]

Giovedì 21 Dicembre 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Algoritmo SEQPEN

Algoritmo SEQPEN

INPUT: maxit, $\tau > 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots,$ maxit

Trova una soluzione globale (x^k) del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x). \tag{1}$$

if $q(x^k) \leq \tau$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Algoritmo SEQPEN

L'algoritmo che abbiamo visto:

- ad ogni passo richiede di risolvere all'ottimo **gloable**

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \; P_\epsilon(x);$$

- è (o può essere) **molto costoso**;
- non sempre è possibile;
- gli algoritmi di min. non vincolata determinano $\hat{x}$ t.c.

$$\|\nabla P_\epsilon(\hat{x})\| \le \texttt{tol}.$$

Algoritmo SEQPEN modificato (1)

Algoritmo $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: $\texttt{maxit}$, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots, \texttt{maxit}$

Calcola x^k t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x^k)\| \leq \rho$

if $q(x^k) \leq \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Algoritmo SEQPEN modificato (1)

Algoritmo $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: $\texttt{maxit}$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \dots, \texttt{maxit}$

Calcola x^k t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x^k)\| \le \tau_k$

if $\tau_k < \rho$ **and** $q(x^k) \le \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Proprietà di convergenza

Teorema

Sia $\{x_k\}$ *una successione t.c.* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$ *e* $\{x_k\}_K$ *una sottosucc. convergente ad* x^* *t.c. siano lin. indipendenti*

$$\nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*),\ \nabla h_j(x^*),\ \forall\, j.$$

Allora, x^* *è un punto di KKT di* (P_0) *con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k), 0\}\right\}_K \to \lambda^*$$

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}h(x_k)\right\}_K \to \mu^*$$

Un po' di esempi di risoluzione

`esempio3`:

$$\begin{array}{l} \min\ -x_1 - x_2 \\ s.t.\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}$$

$x^0 = (-1,\ -1)^\top$
Ammete $(x^*, y^*) = (1,\ 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x - y + \frac{1}{\epsilon}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Un po' di esempi di risoluzione

`esempio3`:

$$\begin{array}{l} \min \ -x_1 - x_2 \\ s.t. \ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}$$

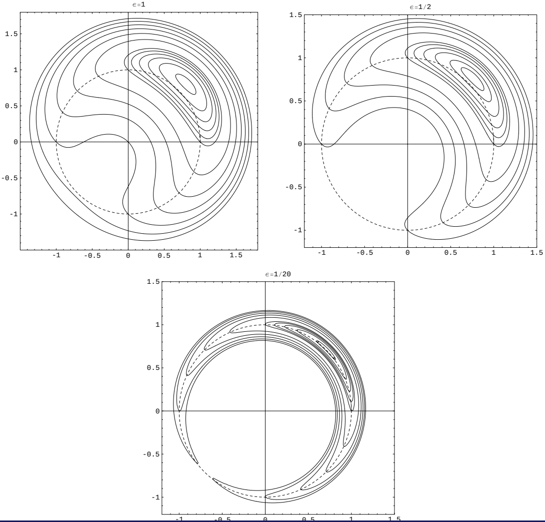
$x^0 = (-1,\ -1)^\top$
Ammete $(x^*, y^*) = (1,\ 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x - y + \frac{1}{\epsilon}(1 - x^2 - y^2)^2$$

Un po' di esempi di risoluzione

Grafici di $P_\epsilon(x)$ ($\epsilon = 1, 0.5, 0.05$)



Un po' di esempi di risoluzione

`esempio4`:

$$\begin{array}{l} \min\ -x_1 - x_2 \\ s.t.\ x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \end{array}$$

$x^0 = (-1,\ -1)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`maratos`:

$$\begin{array}{l} \min\ -x_1 + 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ s.t.\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{array}$$

$x^0 = (-1,\ -1)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs14`:

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-2)^2+(x_2-1)^2 \\ &s.t.\ x_1^2/4+x_2^2 \le 1 \\ &\qquad x_1-2x_2=-1 \end{aligned}$$

$x^0 = (2,\ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs24`:

