



**SAPIENZA**  
UNIVERSITÀ DI ROMA

UNIVERSITÀ di ROMA “LA SAPIENZA”

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA GESTIONALE

Anno Accademico 2015–2016

**Appunti dalle lezioni di**

**OTTIMIZZAZIONE GLOBALE**

**STEFANO LUCIDI**

Dipartimento di Informatica e Sistemistica “A. Ruberti”

Università di Roma “La Sapienza”

versione preliminare

# Indice

<b>1</b>	<b>Problemi di Ottimizzazione Globale</b>	<b>3</b>
1.1	Introduzione . . . . .	3
1.2	Esempi di applicazioni . . . . .	5
1.2.1	Soluzione di sistemi di equazioni e disequazioni non lineari . . . . .	5
1.2.2	Conformazione molecolare . . . . .	6
1.2.3	Progettazione ottima . . . . .	7
1.3	Condizioni di esistenza . . . . .	7
1.4	Condizioni di ottimalità locale . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Problemi Particolari di Ottimizzazione Globale</b>	<b>14</b>
2.1	Problemi di programmazione convessa . . . . .	14
2.2	Problemi di programmazione concava . . . . .	19
2.3	Minimizzazione di una funzione quadratica con un vincolo sferico . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Introduzione ai Metodi di Ottimizzazione Globale</b>	<b>29</b>
3.1	Metodi di ottimizzazione locale . . . . .	29
3.1.1	Convergenza globale dei metodi locali per problemi non vincolati . . . . .	29
3.1.2	Convergenza verso un minimo globale dei metodi locali per problemi non vincolati . . . . .	30
3.1.3	Convergenza globale dei metodi locali per problemi vincolati . . . . .	31
3.1.4	Soluzione di sistemi di equazioni e disequazioni non lineari ed algoritmi per problemi vincolati . . . . .	31
3.2	Caratterizzazione dei problemi di ottimizzazione globale . . . . .	33
3.2.1	Condizioni di ottimalità globale . . . . .	35
3.2.2	Caratterizzazione dei minimi globali unici . . . . .	41
3.3	Proprietà generali dei metodi di ottimizzazione globale . . . . .	43
3.3.1	Proprietà di convergenza degli algoritmi di ottimizzazione globale deterministici che utilizzano informazioni locali . . . . .	46
3.3.2	Proprietà di convergenza degli algoritmi di ottimizzazione globale probabilistici che utilizzano informazioni locali . . . . .	48
3.4	Metodi di ottimizzazione globale . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Metodi Probabilistici</b>	<b>50</b>
4.1	Algoritmi che utilizzano punti scelti a caso su $\mathcal{D}$ . . . . .	50

4.1.1	Campionamento uniforme della funzione obiettivo . . . . .	51
4.1.2	Metodi che usano direzioni a caso . . . . .	52
4.1.3	Metodi di tipo multistart . . . . .	52
4.2	Metodi di tipo “simulated annealing” . . . . .	54
4.2.1	Distribuzioni non uniformi di punti . . . . .	55
4.2.2	Algoritmi di tipo “simulated annealing” . . . . .	55
4.3	Metodi che usano “popolazioni” di punti . . . . .	60
4.3.1	I metodi “controlled random search” . . . . .	60
4.3.2	Algoritmi genetici . . . . .	66
4.3.3	Algoritmi evolutivi . . . . .	66
4.3.4	Metodi di tipo “swarm” . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Metodi che utilizzano partizioni dell’insieme ammissibile</b>	<b>70</b>
5.1	Proprietà generali di un metodo che usa partizioni dell’insieme ammissibile	70
5.1.1	Schema generale di un metodo che usa partizioni dell’insieme ammissibile . . . . .	71
5.1.2	Scelta dei sottoinsiemi da partizionare: sottoinsiemi di dimensioni più grandi. . . . .	77
5.1.3	Scelta dei sottoinsiemi da partizionare: sottoinsiemi più promettenti. . . . .	80
5.1.4	Algoritmo di Partizione con minimizzazioni locali. . . . .	84
5.1.5	Scelta dei sottoinsiemi da partizionare: conoscenza del valore ottimo della funzione obiettivo. . . . .	86
5.2	Introduzione alla minimizzazione di funzioni Lipschitziane . . . . .	92
5.3	Metodi che utilizzano una sovrastima della costante di Lipschitz della funzione obiettivo . . . . .	93
5.3.1	Algoritmo di Schubert-Mladineo . . . . .	95
5.3.2	Algoritmi diagonali per funzioni Lipschitziane . . . . .	98
5.4	Metodi che non utilizzano stime della costante di Lipschitz della funzione obiettivo . . . . .	108
5.5	Metodi che utilizzano strategia miste . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Metodi che utilizzano Perturbazioni della Funzione Obiettivo</b>	<b>120</b>
6.1	Metodi di tunneling . . . . .	120
6.2	Funzioni di tipo “Filled” . . . . .	123
6.2.1	Funzioni filled di tipo 1 . . . . .	126
6.2.2	Funzioni filled di tipo 2. . . . .	130
<b>7</b>	<b>Cenni sui Metodi per Problemi di Ottimizzazione Globale Vincolata</b>	<b>137</b>
7.1	Introduzione . . . . .	137
7.2	Tecniche di Penalizzazione per Problemi di Ottimizzazione Globale Vincolata. . . . .	138
7.3	Algoritmo di Direct per Problemi di Ottimizzazione Globale Vincolata. . . . .	142
<b>8</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>144</b>

## Notazioni

$R^n$	spazio dei vettori $x$ a $n$ componenti reali;
$x \in R^n$	è inteso come vettore colonna;
$e_i \in R^n$	è il versore unitario $i$ -esimo, cioè il vettore che ha tutte componenti nulle escluso l' $i$ -esima che è uguale uno;
$R_+$	insieme dei reali non negativi;
$x^T$	vettore riga ottenuto come trasposto di $x$ ;
$(x)_i$	oppure $x_i$ indicano la $i$ -ma componente di $x$ (quindi $x_i \in R$ );
$x_k$	indica il $k$ -mo vettore di una successione (quindi $x_k \in R^n$ );
$\{x_k\}$	successione formata dai vettori $x_k$ ;
$\{x_k\}_K$	sottosuccessione definita dall'insieme (infinito) di indici $K$ ;
$\ x\ $	norma di $x$ ; in assenza di altre indicazioni, $\ x\ $ è la norma euclidea, ossia $\ x\  = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ , dove $x_i \in R$ sono le componenti di $x$ ;
$B(x^*; \rho)$	sfera aperta di raggio $\rho > 0$ con centro $x^* \in R^n$ , ossia: $B(x^*; \rho) = \{x \in R^n : \ x - x^*\  < \rho\}$ ;
$\nabla f(x)$	gradiente di una funzione $f : R^n \rightarrow R$ calcolato in $x$ ; $\nabla f(x)$ è inteso come vettore colonna con componenti $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ , $j = 1, \dots, n$ ;
$\nabla^2 f(x)$	matrice Hessiana ( $n \times n$ ) di una funzione $f : R^n \rightarrow R$ calcolata in $x$ , con componenti $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ , per $i, j = 1, \dots, n$ .
$Int(\mathcal{A})$	interno dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R^n$ .
$\partial(\mathcal{A})$	frontiera dell'insieme $\mathcal{A} \subseteq R^n$ .
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$	l'insieme definito da $\{x \in \mathcal{A} : x \notin \mathcal{B}\}$ .

# Capitolo 1

## Problemi di Ottimizzazione Globale

Molti problemi che nascono nell'ambito dell'Ingegneria, dell'Economia e delle Scienze esatte e naturali possono essere rappresentati come problemi di ottimizzazione globale. Questo motiva il sempre maggiore interesse dal punto di vista tecnico e scientifico verso lo studio e lo sviluppo di metodi che siano in grado di affrontare e risolvere questa classe di difficili problemi matematici.

### 1.1 Introduzione

Come è noto un problema di ottimizzazione consiste nel cercare di determinare dei punti appartenenti ad un insieme  $\mathcal{F}$  in cui una funzione  $f$  assume valori più bassi possibile. Tale problema viene rappresentato nella forma:

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{F}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

dove la funzione  $f : \mathcal{F} \rightarrow R$  è detta *funzione obiettivo* e l'insieme  $\mathcal{F} \subseteq R^n$  è detto *insieme ammissibile*.

In connessione con il precedente problema di minimizzazione si possono introdurre le seguenti definizioni.

**Definizione 1.1.1 (Minimo globale)** Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  si dice punto di minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  se

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}.$$

**Definizione 1.1.2 (Minimo globale stretto)** Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  si dice punto di minimo globale stretto di  $f$  su  $\mathcal{F}$  se

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, \quad x \neq x^*.$$

**Definizione 1.1.3 (Minimo locale)** Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  si dice punto di minimo locale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  se esiste un intorno  $B(x^*; \rho)$ , con  $\rho > 0$  tale che

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \cap B(x^*; \rho).$$

**Definizione 1.1.4 (Minimo locale stretto)** Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  si dice punto di minimo locale stretto di  $f$  su  $\mathcal{F}$  se esiste un intorno  $B(x^*; \rho)$ , con  $\rho > 0$  tale che

$$f(x^*) < f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \cap B(x^*; \rho), \quad x \neq x^*.$$

Si può notare che il problema di trovare un punto in cui la funzione  $f$  assume valore più alto possibile, si può sempre ricondurre a un problema di minimo, cambiando di segno la funzione obiettivo. Infatti un punto di massimo del problema

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

è un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  che, per definizione, soddisfa la seguente proprietà:

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F},$$

che è equivalente a:

$$-f(x^*) \leq -f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F},$$

da cui segue che  $x^*$  è anche un punto di minimo del problema

$$\min_{x \in \mathcal{F}} -f(x)$$

e risulta:

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\min_{x \in \mathcal{F}} (-f(x)).$$

Perciò non si ha nessuna perdita di generalità a studiare ed affrontare solamente problemi di minimizzazione o, viceversa, solamente problemi di massimizzazione.

La natura del Problema (1.1) e, quindi, la sua difficoltà di risoluzione dipendono, ovviamente, dalle caratteristiche della funzione obiettivo e dalla struttura dell'insieme ammissibile. Usualmente un problema di ottimizzazione è detto *problema di minimizzazione non vincolata* se  $\mathcal{F} = R^n$ , cioè se l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  coincide con tutto lo spazio  $R^n$ , cioè:

$$\min_{x \in R^n} f(x) \tag{1.2}$$

Viene detto, invece, *problema di minimizzazione vincolata* un problema in cui  $\mathcal{F} \subset R^n$ . Tuttavia, può essere considerato come un problema di minimizzazione non vincolato anche un qualsiasi problema in cui l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  è un insieme aperto. Infatti, come nel caso in cui  $\mathcal{F} = R^n$ , i punti di minimo del problema possono essere caratterizzati esclusivamente dall'andamento della funzione obiettivo in un intorno del punto

e non dal fatto che ci siano dei vincoli sulle variabili del problema. Perciò, sia gli approfondimenti teorici che gli approcci computazionali possono essere basati solamente sulla proprietà teoriche della funzione obiettivo ed utilizzando essenzialmente gli stessi strumenti utilizzati nel caso  $\mathcal{F} = R^n$ .