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_2^3((x_1-3)^2-9)/(27\sqrt{3}) \\
s.t.\ & x_1/\sqrt{3} - x_2 \geq 0 \\
& x_1 + \sqrt{3}x_2 \geq 0 \\
& -x_1 - \sqrt{3}x_2 + 6 \geq 0 \\
& x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$x^0 = (1,\ 1/2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs32`:

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1 + 3 * x_2 + x_3)^2 + 4(x_1 - x_2)^2 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & 6x_2 + 4x_3 - x_1^3 \geq 3 \\ & x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$x^0 = (0.1,\ 0.7,\ 0.2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs41`:

$$
\begin{aligned}
&\min\ 2 - x_1x_2x_3\\
&s.t.\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\\
&\qquad 0 \le x_i \le 1,\ i = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

$x^0 = (2,\ 2,\ 2,\ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs55`:

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 + 4x_5 + e^{x_1 x_4} \\
s.t.\ & x_1 + 2x_2 + 5x_5 - 6 = 0 \\
& x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\
& x_4 + x_5 + x_6 - 2 = 0 \\
& x_1 + x_4 - 1 = 0 \\
& x_2 + x_5 - 2 = 0 \\
& x_3 + x_6 - 2 = 0 \\
& x_i \geq 0,\ \ i = 1, \dots, 6 \\
& x_1 \leq 1,\ \ x_4 \leq 1
\end{aligned}
$$

$x^0 = (1,\ 2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 2)^\top$

Un po' di esempi di risoluzione

`hs60`:

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1-1)^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^4 \\ &s.t.\ x_1(1+x_2^2)+x_3^4-4-3\sqrt{2}=0 \\ &\quad -10 \le x_i \le 10,\ \ i=1,2,3 \end{aligned}$$

$x^0 = (2,\ 2,\ 2)^\top$

Tanto per cominciare

Consideriamo il problema con soli vincoli di uguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & h(x) = 0 \end{array}$$

Funzione Lagrangiana: $L(x, \mu) = f(x) + \mu^\top h(x)$

con gradiente (vi ricordo):

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \mu) &= \nabla f(x) + \nabla h(x)\mu \\ \nabla_\mu L(x, \mu) &= h(x) \end{aligned}$$

Percui, le C.N. di ottimo si possono riassumere in: $\nabla L(x, \mu) = 0$

Tanto per cominciare

Consideriamo il problema con soli vincoli di uguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & h(x) = 0 \end{array}$$

Funzione Lagrangiana: $L(x, \mu) = f(x) + \mu^\top h(x)$

con gradiente (vi ricordo):

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \mu) &= \nabla f(x) + \nabla h(x)\mu \\ \nabla_\mu L(x, \mu) &= h(x) \end{aligned}$$

Percui, le C.N. di ottimo si possono riassumere in: $\nabla L(x, \mu) = 0$

Tanto per cominciare

Consideriamo il problema con soli vincoli di uguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & h(x) = 0 \end{array}$$

Funzione Lagrangiana: $L(x, \mu) = f(x) + \mu^\top h(x)$

con gradiente (vi ricordo):

$$\begin{array}{rcl} \nabla_x L(x, \mu) & = & \nabla f(x) + \nabla h(x)\mu \\ \nabla_\mu L(x, \mu) & = & h(x) \end{array}$$

Percui, le C.N. di ottimo si possono riassumere in: $\nabla L(x, \mu) = 0$

Tanto per cominciare

Consideriamo il problema con soli vincoli di uguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & h(x) = 0 \end{array}$$

Funzione Lagrangiana: $L(x, \mu) = f(x) + \mu^\top h(x)$

con gradiente (vi ricordo):

$$\begin{array}{rcl} \nabla_x L(x, \mu) & = & \nabla f(x) + \nabla h(x)\mu \\ \nabla_\mu L(x, \mu) & = & h(x) \end{array}$$

Percui, le C.N. di ottimo si possono riassumere in: $\nabla L(x, \mu) = 0$

Quindi ...

Punti che soddisfano le C.N. di ottimo sono punti staz. della funzione Lagrangiana $L(x, \mu)$!!

Purtroppo però, accade che le soluzione del problema originario corrispondono (spesso) con punti di "sella" della funzione Lagrangiana.

Quindi, non si può (banalmente) minimizzare $L(x, \mu)$ per risolvere il problema originario

Quindi ...