Tra i problemi vincolati in cui  $\mathcal{F}$  è un insieme chiuso, la classe più comunemente considerata è quella in cui  $\mathcal{F}$  è descritto attraverso un *insieme finito di vincoli di eguaglianza e disequaglianza*:

$$\mathcal{F} = \{x \in R^n : g(x) \leq 0, \quad h(x) = 0\},$$

in cui  $g : R^n \rightarrow R^m$  e  $h : R^n \rightarrow R^p$  sono vettori di funzioni assegnate. Il problema di ottimo si può indicare, in tal caso, ponendo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

## 1.2 Esempi di applicazioni

In questo paragrafo vengono riportati alcuni esempi di problemi applicativi, formulabili come problemi di ottimizzazione, in cui è indispensabile cercare di determinarne il minimo globale.

### 1.2.1 Soluzione di sistemi di equazioni e disequazioni non lineari

Nell'ambito scientifico ed ingegneristico un problema particolarmente importante da risolvere è quello di determinare un punto  $x^* \in R^n$  che soddisfa un sistema di equazioni e disequazioni non lineari del tipo:

$$\begin{aligned} h_j(x) &= 0 & j &= 1, \dots, q \\ g_i(x) &\leq 0 & i &= 1, \dots, m \end{aligned}$$

dove  $h_j : R^n \rightarrow R$ , con  $j = 1, \dots, q$  e  $g_i : R^n \rightarrow R$ , con  $i = 1, \dots, m$ .

Nel caso in cui le funzioni  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  e  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sono nonlineari, determinare un punto che soddisfa il precedente sistema è particolarmente difficile ed un modo per poterlo affrontare è quello di trasformarlo nel seguente problema di ottimizzazione non vincolata:

$$\begin{aligned} \min \quad & w(x) \\ & x \in R^n. \end{aligned}$$

dove

$$w(x) = \sum_{j=1}^q |h_j(x)|^{p_1} + \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^{p_2}$$

con  $p_1 \geq 1$  e  $p_2 \geq 1$ .

Nel risolvere il precedente problema è indispensabile determinarne i minimi globali in quanto sono gli unici punti in cui la funzione obiettivo si annulla e che, quindi, corrispondono a soluzioni del sistema di equazioni ed disequazioni iniziale.

### 1.2.2 Conformazione molecolare

Un problema importante nel campo della chimica e della biologia computazionale consiste nel cercare di determinare la struttura tridimensionale delle molecole complesse. Tale problema, oltre ad essere di grande interesse dal punto di vista scientifico, ha molte applicazioni nella industria biotecnologica, in particolare nella determinazione di medicinali per la cura di gravi malattie (poliomielite, forme tumorali, AIDS, etc.).

Per cercare di determinare la struttura delle molecole si fa riferimento al fatto che le osservazioni sperimentali indicano che le strutture più stabili in natura sono quelle che corrispondono alla minima energia. Matematicamente, se si suppone che la molecola sia costituita da  $n$  atomi, si può indicare con  $x_i \in R^3$  la posizione spaziale dell' $i$ -esimo atomo ed indentificare con  $x = (x_1^T, \dots, x_n^T)^T \in R^{3n}$  la struttura della molecola. Se  $\mathcal{F} \subset R^{3n}$  è l'insieme di tutte le possibile strutture della molecola e se  $f(x)$  è la funzione che rappresenta l'energia associata alla struttura  $x \in \mathcal{F}$ , il problema diventa quello di determinare il minimo globale del problema non lineare

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Per quanto riguarda la funzione  $f(x)$  sono state proposte varie forme che dipendono dalle diverse modellizzazioni proposte dell'energia associata ad una struttura di una particolare molecola.

Una delle forme della funzione di energia  $f(x)$  più usata, in particolare nello studio delle strutture dei gas e dei metalli, è data da:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{1}{\|x_i - x_j\|^{12}} - \frac{2}{\|x_i - x_j\|^6} \right),$$

dove ogni singolo termine della sommatoria descrive il contributo all'energia che è dovuto all'interazione tra l'atomo  $i$ -esimo e quello  $j$ -esimo. Secondo il modello di Lennard-Jones, tale contributo è dato dalla somma di una componente repulsiva che impedisce a due atomi di sovrapporsi ed una componente attrattiva dovuta a fenomeni elettrostatici.

Sempre nell'ambito dello studio dei gas e metalli, un'altra importante funzione di energia è la seguente:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left( \left( e^{\rho(1-\|x_i-x_j\|)} - 1 \right)^2 - 1 \right),$$

in cui i singoli termini della sommatoria rappresentano l'energia di una coppia di particelle secondo il modello di Morse (invece di quello di Lennard-Jones). Il parametro  $\rho$  che compare nella funzione serve a caratterizzare la distanza a cui avvengono le iterazioni.



All'aumentare della complessità delle molecole di cui si vuole studiare la struttura e della precisione con cui si vuole modellizzare le iterazioni tra gli atomi che costituiscono la molecola aumenta anche la complessità della funzione  $f(x)$ . Per esempio nello studio delle strutture delle proteine viene usata frequentemente la seguente funzione di energia:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \left[ \left( \frac{\sigma_{ij}}{\|x_i - x_j\|} \right)^{12} - 2 \left( \frac{\tilde{\sigma}_{ij}}{\|x_i - x_j\|} \right)^6 + \frac{q_i q_j}{\varepsilon \|x_i - x_j\|} \right],$$

in cui  $\sigma_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}, q_i, q_j, \varepsilon$  sono costanti fisiche.

I problemi di minimizzazione che hanno come funzione obiettivo le precedenti funzioni di energia (o le altre utilizzate in questo ambito) sono difficili da risolvere in generale. Infatti queste particolari funzioni obiettivo hanno strutture particolari che creano un enorme numero di minimi locali, mentre gli unici punti di interesse sono i minimi globali in quanto sono gli unici ad avere un significato dal punto di vista chimico e biologico.

### 1.2.3 Progettazione ottima

Gran parte dei problemi di progettazione ottima possono essere formulati come problemi di ottimizzazione vincolata della struttura del Problema (1.3). L'esigenza di produrre sistemi, apparati o dispositivi con caratteristiche e prestazioni sempre migliori porta alla necessità di definire delle tecniche matematiche che permettano di determinare necessariamente un ottimo globale del Problema (1.3).

I problemi di ottimizzazione che nascono nella progettazione di sistemi particolarmente complessi possono presentare l'ulteriore difficoltà di avere funzione obiettivo e/o vincoli di cui non si conoscono le espressioni analitiche. Infatti, in questi casi, si ha solamente a disposizione la possibilità di calcolare i valori della funzione obiettivo e/o dei vincoli attraverso codici di calcolo molto complessi (frequentemente basati su metodi agli "elementi finiti"). Tali codici normalmente sono molto costosi dal punto di vista computazionale e questo spinge verso lo studio di algoritmi di ottimizzazione che, in un fissato intervallo di tempo, siano in grado di ottenere la migliore approssimazione possibile di un punto di ottimo globale del Problema (1.3).

## 1.3 Condizioni di esistenza

Nell'affrontare il Problema (1.1) la prima difficoltà da affrontare è quella di capire se è ben posto, nel senso che potrebbe non esistere un punto in  $\mathcal{F}$  in cui la funzione  $f(x)$  assume valore più piccolo. Infatti, si potrebbe presentare una delle seguenti situazioni:

- l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  potrebbe essere vuoto;
- l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  potrebbe essere non vuoto ma la funzione obiettivo potrebbe essere illimitata inferiormente su  $\mathcal{F}$  ossia  $\inf_{x \in \mathcal{F}} f(x) = -\infty$ ;
- l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  potrebbe essere non vuoto e la funzione obiettivo potrebbe essere limitata inferiormente su  $\mathcal{F}$  ma, anche in questo caso, *potrebbero non esistere punti di minimo globale* di  $f$  su  $\mathcal{F}$ ;

Una condizione *sufficiente* (ma non necessaria) per l'esistenza di un punto di minimo globale di un problema di ottimizzazione è quella espressa dalla proposizione seguente, che segue dal ben noto Teorema di Weierstrass.

**Proposizione 1.3.1** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme non vuoto e compatto. Sia  $f$  una funzione continua definita su  $\mathcal{F}$ . Allora esiste un punto di minimo globale di  $f$  in  $\mathcal{F}$ .*

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** Sia

$$\ell = \inf_{x \in \mathcal{F}} f(x).$$

Dalla definizione di estremo inferiore si ha che:

$$\ell \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F} \quad (1.4)$$

e che, comunque scelto un indice  $k$ , esiste un punto  $x_k \in \mathcal{F}$  tale che:

$$f(x_k) \leq \ell + \frac{1}{k}. \quad (1.5)$$

Dalla (1.4) e dalla (1.5) segue che esiste una sequenza di punti  $\{x_k\}$ , con  $x_k \in \mathcal{F}$ , per cui:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \ell.$$

Per assunzione l'insieme  $\mathcal{F}$  è compatto, quindi, è chiuso e limitato. Poichè  $x_k \in \mathcal{F}$  per ogni  $k$ , la sequenza  $\{x_k\}$  è anche lei limitata e, quindi, esiste un suo punto di accumulazione  $x^* \in R^n$  che, per la chiusura di  $\mathcal{F}$ , soddisfa anche  $x^* \in \mathcal{F}$ . Perciò esiste una sottosequenza  $\{x_k\}_K$  che soddisfa:

$$\lim_{k \in K, k \rightarrow \infty} x_k = x^*, \quad (1.6)$$

$$\lim_{k \in K, k \rightarrow \infty} f(x_k) = \ell. \quad (1.7)$$

Dalla continuità della funzione  $f$  e dalla (1.6), segue che:

$$\lim_{k \in K, k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x^*),$$

da cui, ricondando la (1.7), si ottiene:

$$f(x^*) = \ell.$$

La precedente uguaglianza e la (1.4) implicano che

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, \quad (1.8)$$

da cui segue che il punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$ .  $\square$

Il risultato stabilito nella precedente proposizione si applica solamente alla classe dei problemi *vincolati* in cui l'insieme ammissibile è compatto. Per poter stabilire risultati

di esistenza per problemi con insiemi ammissibili non compatti (in particolare nel caso in cui  $\mathcal{F} = R^n$ ) è necessario cercare di caratterizzare un qualche sottoinsieme di  $\mathcal{F}$  contenente le soluzioni ottime del problema.

A questo fine si introduce la definizione seguente.