Punti che soddisfano le C.N. di ottimo sono punti staz. della funzione Lagrangiana $L(x, \mu)$!!

Purtroppo però, accade che le soluzione del problema originario corrispondono (spesso) con punti di "sella" della funzione Lagrangiana.

Quindi, non si può (banalmente) minimizzare $L(x, \mu)$ per risolvere il problema originario

Quindi ...

Punti che soddisfano le C.N. di ottimo sono punti staz. della funzione Lagrangiana $L(x, \mu)$!!

Purtroppo però, accade che le soluzione del problema originario corrispondono (spesso) con punti di "sella" della funzione Lagrangiana.

Quindi, non si può (banalmente) minimizzare $L(x, \mu)$ per risolvere il problema originario

Fortunatamente ...

Possiamo "convessificare" $L(x,\mu)$ nell'intorno delle soluzione del problema originario (semplicemente) aggiungendo un termine di penalità, con $\epsilon > 0$ "sufficientemente" piccolo

$$L_a(x,\mu;\epsilon) = L(x,\mu) + \frac{1}{\epsilon}\|h(x)\|^2$$

con gradiente

$$\begin{aligned}\nabla_x L_a(x,\mu;\epsilon) &= \nabla_x L(x,\mu) + \frac{2}{\epsilon}\nabla h(x)h(x)\\ \nabla_\mu L_a(x,\mu;\epsilon) &= \nabla_\mu L(x,\mu) = h(x)\end{aligned}$$

Fortunatamente ...

Possiamo "convessificare" $L(x, \mu)$ nell'intorno delle soluzione del problema originario (semplicemente) aggiungendo un termine di penalità, con $\epsilon > 0$ "sufficientemente" piccolo

$$L_a(x, \mu; \epsilon) = L(x, \mu) + \frac{1}{\epsilon}\|h(x)\|^2$$

con gradiente

$$\begin{aligned}
\nabla_x L_a(x, \mu; \epsilon) &= \nabla_x L(x, \mu) + \frac{2}{\epsilon}\nabla h(x) h(x) \\
\nabla_\mu L_a(x, \mu; \epsilon) &= \nabla_\mu L(x, \mu) = h(x)
\end{aligned}$$

Prima proprietà

Proposizione

Per ogni valore $\epsilon > 0$, ogni punto staz. di $L_a(x, \mu; \epsilon)$ è un punto di KKT del problema originario e viceversa

Dim.: Sia $(\bar{x}, \bar{\mu})$ un punto t.c. $\nabla L_a(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$. Allora, dalla espr. del gradiente risulta, banalmente: $h(\bar{x}) = 0$ e quindi $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$, ovvero $(\bar{x}, \bar{\mu})$ è un punto di KKT.

Supponiamo ora che $(\bar{x}, \bar{\mu})$ sia un punto di KKT e quindi, in particolare, $h(\bar{x}) = 0$ e $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$. Allora, dalla espr. del gradiente di L_a si ricava nuovamente $\nabla L_a(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$. $\square$

Prima proprietà

Proposizione

Per ogni valore $\epsilon > 0$, ogni punto staz. di $L_a(x, \mu; \epsilon)$ è un punto di KKT del problema originario e viceversa

Dim.: Sia $(\bar{x}, \bar{\mu})$ un punto t.c. $\nabla L_a(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$. Allora, dalla espr. del gradiente risulta, banalmente: $h(\bar{x}) = 0$ e quindi $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$, ovvero $(\bar{x}, \bar{\mu})$ è un punto di KKT.

Supponiamo ora che $(\bar{x}, \bar{\mu})$ sia un punto di KKT e quindi, in particolare, $h(\bar{x}) = 0$ e $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$. Allora, dalla espr. del gradiente di L_a si ricava nuovamente $\nabla L_a(\bar{x}, \bar{\mu}) = 0$. $\square$