**Definizione 1.3.2 (Insieme di livello)** *Sia  $\mathcal{F} \subseteq R^n$  e sia  $f : \mathcal{F} \rightarrow R$ ; si definisce insieme di livello di  $f$  su  $\mathcal{F}$  ogni insieme non vuoto del tipo:*

$$\mathcal{L}(\alpha) := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\},$$

in cui  $\alpha \in R$ .

In particolare, se  $x_0 \in \mathcal{F}$ , indichiamo con  $\mathcal{L}_0$  l'insieme di livello  $\mathcal{L}(f(x_0))$ , ossia:

$$\mathcal{L}_0 := \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq f(x_0)\}. \quad (1.9)$$

A questo punto, si può enunciare il risultato seguente che stabilisce una condizione sufficiente per l'esistenza di soluzioni globali di un problema di ottimizzazione facendo riferimento alla struttura degli insiemi di livello della funzione.

**Proposizione 1.3.3** *Sia  $\mathcal{F} \subseteq R^n$  e sia  $f$  una funzione continua definita su  $\mathcal{F}$ . Supponiamo che esista un insieme di livello di  $f$  su  $\mathcal{F}$  che sia non vuoto e compatto. Allora esiste un punto di minimo globale di  $f$  in  $\mathcal{F}$ .*

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** Sia  $\mathcal{L}(\alpha)$ , con  $\alpha \in R$ , l'insieme di livello non vuoto e compatto. Dalla Proposizione 1.3.1 esiste un punto di minimo globale  $x^* \in \mathcal{L}(\alpha)$  di  $f$  su  $\mathcal{L}(\alpha)$ . Questo implica che per ogni  $x \in \mathcal{L}(\alpha) \subseteq \mathcal{F}$  si ha

$$\alpha \geq f(x) \geq f(x^*). \quad (1.10)$$

Dalla definizione di  $\mathcal{L}(\alpha)$  segue che per ogni  $x \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{L}(\alpha)$  si ha

$$f(x) \geq \alpha \geq f(x^*). \quad (1.11)$$

Quindi la (1.10) e la (1.11) dimostrano che  $x^* \in \mathcal{F}$  è un minimo globale di  $f$  sul tutto l'insieme  $\mathcal{F}$ . □

Nel caso generale, stabilire l'esistenza di un insieme di livello compatto può essere difficile. Tuttavia, in molti casi, si possono ottenere delle semplici condizioni per assicurare che *tutti* gli insiemi di livello siano compatti. In particolare la proposizione successiva fornisce una condizione necessaria e sufficiente (nota come condizione di *coercività*) perchè gli insiemi di livello di  $f$  su  $\mathcal{F}$  siano compatti.

**Proposizione 1.3.4** . *Sia  $\mathcal{F} \subseteq R^n$  e sia  $f$  una funzione continua definita su  $\mathcal{F}$ . Allora tutti gli insiemi di livello  $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$  di  $f$  su  $\mathcal{F}$  sono compatti se e solo se le due seguenti condizioni sono soddisfatte:*

(i) se  $\{x_k\}$  è una sequenza di punti  $x_k \in \mathcal{F}$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$  allora segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty;$$

(ii) se  $\{x_k\}$  è una sequenza di punti  $x_k \in \mathcal{F}$  tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$ , allora segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty.$$

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** *Necessità.* Supponiamo che tutti gli insiemi di livello siano compatti. Ragionando per assurdo, ammettiamo che una delle due condizioni (i) e (ii) non sia soddisfatta. Se la condizione (i) non è soddisfatta deve esistere una successione  $\{x_k\}$  di punti  $x_k \in \mathcal{F}$  che soddisfa  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$  e che contiene una sottosequenza (ridefinita  $\{x_k\}$ ) per cui esiste uno scalare  $\alpha < \infty$  tale che:

$$f(x_k) \leq \alpha. \quad (1.12)$$

Dalla (1.12) segue che  $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$  per ogni  $k$ . Ma  $\mathcal{L}(\alpha)$  è compatto, quindi limitato, e ciò contraddice l'ipotesi che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$ .

Se, invece, la condizione (ii) non è soddisfatta deve esistere una sequenza di punti  $x_k \in \mathcal{F}$  che soddisfa  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$  e che contiene una sottosequenza (ridefinita  $\{x_k\}$ ) per cui esiste uno scalare  $\alpha < \infty$  tale che la (1.12) è soddisfatta. Di nuovo, questo implica che  $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$  per ogni  $k$ , ma questo, poichè  $\mathcal{L}(\alpha)$  è un sottoinsieme compatto di  $\mathcal{F}$ , contraddice l'assunzione che  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$ .

*Sufficienza.* Supponiamo ora che le condizioni (i) e (ii) siano soddisfatte. Ragionando di nuovo per contraddizione, supponiamo che esista un insieme di livello  $\mathcal{L}(\alpha)$  in  $\mathcal{F}$  che non sia compatto. Se  $\mathcal{L}(\alpha)$  non fosse limitato allora esisterebbe una sequenza di punti  $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$  con  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$  e  $f(x_k) \leq \alpha$ , ma questo contraddirebbe la condizione (i). Se invece  $\mathcal{L}(\alpha)$  fosse limitato ma non chiuso, poichè  $f$  è una funzione continua, questo implicherebbe l'esistenza di una sequenza di punti  $x_k \in \mathcal{L}(\alpha)$  con  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \notin \mathcal{F}$  e  $f(x_k) \leq \alpha$ , che contraddirebbe la condizione (ii).  $\square$

Le proposizioni 1.3.3 and 1.3.4 forniscono delle condizioni sufficienti per l'esistenza delle soluzioni di un problema di minimizzazione in cui l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  è un insieme aperto. In particolare si possono considerare due casi particolari che corrispondono alle situazioni di maggiore interesse.

Il primo dei due casi è quello in cui  $\mathcal{F} = R^n$ .

**Proposizione 1.3.5** *Sia  $f$  una funzione continua su  $R^n$  e si assuma che  $f$  sia coerciva su  $R^n$ , ossia che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty,$$

*per ogni successione  $\{x_k\}$ , con  $x_k \in R^n$ , tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$ . Allora si ha:*

- (i) *tutti gli insiemi di livello  $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in R^n : f(x) \leq \alpha\}$  sono compatti;*
- (ii) *esiste un minimo globale di  $f$  su  $R^n$ ;*

(iii) *l'insieme dei minimi globali di  $f$  su  $R^n$  è un insieme compatto non vuoto.*

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** I punti (i) and (ii) seguono dalle Proposizioni 1.3.3 and 1.3.4; il punto (iii) segue dai punti (i) e (ii), e notando che l'insieme dei minimi globali è l'insieme di livello  $\mathcal{L}(f^*)$ , dove  $f^* = \min_{x \in R^n} f(x)$ .  $\square$

Il secondo caso è quello in cui  $\mathcal{F}$  è un insieme limitato e aperto tale che  $f$  tende all'infinito al tendere verso la frontiera di  $\mathcal{F}$ . Per esempio, questa situazione si presenta nelle minimizzazioni non vincolate di funzioni di barriera. Per questo caso è possibile stabilire la seguente condizione la cui prova è simile a quella della precedente proposizione.

**Proposizione 1.3.6** *Sia  $\mathcal{F}$  un sottoinsieme limitato e aperto di  $R^n$  e sia  $f : \mathcal{F} \rightarrow R$  una funzione continua. Si supponga che*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \infty,$$

*per ogni successione  $\{x_k\}$ , con  $x_k \in \mathcal{F}$ , tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \hat{x} \in \partial\mathcal{F}$ . Allora si ha:*

- (i) *tutti gli insiemi di livello  $\mathcal{L}(\alpha) = \{x \in \mathcal{F} : f(x) \leq \alpha\}$  sono compatti;*
- (ii) *esiste un minimo globale  $x^* \in \mathcal{F}$  di  $f$  su  $\mathcal{F}$*
- (iii) *l'insieme dei minimi globali di  $f$  su  $\mathcal{F}$  è un sottoinsieme compatto non vuoto di  $\mathcal{F}$ .*

## 1.4 Condizioni di ottimalità locale

In questo paragrafo vengono richiamate alcune condizioni *necessarie* (ma, in generale, non sufficienti) perchè un punto assegnato sia un punto di minimo locale (globale) di un problema di minimizzazione.

Si consideri per primo il caso di un problema di ottimizzazione non vincolata del tipo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x \in R^n. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Le due proposizioni successive descrivono le ben note condizioni necessarie di ottimalità per problemi di ottimizzazione non vincolati.

**Proposizione 1.4.1 (Condizione necessaria del primo ordine)** *Sia  $f$  continuamente differenziabile e sia  $\bar{x} \in R^n$  un punto di minimo locale (globale) del Problema (1.13). Allora*

$$\nabla f(\bar{x}) = 0. \tag{1.14}$$

**Proposizione 1.4.2 (Condizioni necessarie del secondo ordine)** *Sia  $f$  due volte continuamente differenziabile e sia  $\bar{x} \in R^n$  un punto di minimo locale (globale) del Problema (1.13). Allora*

$$\nabla f(\bar{x}) = 0, \quad (1.15)$$

$$d^T \nabla^2 f(\bar{x}) d \geq 0, \quad \text{per ogni } d \in R^n. \quad (1.16)$$

In modo da caratterizzare i punti che soddisfano le precedenti condizioni necessarie del primo ordine si introce la seguente definizione.

**Definizione 1.4.3** *Sia  $f$  continuamente differenziabile su  $R^n$ , un punto  $\bar{x} \in R^n$  si dice punto di punto stazionario del Problema (1.13) se*

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

Perciò, da quanto detto, si ha che un punto di minimo locale (globale) del Problema (1.13) è necessariamente un punto stazionario del Problema (1.13).

Passando ai problemi di ottimizzazione vincolata se l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  è un insieme aperto continuano a valere le precedenti condizioni di ottimalità e la precedente definizione di punto stazionario (basta cambiare  $R^n$  con  $\mathcal{F}$ ). La situazione è abbastanza più complessa nel caso in cui l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  non è un insieme aperto. Infatti in questo caso la presenza di un minimo locale (globale) nasce dall'azione combinata della funzione obiettivo e dei vincoli e questo naturalmente si riflette nelle condizioni di ottimalità.

Si assuma (senza grossa perdita di generalità) che l'insieme ammissibile sia dato da:

$$\mathcal{F} := \{x \in R^n : g(x) \leq 0, h(x) = 0\},$$

con  $g : R^n \rightarrow R^m$ ,  $h : R^n \rightarrow R^q$ . Quindi il problema di ottimizzazione considerato diventa:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Associato al precedente problema vincolato si può introdurre la seguente definizione.

**Definizione 1.4.4** *Si definisce funzione Lagrangiana associata al Problema (1.17) la funzione  $L : R^n \times R^m \times R^q \rightarrow R$  data da:*

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x),$$

con  $\lambda \in R^m$  e  $\mu \in R^q$ .

Le prossime proposizioni descrivono le due condizioni necessarie di ottimalità maggiormente usate nell'ambito di problemi di ottimizzazione vincolati non lineari. Entrambe queste condizioni di ottimalità possono essere stabilite solamente nel caso che l'insieme ammissibile sia "sufficientemente regolare". Un modo per assicurare questa regolarità è quello di richiedere la seguente assunzione.

**Assunzione 1.4.1** *In ogni punto  $x \in \mathcal{F}$  i gradienti  $\nabla g_i(x)$ ,  $i \in \{i' : g_{i'}(x) = 0\}$ , e  $\nabla h_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, q$ , sono linearmente indipendenti.*

Utilizzando la precedente assunzione si possono enunciare le seguenti proposizioni.

**Proposizione 1.4.5 (Condizioni di Kuhn-Tucker)** *Siano le funzioni  $f$ ,  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  continuamente differenziabile e si supponga che Assunzione 1.4.1 sia verificata. Se  $\bar{x} \in R^n$  è un punto di minimo locale (globale) del Problema (1.17) allora esistono dei vettori  $\bar{\lambda} \in R^m$  e  $\bar{\mu} \in R^q$  tali che:*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= 0, \\ g(\bar{x}) &\leq 0, \quad h(\bar{x}) = 0, \\ \bar{\lambda}_i &\geq 0, \quad g_i(\bar{x})\bar{\lambda}_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{1.18}$$

**Proposizione 1.4.6 (Condizioni di Kuhn-Tucker del secondo ordine)** *Siano le funzioni  $f$ ,  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  due volte continuamente differenziabile e si supponga che Assunzione 1.4.1 sia verificata. Se  $\bar{x} \in R^n$  è un punto di minimo locale (globale) del Problema (1.17) allora esistono dei vettori  $\bar{\lambda} \in R^m$  e  $\bar{\mu} \in R^q$  tali che:*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= 0, \\ g(\bar{x}) &\leq 0, \quad h(\bar{x}) = 0, \\ \bar{\lambda}_i &\geq 0, \quad g_i(\bar{x})\bar{\lambda}_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned} z^T \nabla^2 L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) z &\geq 0, \quad \forall z \in R^n, z \neq 0 : \\ \nabla g_i(\bar{x})^T z &= 0, \quad \forall i \in \{i' : g_{i'}(\bar{x}) = 0\}, \\ \nabla h_j(\bar{x})^T z &= 0, \quad \forall j = 1, \dots, q. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Analogamente al caso non vincolato si caratterizzano i punti che soddisfano le precedenti condizioni necessarie del primo ordine attraverso la seguente definizione.

**Definizione 1.4.7** *Siano le funzioni  $f$ ,  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, q$  continuamente differenziabile, il punto  $\bar{x} \in R^n$  è detto punto di Kuhn-Tucker del Problema di (1.17) se esistono dei vettori  $\bar{\lambda} \in R^m$  e  $\bar{\mu} \in R^q$ , detti moltiplicatori di Kuhn-Tucker, tali che:*

$$\begin{aligned} \nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) &= 0, \\ g(\bar{x}) &\leq 0, \quad h(\bar{x}) = 0, \\ \bar{\lambda}_i &\geq 0, \quad g_i(\bar{x})\bar{\lambda}_i = 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Perciò, se l'Assunzione 1.4.1 è verificata, ogni punto di minimo locale (globale) del Problema (1.17) è necessariamente un punto di Kuhn-Tucker del Problema (1.13).

## Capitolo 2

# Problemi Particolari di Ottimizzazione Globale

In questo capitolo vengono descritti alcuni esempi di classi di problemi di ottimizzazione le cui strutture particolari permettono di caratterizzare meglio, dal punto di vista matematico, i loro punti di minimo globale rispetto alle condizioni di ottimalità descritte nell'ultima sezione del capitolo precedente.

### 2.1 Problemi di programmazione convessa

Una classe importante dal punto di vista applicativo è quella dei problemi di programmazione convessa. Prima di descrivere questa particolare classe di problemi di minimizzazione, è necessario richiamare le seguenti defizioni.

**Definizione 2.1.1** *Dato un insieme  $C \subseteq R^n$ , si dice che  $C$  è un insieme convesso se comunque scelti due punti  $x, y \in C$  e comunque scelto un scalare  $\alpha \in [0, 1]$  si ha che*

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C.$$

**Definizione 2.1.2** *Sia  $C \subseteq R^n$  un insieme convesso e sia  $f : C \rightarrow R$ . Si dice che  $f$  è convessa su  $C$  se comunque scelti due punti  $x, y \in C$  e comunque scelto un scalare  $\alpha \in [0, 1]$  si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

*si dice che  $f$  è strettamente convessa su  $C$  se comunque scelti due punti  $x, y \in C$ , con  $x \neq y$ , e comunque scelto un scalare  $\alpha \in (0, 1)$  si ha che*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$



**Definizione 2.1.3** Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme convesso e sia  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ . Si dice che  $f$  è concava su  $C$  se comunque scelti due punti  $x, y \in C$  e comunque scelto un scalare  $\alpha \in [0, 1]$  si ha che

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y);$$

si dice che  $f$  è strettamente concava su  $C$  se comunque scelti due punti  $x, y \in C$ , con  $x \neq y$ , e comunque scelto un scalare  $\alpha \in (0, 1)$  si ha che

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

La seguente proposizione richiama alcune delle proprietà delle funzioni convesse.

**Proposizione 2.1.4** Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme convesso aperto. Se  $f$  è continuamente differenziabile su  $C$  allora:

(i)  $f$  è convessa su  $C$  se e solamente se per ogni  $x, y \in C$  si ha:

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x);$$

(ii)  $f$  è strettamente convessa su  $C$  se e solamente se per ogni  $x, y \in C$ , con  $x \neq y$ , si ha:

$$f(y) - f(x) > \nabla f(x)^T (y - x).$$

Se  $f$  è due volte continuamente differenziabile su  $C$  allora:

(iii)  $f$  è convessa su  $C$  se e solamente se per ogni  $x \in C$  si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d \geq 0 \quad \text{per ogni } d \in \mathbb{R}^n;$$

(iv)  $f$  è strettamente convessa su  $C$  se per ogni  $x \in C$  si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d > 0 \quad \text{per ogni } d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0.$$

Le Proprietà (i) e (ii) sono particolarmente significative, come si vedrà in seguito, per lo studio dei punti di minimo di questa classe particolare di funzioni. Le Proprietà (iii) e (iv) sono delle utili condizioni per identificare la convessità di una funzione.

Analogamente al caso di funzioni convesse si può stabilire la seguente proposizione che fornisce un aiuto a riconoscere le funzioni concave.

**Proposizione 2.1.5** Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  un insieme convesso aperto. Se  $f$  è continuamente differenziabile su  $C$  allora:

(i)  $f$  è concava su  $C$  se e solamente se per ogni  $x, y \in C$  si ha:

$$f(y) - f(x) \leq \nabla f(x)^T (y - x);$$

(ii)  $f$  è strettamente concava su  $C$  se e solamente se per ogni  $x, y \in C$ , con  $x \neq y$ , si ha:

$$f(y) - f(x) < \nabla f(x)^T(y - x).$$

Se  $f$  è due volte continuamente differenziabile su  $C$  allora:

(iii)  $f$  è concava su  $C$  se e solamente se per ogni  $x \in C$  si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d \leq 0 \quad \text{per ogni } d \in R^n;$$

(iv)  $f$  è strettamente concava su  $C$  se per ogni  $x \in C$  si ha:

$$d^T \nabla^2 f(x) d < 0 \quad \text{per ogni } d \in R^n, d \neq 0.$$

A questo punto si può introdurre la classe dei problema di programmazione convessa.

**Definizione 2.1.6** Si definisce problema di programmazione convessa un problema di minimizzazione del tipo:

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

in cui  $\mathcal{F}$  è un insieme convesso e  $f$  è una funzione convessa su  $\mathcal{F}$  o, equivalentemente, un problema di massimizzazione del tipo:

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

in cui  $\mathcal{F}$  è un insieme convesso e  $f$  è una funzione concava su  $\mathcal{F}$ .

I problemi di programmazione convessa godono di importanti proprietà descritte nei teoremi seguenti.

**Proposizione 2.1.7 (Coincidenza tra minimi locali e minimi globali)** Sia  $\mathcal{F} \subseteq R^n$  un insieme convesso e  $f$  una funzione convessa (strettamente convessa) su  $\mathcal{F}$ . Allora ogni punto (un punto) di minimo locale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  è anche (l'unico) punto di minimo globale.

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** Sia  $x^*$  un punto di minimo locale di  $f$  su  $\mathcal{F}$ . Dalla definizione (Definizione 1.1.3) di minimo locale deve esistere una sfera aperta  $B(x^*; \rho)$  con  $\rho > 0$  tale che

$$f(x^*) \leq f(y), \quad \text{per ogni } y \in B(x^*; \rho) \cap \mathcal{F}. \quad (2.1)$$

Sia  $x$  un qualsiasi altro punto di  $\mathcal{F}$ . Dalla convessità di  $\mathcal{F}$  si ha che

$$z(\alpha) = (1 - \alpha)x^* + \alpha x \in \mathcal{F}, \quad \text{per ogni } \alpha \in [0, 1].$$

Poichè per  $\alpha = 0$  si ha  $z(0) = x^*$ , è possibile trovare un valore  $\bar{\alpha} \in (0, 1]$  tale che

$$z(\bar{\alpha}) = (1 - \bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x \in B(x^*; \rho) \cap \mathcal{F}.$$

Da cui, sfruttando la relazione (2.1), si ottiene:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})).$$

Utilizzando la convessità della funzione obiettivo si ha:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f((1 - \bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x) \leq (1 - \bar{\alpha})f(x^*) + \bar{\alpha}f(x),$$

che, ricordando che  $\bar{\alpha} > 0$ , implica:

$$f(x^*) \leq f(x). \quad (2.2)$$

Poichè il punto  $x$  è stato scelto arbitrariamente in  $\mathcal{F}$ , la relazione (2.2) dimostra che il punto  $x^*$  è un minimo globale.