Esempio

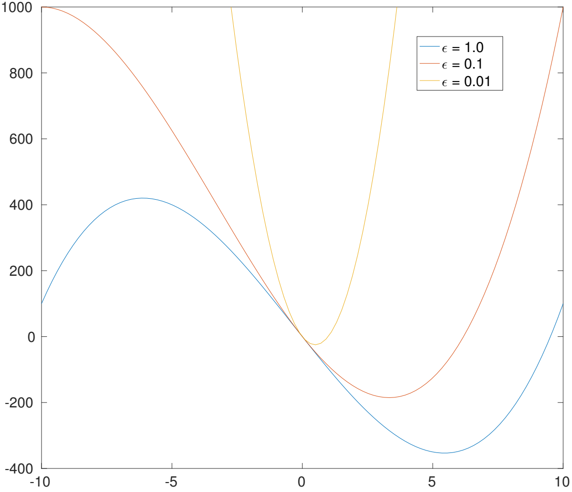
Consideriamo il problema

$$\min\ x^3$$
$$s.t.\ x = 0$$

per cui risulta (banalmente) $x^* = 0$ e $\mu^* = 0$

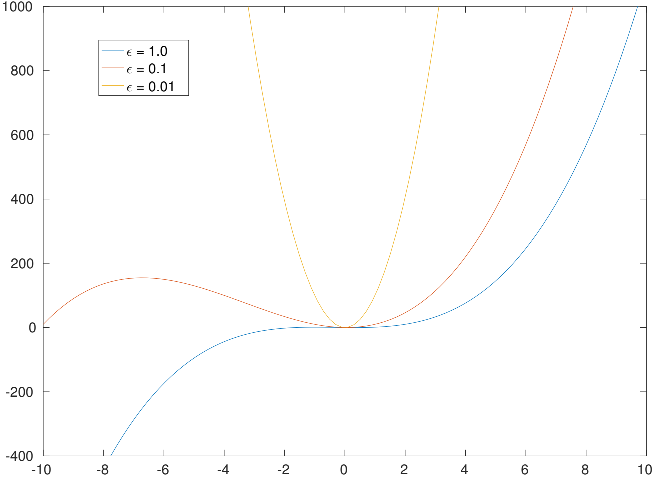
Esempio

Andamenti della funzione $L_a(x, -100; \epsilon)$ per $\epsilon = 1, 0.1, 0.01$



Esempio

Andamenti della funzione $L_a(x, -1; \epsilon)$ per $\epsilon = 1, 0.1, 0.01$



Seconda proprietà

È possibile "minimizzare $L_a(x, \mu)$" per determinare minimi locali del problema originario?

No, $L_a(x, \mu)$ è lineare in μ

Si può tentare di minimizzare $L_a(x, \bar{\mu})$ per μ fissato

Cosa manca?

Seconda proprietà

È possibile "minimizzare $L_a(x, \mu)$" per determinare minimi locali del problema originario?

No, $L_a(x, \mu)$ è lineare in μ

Si può tentare di minimizzare $L_a(x, \bar{\mu})$ per μ fissato

Cosa manca?

Seconda proprietà

È possibile "minimizzare $L_a(x, \mu)$" per determinare minimi locali del problema originario?

No, $L_a(x, \mu)$ è lineare in μ

Si può tentare di minimizzare $L_a(x, \bar{\mu})$ per μ fissato

Cosa manca?

Seconda proprietà

È possibile "minimizzare $L_a(x, \mu)$" per determinare minimi locali del problema originario?

No, $L_a(x, \mu)$ è lineare in μ

Si può tentare di minimizzare $L_a(x, \bar{\mu})$ per μ fissato

Cosa manca?

Seconda proprietà

Sia $\bar{x}$ una sol. del problema vincolato originale tale che:

- $\bar{x}$ è un punto regolare per i vincoli
- la coppia di KKT $(\bar{x}, \bar{\mu})$ soddisfa le C.S. del II ordine

Proposizione

Per **valori sufficientemente piccoli di** $\epsilon > 0$, $\bar{x}$ *è un minimo locale stretto di* $L_a(x, \bar{\mu}; \epsilon)$

N.B. è necessario conoscere $\bar{\mu}$!

Seconda proprietà

Sia $\bar{x}$ una sol. del problema vincolato originale tale che:

- $\bar{x}$ è un punto regolare per i vincoli
- la coppia di KKT $(\bar{x}, \bar{\mu})$ soddisfa le C.S. del II ordine

Proposizione

Per **valori sufficientemente piccoli di** $\epsilon > 0$, $\bar{x}$ *è un minimo locale stretto di* $L_a(x, \bar{\mu}; \epsilon)$

N.B. è necessario conoscere $\bar{\mu}$!