Se la funzione è strettamente convessa si ha, invece:

$$f(x^*) \leq f(z(\bar{\alpha})) = f((1 - \bar{\alpha})x^* + \bar{\alpha}x) < (1 - \bar{\alpha})f(x^*) + \bar{\alpha}f(x),$$

da cui:

$$f(x^*) < f(x),$$

che implica che  $x^*$  è l'unico minimo globale.  $\square$

**Proposizione 2.1.8 (Coincidenza tra punti stazionari e minimi globali)** *Sia  $f$  una funzione (strettamente) convessa e continuamente differenziabile su  $R^n$ . Allora un punto stazionario di  $f$  su  $R^n$  è un minimo globale (l'unico minimo globale) di  $f$  su  $R^n$ .*

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** Sia  $x^*$  un punto stazionario di  $f$  su  $R^n$ , cioè (Definizione 1.4.3):

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Comunque scelto  $x \in R^n$ , se la funzione  $f$  è convessa, il punto (i) della Proposizione 2.1.4 assicura che:

$$f(x) - f(x^*) \geq \nabla f(x^*)^T(x - x^*) = 0,$$

mentre se la funzione  $f$  è strettamente convessa il punto (ii) della stessa proposizione implica che:

$$f(x) - f(x^*) > \nabla f(x^*)^T(x - x^*) = 0.$$

Le due precedenti relazioni dimostrano l'enunciato del teorema.  $\square$

**Proposizione 2.1.9 (Coincidenza tra punti di Kuhn-Tucker e minimi globali)**

Sia dato il seguente problema vincolato

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ a_j^T x - b_j = 0 \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (2.3)$$

e sia  $f$  una funzione (strettamente) convessa e continuamente differenziabile su  $R^n$ , siano  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , delle funzioni convesse e continuamente differenziabili su  $R^n$ . Allora un punto di Kuhn-Tucker del Problema 2.3 è un minimo globale (l'unico minimo globale) del Problema 2.3.

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** Prima di tutto si può dimostrare che l'insieme ammissibile del Problema 2.3 è un insieme convesso. Infatti comunque presi due punti  $\hat{x}$  e  $\tilde{x}$  tali che:

$$\begin{aligned} g_i(\hat{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T \hat{x} - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q, \\ g_i(\tilde{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T \tilde{x} - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q, \end{aligned}$$

si ha che il punto  $\bar{x} = \alpha \hat{x} + (1 - \alpha) \tilde{x}$ , per ogni  $\alpha \in [0, 1]$ , soddisfa:

$$\begin{aligned} g_i(\bar{x}) = g_i(\alpha \hat{x} + (1 - \alpha) \tilde{x}) \leq \alpha g_i(\hat{x}) + (1 - \alpha) g_i(\tilde{x}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ a_j^T \bar{x} - b_j = a_j^T (\alpha \hat{x} + (1 - \alpha) \tilde{x}) - b_j = \alpha b_j + (1 - \alpha) b_j - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned}$$

Sia, ora,  $x \in R^n$  un qualsiasi punto ammissibile per il Problema 2.3, cioè un punto che soddisfa

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad a_j^T x - b_j = 0, \quad j = 1, \dots, q. \quad (2.4)$$

Se si indicano con  $\lambda^*$  e  $\mu^*$  i moltiplicatori di Kuhn-Tucker relativi alla Definizione 1.4.7, si ha che  $\lambda^* \geq 0$  ed utilizzando la (2.4) si ha

$$\lambda_i^* g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.5)$$

da cui, utilizzando di nuovo la (2.4), si ha:

$$f(x) \geq f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* (a_j^T x - b_j). \quad (2.6)$$

Dalla convessità di  $f$  e di  $g_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  e dalla linearità dei vincoli di uguaglianza si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*), \\ g_i(x) &\geq g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*), \quad i = 1, \dots, m \\ a_j^T x - b_j &= a_j^T (x - x^*), \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Utilizzando le relazioni (2.7) nella (2.6) si ottiene:

$$f(x) \geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* (g_i(x^*) + \nabla g_i(x^*)^T (x - x^*)) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* (a_j^T (x - x^*)). \quad (2.8)$$

che può essere riscritta mettendo in evidenza il vettore  $(x - x^*)$ :

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \left( \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^q \mu_j^* a_j \right)^T (x - x^*). \quad (2.9)$$

da cui, tenendo conto che  $\nabla h_j = a_j$ ,  $j = 1, \dots, q$ , si ottiene:

$$f(x) \geq f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(x^*) + \nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*)^T (x - x^*). \quad (2.10)$$

Poichè,  $x^*$  è un punto di Kuhn-Tucker si ha che:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \quad \lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

In conclusione la (2.10) e la (2.11) implicano che, comunque scelto un punto ammissibile  $x$  per il Problema 2.3, si ha

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Che dimostra che il punto di Kuhn-Tucker  $x^*$  è un minimo globale del Problema 2.3. Se la funzione  $f$  fosse strettamente convessa allora la prima delle relazioni (2.7) potrebbe essere sostituita da

$$f(x) > f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x - x^*)$$

Ripetendo gli stessi passaggi fatti in precedenza, si arriverebbe alla conclusione che, comunque scelto un punto ammissibile  $x$  per il Problema 2.3, si avrebbe

$$f(x) > f(x^*),$$

dimostrando che il punto  $x^*$  è l'unico minimo globale del Problema 2.3.  $\square$

## 2.2 Problemi di programmazione concava

Un'altra classe di problemi di minimizzazione particolarmente importante è quella dei problemi di programmazione concava. Infatti questi particolari problemi di ottimizzazione sono in grado di modellizzare numerosi problemi che nascono nel campo dell'economia. Inoltre è possibile dimostrare che, sotto opportune ipotesi, molti problemi di ottimizzazione combinatoria possono essere trasformati in problemi (continui) di programmazione concava.

Si definisce *problema di programmazione concava* un problema di minimizzazione del tipo:

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

in cui  $\mathcal{F}$  è un *insieme convesso* e  $f$  è una *funzione concava* su  $\mathcal{F}$  o, equivalentemente, un problema di *massimizzazione* del tipo:

$$\max_{x \in \mathcal{F}} f(x)$$

in cui  $\mathcal{F}$  è un insieme convesso e  $f$  è una funzione convessa su  $\mathcal{F}$ .

I problemi di programmazione concava sono molto più “difficili” di quelli convessi. La difficoltà principale risiede nel fatto che i problemi concavi presentano normalmente molti punti di minimo locale che non sono punti di minimo globale.

Tuttavia, la particolare struttura della funzione obiettivo di questi problemi fornisce comunque informazioni importanti circa i suoi punti di minimo globale. Infatti la seguente proposizione dimostra che le soluzioni ottime dei problemi di programmazione concava, ove esistano, appartengono alla frontiera dell'insieme ammissibile.

**Teorema 2.2.1 (Assenza di soluzioni ottime interne)** *Sia  $\mathcal{F} \subseteq R^n$  un insieme convesso e sia  $f$  una funzione concava e non costante su  $\mathcal{F}$ . Allora, se esiste un punto di minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$ , questo appartiene alla frontiera di  $\mathcal{F}$ .*

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** Supponiamo che il problema ammetta soluzione e che  $x^*$  sia una soluzione ottima. Poichè, per ipotesi,  $f$  non è costante su  $\mathcal{F}$  deve esistere un punto  $\hat{x} \in \mathcal{F}$  tale che

$$f(\hat{x}) > f(x^*).$$

Supponiamo ora che  $x \in \mathcal{F}$  sia un punto interno all'insieme ammissibile. Deve allora esistere una sfera aperta  $B(x; \rho)$  con centro in  $x$  e raggio  $\rho > 0$  tutta contenuta in  $\mathcal{F}$ . Sulla retta congiungente  $\hat{x}$  con  $x$  possiamo allora determinare un  $y \in B(x; \rho) \subset \mathcal{F}$  tale che  $x$  appartenga al segmento  $[\hat{x}, y]$  e risulti  $y \neq x$ , ossia possiamo trovare un  $\alpha$  con  $0 \leq \alpha < 1$  tale che

$$x = (1 - \alpha)\hat{x} + \alpha y.$$

Per la concavità di  $f$  e l'ipotesi che sia  $f(\hat{x}) > f(x^*)$ , tenendo conto del fatto che  $f(y) \geq f(x^*)$  e che  $1 - \alpha > 0$  (perchè  $y \neq x$ ), si ottiene:

$$f(x) \geq (1 - \alpha)f(\hat{x}) + \alpha f(y) > (1 - \alpha)f(x^*) + \alpha f(x^*) = f(x^*).$$

Ciò dimostra che  $f(x) > f(x^*)$  e quindi che non può esistere una soluzione ottima in un punto interno.  $\square$

Nel caso di minimizzazione di funzioni concave con vincoli lineari, vale un risultato simile al Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare. Infatti ripetendo argomenti simili a quelli utilizzati nel Teorema Fondamentale della Programmazione Lineare si ha il seguente teorema.

**Teorema 2.2.2 (Soluzione ottima su un vertice)** *Sia  $\mathcal{F} \subseteq R^n$  un poliedro che ha almeno un vertice e sia  $f$  una funzione concava su  $\mathcal{F}$  che ammetta minimi globali su  $\mathcal{F}$ . Allora, esiste un punto di minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  che coincide con un vertice del poliedro  $\mathcal{F}$ .*

Questo risultato mostra che, come nel caso dei problemi lineari, la ricerca di un minimo globale di una funzione concava su un simpleso si può ridurre al problema di minimizzare la funzione sull'insieme dei vertici del poliedro  $\mathcal{F}$ . Tuttavia, la non linearità della funzione obiettivo non permette di definire un algoritmo, analogo al Metodo del Simpleso per la Programmazione Lineare, che sia in grado di identificare efficientemente i vertici più promettenti trascurando già altri.

## 2.3 Minimizzazione di una funzione quadratica con un vincolo sferico

Come ultimo esempio di problemi particolari di ottimizzazione consideriamo la classe di problemi in cui la funzione obiettivo è una funzione quadratica e l'insieme ammissibile è descritto da un unico vincolo sferico, cioè:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & \|x\|^2 \leq r^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

dove  $Q \in R^{n \times n}$  è una matrice simmetrica,  $c \in R^n$  e  $r \in R$ .

Anche questa classe di problemi riveste un ruolo importante nel campo dell'ottimizzazione sia per la sua capacità di approssimare problemi di minimizzazione più complessi e sia per la sua capacità di rappresentare dei problemi applicativi rilevanti.

Il Problema (2.12) è in grado di rappresentare anche problemi in cui l'insieme non è semplicemente una sfera centrata nell'origine. Infatti se l'insieme ammissibile è, per esempio, una sfera il cui centro  $x_0$  non è l'origine dello spazio, ossia se il problema è del tipo:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & \|x - x_0\|^2 \leq r^2. \end{aligned}$$

si può effettuare la trasformazione di variabili

$$x = y + x_0$$

e ricondursi al problema (2.12).

Un'altro esempio di particolare interesse è il caso in cui il vincolo sferico è sostituito da un vincolo ellissoidale, ossia dal problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & x^T Bx \leq r^2, \end{aligned}$$

in cui  $B$  è una matrice simmetrica definita positiva. Anche in questo caso può riportare al Problema (2.12), effettuando la trasformazione di variabili

$$x = B^{-1/2}y,$$

in cui si è indicato con  $B^{-1/2}$  l'inversa della radice quadrata di  $B$ , che esiste sempre se  $B$  è definita positiva. Utilizzando la trasformazione precedente e ponendo  $B = B^{1/2}B^{1/2}$  ci si riconduce al problema

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2}y^T B^{-1/2}QB^{-1/2}y + c^T B^{-1/2}y \\ & \|y\|^2 \leq r^2, \end{aligned}$$

che è di nuovo della forma (2.12).