Seconda proprietà

Sia $\bar{x}$ una sol. del problema vincolato originale tale che:

- $\bar{x}$ è un punto regolare per i vincoli
- la coppia di KKT $(\bar{x}, \bar{\mu})$ soddisfa le C.S. del II ordine

Proposizione

Per **valori sufficientemente piccoli di** $\epsilon > 0$, $\bar{x}$ *è un minimo locale stretto di* $L_a(x, \bar{\mu}; \epsilon)$

N.B. è necessario conoscere $\bar{\mu}$!

Esempio

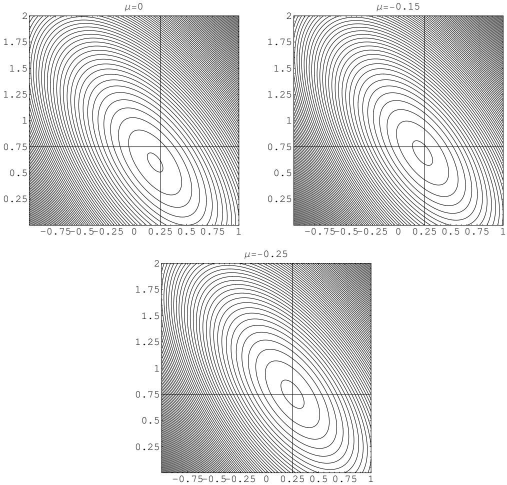
Consideriamo il problema

$$\begin{array}{l} \min\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}y^2 \\ s.t.\ x + y = 1 \end{array}$$

Calcolare la soluzione del problema (x^*, y^*, μ^*)

Esempio

Curve di livello di $L_a(x, y, \bar{\mu}; \epsilon)$ per $\epsilon = 1$ a $\bar{\mu} = 0, -0.15, -0.25$



Proprietà

Proposizione

- *Per ogni valore* $\epsilon > 0$, *ogni punto staz. di* $L_a(x, \mu; \epsilon)$ *è un punto di KKT del problema originario e viceversa*
- *Sia* $(\bar{x}, \bar{\mu})$ *una sol. del problema originale. Per* **valori sufficientemente piccoli di** $\epsilon > 0$, $\bar{x}$ *è un minimo locale di* $L_a(x, \bar{\mu}; \epsilon)$

Metodo di soluzione

Algoritmo `SEQLAGR`

Dati: $\epsilon_\circ > 0$, $\beta > 1$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $\mu_\circ$, `maxit`

for $k = 0, 1, \dots,$`maxit`

Calcola x_k t.c. $\|\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| \leq \tau_k$

if $\|\nabla L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| \leq \rho$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\mu^* \leftarrow \mu_k$, STOP

endif

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, μ^*)

Metodo di soluzione

Algoritmo `SEQLAGR`

Dati: $\epsilon_\circ > 0$, $\beta > 1$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $\mu_\circ$, `maxit`

for $k = 0, 1, \dots,$`maxit`

Calcola x_k t.c. $\|\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| \leq \tau_k$

if $\|\nabla L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| < \rho$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\mu^* \leftarrow \mu_k$, STOP

endif

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / \beta$

Calcola μ_{k+1}

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, μ^*)

Metodo di soluzione

Algoritmo `SEQLAGR`

Dati: $\epsilon_\circ > 0$, $\beta > 1$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $\mu_\circ$, `maxit`

for $k = 0, 1, \dots,$`maxit`

Calcola x_k t.c. $\|\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| \leq \tau_k$

if $\|\nabla L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| < \rho$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\mu^* \leftarrow \mu_k$, STOP

endif

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / \beta$

Calcola μ_{k+1}

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, μ^*)

Metodo di soluzione

Algoritmo `SEQLAGR`

Dati: $\epsilon_\circ > 0$, $\beta > 1$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $\mu_\circ$, $\mathtt{maxit}$

for $k = 0, 1, \dots, \mathtt{maxit}$

Calcola x_k t.c. $\|\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| \leq \tau_k$

if $\|\nabla L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| < \rho$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\mu^* \leftarrow \mu_k$, STOP

endif

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / \beta$

Calcola μ_{k+1}

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, μ^*)

Aggiornamento del moltiplicatore

Come si passa da μ_k a μ_{k+1}?

Supponiamo di aver calcolato x_k e supponiamo anche che x_k sia stazionario per la funzione $L_a(x, \mu_k; \epsilon_k)$ cioè

$$\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k) = 0$$

Ovvero

$$\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k) = \nabla f(x_k) + \nabla h(x_k) \left(\mu_k + \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k) \right) = 0$$

Se definiamo $\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k)$ risulterà

$$\nabla f(x_k) + \nabla h(x_k) \mu_{k+1} = 0$$

per cui x_k soddisfa la condizione di stazionarietà a meno della condizione $h(x_k) = 0$

Aggiornamento del moltiplicatore

Come si passa da μ_k a μ_{k+1}?

Supponiamo di aver calcolato x_k e supponiamo anche che x_k sia stazionario per la funzione $L_a(x, \mu_k; \epsilon_k)$ cioè

$$\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k) = 0$$

Ovvero

$$\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k) = \nabla f(x_k) + \nabla h(x_k) \left(\mu_k + \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k) \right) = 0$$

Se definiamo $\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k)$ risulterà

$$\nabla f(x_k) + \nabla h(x_k) \mu_{k+1} = 0$$

per cui x_k soddisfa la condizione di stazionarietà a meno della condizione $h(x_k) = 0$

Aggiornamento del moltiplicatore

Come si passa da μ_k a μ_{k+1}?

Supponiamo di aver calcolato x_k e supponiamo anche che x_k sia stazionario per la funzione $L_a(x, \mu_k; \epsilon_k)$ cioè

$$\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k) = 0$$

Ovvero

$$\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k) = \nabla f(x_k) + \nabla h(x_k) \left(\mu_k + \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k) \right) = 0$$

Se definiamo $\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{2}{\epsilon_k} h(x_k)$ risulterà

$$\nabla f(x_k) + \nabla h(x_k) \mu_{k+1} = 0$$

per cui x_k soddisfa la condizione di stazionarietà a meno della condizione $h(x_k) = 0$

Metodo di soluzione - Metodo dei Moltiplicatori

Algoritmo `SEQLAGR`

Dati: $\epsilon_\circ > 0$, $\beta > 1$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $\mu_\circ$, `maxit`

for $k = 0, 1, \ldots,$`maxit`

Calcola x_k t.c. $\|\nabla_x L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| \leq \tau_k$

if $\|\nabla L_a(x_k, \mu_k; \epsilon_k)\| < \rho$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\mu^* \leftarrow \mu_k$, STOP

endif

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / \beta$

$$\boxed{\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{2h(x_k)}{\epsilon_k}}$$

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, μ^*)

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Usiamo la trasformazione:

- $g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0, \ i = 1, \dots, m$

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} (g_i(x) + y_i^2)^2$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Usiamo la trasformazione:

- $g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0,\ i = 1, \ldots, m$

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} (g_i(x) + y_i^2)^2$$

$$= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2 g_i(x) y_i^2 + y_i^4)$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Usiamo la trasformazione:

- $g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0, \; i = 1, \dots, m$

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2$$

$$= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m \left(\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2 g_i(x) y_i^2 + y_i^4 \right)$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Usiamo la trasformazione:

- $g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0,\ i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} L_a(x, y, \lambda; \epsilon) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2 \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m \left(\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2 g_i(x) y_i^2 + y_i^4 \right) \end{aligned}$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g(x) \le 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g_i(x) + y_i^2 = 0, \;\; i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon}\|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{m}(\epsilon\lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati ϵ e λ, bisogna "risolvere"

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g_i(x) + y_i^2 = 0, \;\; i = 1, \ldots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon}\|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{m}\left(\epsilon\lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4\right)$$

fissati ϵ e λ, bisogna "risolvere"

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g_i(x) + y_i^2 = 0, \; i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^{m} \left(\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2 g_i(x) y_i^2 + y_i^4 \right)$$

fissati ϵ e λ, bisogna "risolvere"

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$

Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & g_i(x) + y_i^2 = 0, \; i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon}\|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{m}\left(\epsilon\lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4\right)$$

fissati ϵ e λ, bisogna "risolvere"