Una caratteristica importante per questa classe di problemi è la possibilità di caratterizzarne i minimi globali attraverso delle condizioni di ottimalità *necessarie e sufficienti*.

**Teorema 2.3.1 (Condizioni di ottimo globale)** *Il punto  $x^*$  è un punto di minimo globale del problema (2.12) se e solo se esiste un moltiplicatore  $\lambda^* \in \mathbb{R}$  tale che valgano le condizioni*

- (i)  $Qx^* + c + 2\lambda^*x^* = 0$ ,
- (ii)  $\|x^*\| \leq r$ ,
- (iii)  $\lambda^*(\|x^*\|^2 - r^2) = 0$ ,
- (iv)  $\lambda^* \geq 0$ ,
- (v) *la matrice  $Q + 2\lambda^*I$  è semidefinita positiva.*

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** Stabiliamo innanzitutto la *necessità*. Supponiamo, quindi, che  $x^*$  sia un punto di minimo globale del problema. Prima di tutto si può notare che il gradiente del vincolo  $g(x) = \|x\|^2 - r^2 \leq 0$  è dato da:

$$\nabla g(x) = 2x,$$

quindi se il vincolo è attivo, cioè  $\|x\|^2 = r^2$ , si ha  $\nabla g(x) \neq 0$ . Perciò Assunzione 1.4.1 è soddisfatta e, quindi, nel punto  $x^*$  valgono le condizioni di ottimalità di Kuhn-Tucker descritte dal Teorema 1.4.5. Perciò, si può definire la funzione Lagrangiana relativa al problema (2.12):

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \lambda (\|x\|^2 - r^2),$$

in cui  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dopodichè, il Teorema 1.4.5 implica l'esistenza di un moltiplicatore  $\lambda^*$  tale che:

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \lambda^*) &= Qx^* + c + 2\lambda^*x^* = 0, \\ \lambda^*(\|x^*\|^2 - r^2) &= 0, \\ \lambda^* &\geq 0, \end{aligned}$$

che dimostrano le condizioni (i), (iii), (iv) dell'enumciato del teorema. La condizione (ii) segue dall'ammissibilità del minimo globale  $x^*$ . Per dimostrare che anche la condizione (v) è vera si considerano in due casi:  $\|x^*\| < r$  e  $\|x^*\| = r$ .

Se  $\|x^*\| < r$  allora  $x^*$  è un minimo globale non vincolato e la condizione (iii) implica che  $\lambda^* = 0$ . Perciò il Teorema 1.4.2 assicura che la matrice Hessiana

$$\nabla^2 f(x) = Q = Q + 2\lambda^*I$$

è semidefinita positiva.

Se  $\|x^*\| = r$ , il Teorema 1.4.6 implica che

$$z^T(Q + 2\lambda^*I)z \geq 0, \quad \text{per ogni } z \in \mathbb{R}^n \quad \text{tale che } z^T x^* = 0. \quad (2.13)$$



Per passare dalla precedente proprietà (2.13) alla dimostrazione del punto (v) del teorema è necessario sfruttare l'ipotesi che il punto  $x^*$  è un minimo globale del Problema (2.12). Infatti, poichè  $x^*$  è un minimo globale del problema (2.12) allora  $\|x^*\| = r$  e, per ogni  $x$  tale che  $\|x\| = r$ , si ha che:

$$\frac{1}{2}x^T Qx + c^T x - \frac{1}{2}(x^*)^T Qx^* - c^T x^* - \lambda^*(\|x^*\|^2 - \|x\|^2) \geq 0, \quad (2.14)$$

che può essere riscritta nella forma:

$$\frac{1}{2}x^T (Q + 2\lambda^* I) x - \frac{1}{2}(x^*)^T (Q + 2\lambda^* I) x^* + c^T (x - x^*) \geq 0, \quad (2.15)$$

Utilizzando il punto (i), è possibile eliminare il vettore  $c$  dalla relazione (2.15), ottenendo:

$$\frac{1}{2}x^T (Q + 2\lambda^* I) x - \frac{1}{2}(x^*)^T (Q + 2\lambda^* I) x^* - (x^*)^T (Q + 2\lambda^* I) (x - x^*) \geq 0, \quad (2.16)$$

da cui, semplificando, si ottiene:

$$\frac{1}{2}(x - x^*)^T (Q + 2\lambda^* I) (x - x^*) \geq 0, \quad (2.17)$$

per ogni  $x$  tale che  $\|x\| = r$ .

Le relazioni (2.13) e (2.17) permettono di dimostrare che la matrice  $Q + 2\lambda^* I$  è semi-definita positiva anche nel caso in cui  $\|x^*\| = r$ . Infatti comunque preso un vettore  $z \in R^n$  si ha: se  $z^T x^* = 0$  allora vale la (2.13); se  $z^T x^* \neq 0$  si può definire il punto

$$\tilde{x} = x^* - \frac{2z^T x^*}{\|z\|^2} z,$$

che soddisfa la condizione  $\|\tilde{x}\| = \|x^*\| = r$ . Utilizzando la (2.17) si ottiene:

$$\frac{1}{2}(\tilde{x} - x^*)^T (Q + 2\lambda^* I) (\tilde{x} - x^*) = 2 \left( \frac{z^T x^*}{\|z\|^2} \right)^2 z^T (Q + 2\lambda^* I) z \geq 0, \quad (2.18)$$

che completa la dimostrazione del punto (v) del teorema.

Dimostriamo ora la sufficienza. Si assuma che  $x^*$  e  $\lambda^*$  siano tali che valgano le condizioni (i)-(v) e si deve dimostrare che  $x^*$  è un minimo globale del problema 2.12.

Ricordando la Proposizione 2.1.4, il punto (v) implica che la funzione quadratica

$$p(x) = \frac{1}{2}x^T (Q + 2\lambda^* I) x + c^T x$$

è una funzione convessa. Il punto (i), invece, mostra che  $x^*$  è un punto stazionario di  $p(x)$ . Ciò implica, ricordando proposizione 2.1.8, che  $p(x)$  ha un punto di minimo globale non vincolato in  $x^*$  e di conseguenza si può scrivere, per ogni  $x \in R^n$ :

$$\frac{1}{2}x^T (Q + 2\lambda^* I) x + c^T x \geq \frac{1}{2}x^{*T} (Q + 2\lambda^* I) x^* + c^T x^*. \quad (2.19)$$

Che implica che, per ogni  $x \in R^n$ :

$$\frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \geq \frac{1}{2}x^{*T} Qx^* + c^T x^* + \lambda^*(\|x^*\|^2 - \|x\|^2). \quad (2.20)$$

Ora si hanno nuovamente due casi:  $\|x^*\| < r$  oppure  $\|x^*\| = r$ . Se  $\|x^*\| < r$ , dalla condizione (iii) segue  $\lambda^* = 0$  e quindi la (2.20) implica che:

$$\frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \geq \frac{1}{2}x^{*T} Qx^* + c^T x^*. \quad (2.21)$$

per ogni  $x \in R^n$ . Da cui segue che  $x^*$  è un punto di minimo globale per la funzione obiettivo del problema 2.12 su tutto  $R^n$  e quindi, a maggior ragione, sull'insieme ammissibile.

Se invece  $\|x^*\| = r$ , la condizione (iv) implica che, per ogni  $x$  tale che  $\|x\| \leq r$  si ha:

$$\lambda^*(\|x^*\|^2 - \|x\|^2) = \lambda^*(r^2 - \|x\|^2) \geq 0.$$

Utilizzando ancora la (2.20) si ha che vale nuovamente la (2.21) per ogni  $x \in R^n$  tale che  $\|x\|^2 \leq r^2$  da cui segue che, anche in questo caso,  $x^*$  è un punto di minimo globale del problema 2.12. Ciò completa la dimostrazione.  $\square$

Il precedente risultato, oltre alla sua importanza dal punto di vista teorico, ha un notevole interesse dal punto di vista algoritmico. Infatti alcuni metodi proposti per determinare il minimo globale del Problema 2.12 si basano sull'idea di determinare direttamente un punto  $x^*$  ed un moltiplicatore  $\lambda^*$  che soddisfano le condizioni (i)-(v) del precedente teorema. Un altro possibile approccio per risolvere il Problema 2.12 è quello di cercare di adattare alla particolare struttura del Problema 2.12 i metodi di ottimizzazione locale, cioè metodi che permettono di trovare efficientemente punti di Kuhn-Tucker di un problema vincolato. L'utilizzazione di questi metodi locali può portare comunque alla determinazione di un minimo globale del Problema 2.12. Infatti, sfruttando le condizioni necessarie e sufficienti descritte dal Teorema 2.3.1, si può dimostrare la seguente proposizione che apre la possibilità a questi metodi di non fermarsi in un punto di Kuhn Tucker del Problema 2.12 che non è un ottimo globale. In particolare, la seguente proposizione mostra che, dato un punto di Kuhn Tucker che non è un ottimo globale, si può trovare analiticamente un punto ammissibile in cui il valore della funzione obiettivo del Problema 2.12 è più basso.

**Proposizione 2.3.2** *Sia  $\bar{x} \in R^n$  un punto di Kuhn-Tucker che non è un minimo globale del Problema 2.12, cioè un punto per cui esiste un moltiplicatore  $\bar{\lambda} \in R$  per cui valgono le condizioni (i)-(iv) del Teorema 2.3.1 mentre la condizione (v) è violata. Allora è possibile definire un punto  $\hat{x}$  tale che  $\|\hat{x}\|^2 \leq r^2$  e*

$$\frac{1}{2}\hat{x}^T Q\hat{x} + c^T \hat{x} < \frac{1}{2}\bar{x}^T Q\bar{x} + c^T \bar{x}. \quad (2.22)$$

**(la seconda parte dell'enunciato del teorema non fa parte del programma di esame)**

*Il punto  $\hat{x}$  è determinato nella seguente maniera.*

(a) Se  $c^T \bar{x} > 0$  allora

$$\hat{x} = -\bar{x}.$$

(b) Se  $c^T \bar{x} \leq 0$ , sia  $z \in R^n$  un vettore tale che

$$z^T(Q + 2\bar{\lambda}I)z < 0, \quad (2.23)$$

allora

(i) se  $\|\bar{x}\|^2 < r^2$ ,

$$\hat{x} = \bar{x} + \alpha z$$

con

$$0 < \alpha \leq \frac{-z^T \bar{x} + \left[ (z^T \bar{x})^2 + (r^2 - \|\bar{x}\|^2) \|z\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\|z\|^2}.$$

(ii) se  $\|\bar{x}\|^2 = r^2$  e  $\bar{x}^T z \neq 0$ ,

$$\hat{x} = \bar{x} - 2 \frac{\bar{x}^T z}{\|z\|^2} z.$$

(iii) se  $\|\bar{x}\|^2 = r^2$  e  $\bar{x}^T z = 0$ ,

$$\hat{x} = \bar{x} - 2 \frac{(\bar{x} + \alpha z)^T \bar{x}}{\|\bar{x} + \alpha z\|^2} (\bar{x} + \alpha z) = \bar{x} - 2 \frac{r^2}{r^2 + \alpha^2 \|z\|^2} (\bar{x} + \alpha z)$$

con

$$\alpha > \frac{c^T z - \left[ (c^T z)^2 + (c^T \bar{x})(z^T(Q + 2\bar{\lambda}I)z) \right]^{\frac{1}{2}}}{z^T(Q + 2\bar{\lambda}I)z}.$$

**Prova (la prova non fa parte del programma di esame).** Nel caso (a), il punto  $\hat{x}$  è naturalmente ammissibile e si ha:

$$\frac{1}{2} \hat{x}^T Q \hat{x} + c^T \hat{x} = \frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x} - |c^T \bar{x}| = \frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x} + c^T \bar{x} - 2|c^T \bar{x}| < \frac{1}{2} \bar{x}^T Q \bar{x} + c^T \bar{x}.$$

Si consideri ora il caso (b).