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$

Gradiente della Lagrangiana

$$\begin{aligned}
\nabla_x L_a &= \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \frac{2}{\epsilon}\sum_{i=1}^{m}(g_i(x) + y_i^2)\nabla g_i(x) \\
\nabla_\lambda L_a &= g(x) + y^2 \\
\nabla_{y_i} L_a &= \frac{4}{\epsilon} y_i \left(\epsilon\frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2\right)
\end{aligned}$$

Quindi, ponendo $\nabla_{y_i} L_a = 0$ otteniamo

$$y_i\left(\epsilon\frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2\right) = 0$$

ovvero

$$y_i^2 = \max\left\{0, -\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i(x)\right\}$$

Gradiente della Lagrangiana

$$
\begin{aligned}
\nabla_x L_a &= \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \frac{2}{\epsilon}\sum_{i=1}^{m}(g_i(x) + y_i^2)\nabla g_i(x) \\
\nabla_\lambda L_a &= g(x) + y^2 \\
\nabla_{y_i} L_a &= \frac{4}{\epsilon} y_i \left(\epsilon\frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2\right)
\end{aligned}
$$

Quindi, ponendo $\nabla_{y_i} L_a = 0$ otteniamo

$$
y_i \left(\epsilon\frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2\right) = 0
$$

ovvero

$$
y_i^2 = \max\left\{0, -\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i(x)\right\}
$$

Espressione per vincoli di disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
L_a(x,\lambda;\epsilon) &= f(x) + \lambda^\top \left(g(x) + \max\left\{0, -\epsilon\frac{\lambda}{2} - g(x)\right\}\right) \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\left\| g(x) + \max\left\{0, -\epsilon\frac{\lambda}{2} - g(x)\right\}\right\|^2
\end{aligned}
$$

Ovvero

$$
\begin{aligned}
L_a(x,\lambda;\epsilon) &= f(x) + \lambda^\top \max\left\{g(x), -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\} + \frac{1}{\epsilon}\left\|\max\left\{g(x), -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\}\right\|^2 \\
\nabla_x L_a(x,\lambda;\epsilon) &= \nabla f(x) + \nabla g(x)\left(\lambda + \frac{2}{\epsilon}\max\left\{g(x), -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
\nabla_\lambda L_a(x,\lambda;\epsilon) &= \max\left\{g(x), -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

Espressione per vincoli di disuguaglianza

$$
\begin{aligned}
L_a(x,\lambda;\epsilon) &= f(x) + \lambda^\top \left(g(x) + \max\left\{0, -\epsilon\frac{\lambda}{2} - g(x)\right\}\right) \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\left\| g(x) + \max\left\{0, -\epsilon\frac{\lambda}{2} - g(x)\right\}\right\|^2
\end{aligned}
$$

Ovvero

$$
\begin{aligned}
L_a(x,\lambda;\epsilon) &= f(x) + \lambda^\top \max\left\{g(x), -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\} + \frac{1}{\epsilon}\left\|\max\left\{g(x), -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\}\right\|^2 \\
\nabla_x L_a(x,\lambda;\epsilon) &= \nabla f(x) + \nabla g(x)\left(\lambda + \frac{2}{\epsilon}\max\left\{g(x), -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\}\right) \\
\nabla_\lambda L_a(x,\lambda;\epsilon) &= \max\left\{g(x), -\epsilon\frac{\lambda}{2}\right\}
\end{aligned}
$$

Metodo di soluzione - Metodo dei Moltiplicatori

Algoritmo `SEQLAGR`

Dati: $\epsilon_\circ > 0$, $\beta > 1$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $\lambda_\circ$, $\mu_\circ$, `maxit`

for $k = 0, 1, \ldots,$`maxit`

Calcola x_k t.c. $\|\nabla_x L_a(x_k, \mu_k, \lambda_k; \epsilon_k)\| \le \tau_k$

if $\|\nabla L_a(x_k, \mu_k, \lambda_k; \epsilon_k)\| < \rho$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\mu^* \leftarrow \mu_k$, $\lambda^* \leftarrow \lambda_k$ STOP

endif

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / \beta$

$$\boxed{\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{2h(x_k)}{\epsilon_k}, \ \lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{2\max\{g(x_k), -\epsilon_k \lambda_k/2\}}{\epsilon_k}}$$

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, μ^*, λ^*)