Nel sottocaso (i) le condizioni di Kuhn-Tucker, cioè le condizioni (i)-(iv) del Teorema 2.3.1 si ha che:

$$\bar{\lambda} = 0 \quad (2.24)$$

$$Q\bar{x} + c = 0, \quad (2.25)$$

da cui segue, ricordando anche la (2.23), che il vettore  $z$  soddisfa alla seguente condizione:

$$z^T Q z < 0. \quad (2.26)$$

Perciò, le (2.25) e (2.26) implicano che, per ogni  $\alpha > 0$  il valore della funzione obiettivo calcolata nel punto  $\hat{x} = \bar{x} + \alpha z$  soddisfa le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\hat{x}^T Q \hat{x} + c^T \hat{x} &= \frac{1}{2}(\bar{x} + \alpha z)^T Q (\bar{x} + \alpha z) + c^T (\bar{x} + \alpha z) \\ &= \frac{1}{2}\bar{x}^T Q \bar{x} + c^T \bar{x} + \frac{1}{2}\alpha^2 z^T Q z + \alpha z^T (Q \bar{x} + c) = \frac{1}{2}\bar{x}^T Q \bar{x} + c^T \bar{x} + \frac{1}{2}\alpha^2 z^T Q z \\ &< \frac{1}{2}\bar{x}^T Q \bar{x} + c^T \bar{x}. \end{aligned}$$

Inoltre ricordando che

$$\|\bar{x} + \alpha z\|^2 = \alpha^2 \|\bar{z}\|^2 + 2\alpha z^T \bar{x} + \|\bar{x}\|^2,$$

segue che se si sceglie  $\alpha \leq \tilde{\alpha}$  con

$$\tilde{\alpha} = \frac{-z^T \bar{x} + \left[ (z^T \bar{x})^2 + \|\bar{x}\|^2 - r^2 \|z\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\|z\|^2}$$

si ha che  $\|\hat{x}\|^2 \leq r^2$ .

Si consideri ora il sottocaso (ii). Sia  $\hat{x}$  il vettore definito da

$$\hat{x} = \bar{x} - 2 \frac{\bar{x}^T z}{\|z\|^2} z.$$

e che, per la sua particolare struttura, è tale che  $\|\hat{x}\|^2 = r^2$ .

Sia  $p(x)$  una funzione quadratica definita da:

$$p(x) = \frac{1}{2}x^T (Q + 2\bar{\lambda}I)x + c^T x. \quad (2.27)$$

La condizione (i) del Teorema 2.3.1 e la (2.23) implicano le seguenti relazioni per i valori della funzione  $p(x)$ .

$$\begin{aligned} p(\hat{x}) &= p\left(\bar{x} - 2 \frac{\bar{x}^T z}{\|z\|^2} z\right) \\ &= \frac{1}{2}\bar{x}^T (Q + 2\bar{\lambda}I)\bar{x} + c^T \bar{x} + 2 \frac{|\bar{x}^T z|^2}{\|z\|^4} z^T (Q + 2\bar{\lambda}I)z - 2 \frac{\bar{x}^T z}{\|z\|^4} z^T ((Q + 2\bar{\lambda}I)\bar{x} + c) \\ &= p(\bar{x}) + 2 \frac{|\bar{x}^T z|^2}{\|z\|^4} z^T (Q + 2\bar{\lambda}I)z < p(\bar{x}) \end{aligned}$$

Quindi, ricordando, l'espressione (2.27) si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\hat{x}^T Q \hat{x} + c^T \hat{x} < \frac{1}{2}\bar{x}^T Q \bar{x} + c^T \bar{x} + \bar{\lambda}(\|\bar{x}\|^2 - \|\hat{x}\|^2) = \frac{1}{2}\bar{x}^T Q \bar{x} + c^T \bar{x},$$

che dimostra il teorema anche nel caso (ii).

Per quanto riguarda il sottocaso (iii), si definisce il vettore

$$\bar{s} = \bar{x} + \alpha z \quad (2.28)$$

con  $\alpha > 0$ . Per prima cosa si può notare che, per costruzione, il vettore  $\bar{s}$  è tale che  $\bar{x}^T \bar{s} \neq 0$ , infatti:

$$\bar{s}^T \bar{x} = (\bar{x} + \alpha z)^T \bar{x} = \bar{x}^T \bar{x} = r^2. \quad (2.29)$$

Utilizzando nuovamente la condizione (i) del Teorema 2.3.1 si può scrivere:

$$\begin{aligned} \bar{s}^T (Q + 2\bar{\lambda}I) \bar{s} &= \bar{x}^T (Q + 2\bar{\lambda}I) \bar{x} + \alpha^2 z^T (Q + 2\bar{\lambda}I) z + 2\alpha \bar{x}^T (Q + 2\bar{\lambda}I) z \\ &= -\alpha^2 \left| z^T (Q + 2\bar{\lambda}I) z \right| - 2\alpha c^T z + |c^T \bar{x}|. \end{aligned}$$

Risolvendo l'equazione quadratica in  $\alpha$ , che compare a sinistra dell'ultima uguaglianza, si ottiene che l'unica soluzione positiva è data da:

$$\bar{\alpha} = \frac{-c^T z + \left[ (c^T z)^2 + |c^T \bar{x}| |z^T (Q + 2\bar{\lambda}I) z| \right]^{\frac{1}{2}}}{|z^T (Q + 2\bar{\lambda}I) z|}.$$

Da questo si ottiene che per tutti i valori di  $\alpha$  tali che  $\alpha > \bar{\alpha}$  il punto  $\bar{s}$ , dato dalla (2.28), soddisfa la seguente relazione:

$$\bar{s}^T (Q + 2\bar{\lambda}I) \bar{s} < 0. \quad (2.30)$$

A questo punto, poichè il vettore  $\bar{s}$  soddisfa sia la (2.29) che la (2.30), si possono ripetere gli stessi argomenti utilizzati per dimostrare il caso (ii) (con il vettore  $z$  sostituito dal vettore  $\bar{s}$ ) per dimostrare che nel punto ammissibile:

$$\hat{x} = \bar{x} - 2 \frac{\bar{x}^T (\bar{x} + \alpha z)}{(\bar{x} + \alpha z)^T (\bar{x} + \alpha z)} (\bar{x} + \alpha z),$$

con  $\alpha > \bar{\alpha}$ , si ha una diminuzione del valore della funzione obiettivo rispetto a quello che si aveva in  $\bar{x}$ .  $\square$

Si può notare che l'esistenza di un vettore  $z$  tale che  $z^T (Q + 2\bar{\lambda}I) z < 0$ , necessaria nel caso (b) del precedente teorema, è garantita dall'ipotesi che il vettore  $\bar{x}$  è un punto di Kuhn-Tucker del Problema 2.12 che non è un ottimo globale e che, quindi, la condizione (v) del Teorema 2.3.1 non è soddisfatta.

La precedente proposizione assicura che, una volta determinato con un metodo di minimizzazione locale un punto di Kuhn-Tucker del Problema (2.12), si può determinare analiticamente un nuovo punto ammissibile in cui la funzione obiettivo assume valore strettamente inferiore e da cui si può fare partire una nuova minimizzazione locale. Tale minimizzazione locale produrrà un nuovo punto di Kuhn-Tucker in cui la funzione è strettamente diminuita rispetto al punto di Kuhn-Tucker ottenuto precedentemente. Ripetendo questo procedimento si possono produrre punti di Kuhn-Tucker con valori della funzione obiettivo strettamente decrescenti. In particolare si può definire il seguente algoritmo

**Algoritmo per il Problema 2.12.**

*Passo 0:* si determina un punto  $x_0^0$  tale che  $\|x_0^0\| \leq r$  e si pone  $k = 0$ ;

*Passo 1:* partendo da  $x_k^0$  si applica un algoritmo di ottimizzazione locale ottenendo un punto di Kuhn-Tucker  $x_k^*$  in cui il valore della funzione obiettivo non è peggiorato rispetto al punto  $x_k^0$ ;

*Passo 2:* Se  $x_k^*$  è un minimo globale allora Stop;

*Passo 3:* si determina un punto  $x_{k+1}^0$  tale che  $\|x_{k+1}^0\| \leq r$  ed in cui il valore della funzione obiettivo è migliorato rispetto al punto  $x_k^*$ ;

*Passo 4:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 1.

La prossima proposizione, mostrando che il Problema 2.12 ha un numero finito di punti di Kuhn-Tucker, assicura che dopo un numero finito di applicazioni di minimizzazioni locali si determina necessariamente un minimo globale.

**Proposizione 2.3.3** *Il numero di distinti valori della funzione obiettivo del Problema (2.12) in punti di Kuhn-Tucker è limitato superiormente da  $\min\{2m + 2, 2n + 1\}$ , dove  $m$  è il numero dei autovalori negativi distinti della matrice  $Q$  della funzione obiettivo.*

## Capitolo 3

# Introduzione ai Metodi di Ottimizzazione Globale

In questo capitolo, dopo aver richiamato le proprietà dei metodi di ottimizzazione locali, vengono riportati alcuni risultati che permettono di chiarire alcune difficoltà teoriche intrinseche al problema di determinare il minimo globale di un problema di minimizzazione e di delineare alcuni limiti necessariamente presenti nei vari metodi di ottimizzazione globale.

### 3.1 Metodi di ottimizzazione locale

La maggior parte dei metodi ed algoritmi proposti in letteratura appartengono alla classe chiamata *metodi di ottimizzazione locale*. Questa classe di metodi, partendo da un punto iniziale  $x_0 \in R^n$ , cercano di produrre una sequenza di punti  $\{x_k\}$  che abbia una "qualche proprietà di convergenza" verso punti di minimo locale del problema. Questi metodi cercano di sfruttare tutte le informazioni locali che possono essere estratte dal problema (per esempio: calcolo delle derivate prime della funzione obiettivo e dei vincoli, calcolo delle derivate seconde, valutazione della funzione obiettivo e dei vincoli in punti vicini al punto corrente) e di utilizzare il fatto che una qualsiasi funzione può essere approssimata localmente abbastanza bene da una funzione lineare o da una funzione quadratica. In realtà, in assenza di particolari proprietà della funzione obiettivo e dei vincoli, le sequenze di punti prodotte da questi metodi non presentano "proprietà di convergenza" verso dei minimi locali del problema, ma piuttosto verso punti che soddisfano delle condizioni necessarie di ottimo locale.

#### 3.1.1 Convergenza globale dei metodi locali per problemi non vincolati

Come prima cosa importante da chiarire è che il termine *convergenza globale* non fa riferimento ad una "convergenza" verso un minimo globale del problema ma, piuttosto, al fatto che la particolare proprietà di convergenza vale qualsiasi sia il punto iniziale

$x_0 \in R^n$ . Mentre si definisce *convergenza locale* il caso in cui la particolare proprietà vale solamente se il punto iniziale è contenuto in un particolare intorno del punto di interesse.

Nell'ambito dei problemi di ottimizzazione non vincolata, lo studio delle proprietà teoriche dei vari metodi proposti viene frequentemente svolta ipotizzando che l'insieme di livello  $\mathcal{L}_0$  (definito dalla (1.9) con  $\mathcal{F} = R^n$ ) sia compatto. Questa assunzione garantisce che la sequenza di punti prodotta appartenga ad un insieme compatto e che, quindi, abbia dei punti di accumulazione.

La maggior parte degli algoritmi locali per problemi di ottimizzazione non vincolata vengono definiti globalmente convergenti se presentano una proprietà del tipo:

*comunque scelto un punto iniziale  $x_0 \in R^n$  ogni (oppure un) punto di accumulazione  $\bar{x} \in R^n$  della sequenza di punti  $\{x_k\}$  prodotta dall'algoritmo è un punto stazionario della funzione obiettivo (cioè soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità del primo ordine) ed inoltre  $f(\bar{x}) < f(x_0)$ .*

Recentemente sono stati proposti dei nuovi algoritmi che, a prezzo di un maggior costo computazionale, sono in grado di selezionare maggiormente i punti stazionari che vengono identificati dalla sequenza di punti prodotta dall'algoritmo. Infatti per questi algoritmi più recenti si può stabilire la seguente proprietà di convergenza:

*comunque scelto un punto iniziale  $x_0 \in R^n$  ogni punto di accumulazione  $\bar{x} \in R^n$  della sequenza di punti  $\{x_k\}$  prodotta dall'algoritmo soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità del secondo ordine descritte in Proposizione 1.4.2) ed inoltre  $f(\bar{x}) < f(x_0)$ .*

### 3.1.2 Convergenza verso un minimo globale dei metodi locali per problemi non vincolati

Molti algoritmi locali per problemi di ottimizzazione non vincolata presentano una proprietà estremamente interessante dal punto di vista dei metodi di ottimizzazione globale. Infatti essi hanno la proprietà di essere "attratti localmente" da un minimo globale  $x^*$ . tale proprietà può essere formalizzata nella seguente maniera.

**Proprietà 1.** *Se  $\{x_k\}$  è la sequenza di punti generata dall'algoritmo e se  $x^*$  è un minimo globale di  $f$  su  $R^n$ , esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che se, per un indice  $\bar{k}$ , si ha  $x_{\bar{k}} \in B(x^*; \varepsilon)$  allora:*

- (i)  $x_k \in B(x^*; \varepsilon)$  per tutti i  $k \geq \bar{k}$ ;
- (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ .

Se la funzione obiettivo  $f$  è due volte continuamente differenziabile in  $R^n$  e se nel minimo globale  $x^* \in R^n$  di  $f$  su  $R^n$  la matrice Hessiana  $\nabla^2 f(x^*)$  è definita positiva, si può dimostrare molti metodi di ottimizzazione non vincolata presentano la precedente proprietà. Tra questi si possono ricordare il metodo di Newton, la maggior parte delle sue modifiche globalmente convergenti ed un'ampia classe di metodi che non utilizzano le derivate della funzione obiettivo.



Come si vedrà in seguito questa proprietà permetterà di definire delle classi di algoritmi di minimizzazione globale che cercano di sfruttare al loro interno le potenzialità dei metodi di ottimizzazione locale.

### 3.1.3 Convergenza globale dei metodi locali per problemi vincolati

Come è facile intuire, i problemi di ottimizzazione vincolata presentano un ordine di difficoltà notevolmente più alto rispetto a problemi non vincolati. Questo motiva il numero limitato dei metodi locali globalmente convergenti proposti per risolvere questa classe di problemi di ottimizzazione.

Analogamente al caso non vincolato, un algoritmo per problemi vincolati viene definito globalmente convergente se, sotto opportune ipotesi (molto più articolate che la semplice compattezza di un insieme di livello richiesta per gli algoritmi per problemi non vincolati), presenta la seguente proprietà:

*comunque scelto un punto iniziale  $x_0 \in R^n$  ogni (oppure un) punto di accumulazione  $\bar{x} \in R^n$  della sequenza di punti  $\{x_k\}$  prodotta dall'algoritmo è un punto di Kuhn-Tucker (del problema vincolato (cioè soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità del primo ordine) ed inoltre, se  $x_0 \in \mathcal{F}$ , allora  $f(\bar{x}) < f(x_0)$ .*

Da poco si è avviata un'attività di ricerca nel campo dell'ottimizzazione vincolata rivolta verso la definizione di metodi che siano in grado di convergere verso punti che soddisfano le condizioni necessarie di ottimo del secondo ordine, cioè algoritmi che presentano delle proprietà di convergenza del tipo:

*comunque scelto un punto iniziale  $x_0 \in R^n$  ogni punto di accumulazione  $\bar{x} \in R^n$  della sequenza di punti  $\{x_k\}$  prodotta dall'algoritmo soddisfa le condizioni necessarie di ottimalità del secondo ordine (descritte in Proposizione 1.4.6) ed inoltre, se  $x_0 \in \mathcal{F}$  allora  $f(\bar{x}) < f(x_0)$ .*

### 3.1.4 Soluzione di sistemi di equazioni e disequazioni non lineari ed algoritmi per problemi vincolati

Come detto precedentemente, gli algoritmi globalmente convergenti proposti per risolvere problemi di ottimizzazione vincolata sono in grado di determinare, a partire da un qualsiasi punto iniziale, punti che soddisfano le condizioni di Kuhn-Tucker. Ricordando la Proposizione 1.4.5, questi punti appartengono all'insieme ammissibile. Perciò, se si fa riferimento ad un problema del tipo (1.17), questi algoritmi sono in grado di determinare punti che soddisfano il seguente sistema di equazioni e disequazioni non lineari:

$$\begin{aligned} h_j(x) &= 0 & j &= 1, \dots, q \\ g_i(x) &\leq 0 & i &= 1, \dots, m. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Viceversa, determinare la soluzione di un generico sistema di equazioni e disequazioni non lineari del tipo (3.1) equivale a trovare un punto di Kuhn-Tucker di un problema di minimizzazione in cui l'insieme ammissibile è dato da tutti i punti che soddisfano le (3.1) e la cui funzione obiettivo è identicamente nulla ( $f(x) = 0$  per ogni  $x \in R^n$ ).

Come detto nella Sottosezione 1.2.1, un punto  $\bar{x} \in R^n$  che soddisfa il sistema (3.1) è anche un minimo globale di un problema di ottimizzazione non vincolata del tipo:

$$\begin{aligned} \min \quad & w(x) \\ & x \in R^n, \end{aligned} \quad (3.2)$$

dove  $w(x)$  è una qualsiasi funzione che penalizza la violazione del sistema (3.1), per esempio:

$$w(x) = \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^2 + \sum_{j=1}^q h_j(x)^2.$$

Questo sembrerebbe indicare che i metodi di ottimizzazione vincolata, sebbene di natura locale, presentino anche potenzialità globali, infatti sarebbero in grado di risolvere una importante classe di problemi di ottimizzazione globale (quella descritta da (3.2)).

Purtroppo, questa indicazione è falsa. Infatti tutti questi metodi di ottimizzazione vincolata, per essere globalmente convergenti, richiedono che siano verificate alcune ipotesi. Queste ipotesi semplificano drasticamente la natura del Problema 3.2 e, in particolare, sono in grado di garantire che questo problema può essere risolto utilizzando algoritmi locali.

Praticamente, tutti gli algoritmi di ottimizzazione vincolata globalmente convergenti richiedono, in maniera più o meno nascosta, almeno la seguente ipotesi.

**Assunzione 3.1.1** *In ogni punto  $x \in R^n$  che non soddisfa il sistema (3.1), il seguente sistema di equazioni:*

$$\sum_{i \in \{\tilde{i} : g_{\tilde{i}}(x) > 0\}} \alpha_i \nabla g_i(x) + \sum_{j \in \{\tilde{j} : h_{\tilde{j}}(x) \neq 0\}} \beta_j \nabla h_j(x) = 0,$$

dove  $\alpha_i \in R_+$ , con  $i \in \{\tilde{i} : g_{\tilde{i}}(x) > 0\}$  e  $\beta_j \in R$ , con  $j \in \{\tilde{j} : h_{\tilde{j}}(x) \neq 0\}$ , implica che

$$\alpha_i = 0, \quad i \in \{\tilde{i} : g_{\tilde{i}}(x) > 0\}, \quad \beta_j = 0, \quad j \in \{\tilde{j} : h_{\tilde{j}}(x) \neq 0\}.$$

La precedente assunzione può essere interpretata come un indebolimento della richiesta che, in ogni punto non ammissibile, i gradienti dei vincoli violati siano linearmente indipendenti. Se vale l'Assunzione 3.1.1, la difficoltà di determinare il minimo globale del Problema (3.2) si semplifica drasticamente, infatti si ha la seguente proposizione.

**Proposizione 3.1.1** *Se vale l'Assunzione 3.1.1 allora ogni punto stazionario del Problema (3.2) è un minimo globale dello stesso problema.*

**Prova.** Sia  $\bar{x} \in R^n$  un punto stazionario del Problema (3.2), cioè un punto tale che:

$$\nabla w(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m 2 \max\{0, g_i(\bar{x})\} \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^q 2h_j(\bar{x}) \nabla h_j(\bar{x}) = 0. \quad (3.3)$$

La precedente relazione che può essere riscritta nella seguente maniera:

$$\nabla w(\bar{x}) = \sum_{i \in \{\tilde{i} : g_{\tilde{i}}(\bar{x}) > 0\}} \alpha_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{j \in \{\tilde{j} : h_{\tilde{j}}(\bar{x}) \neq 0\}} \beta_j \nabla h_j(\bar{x}) = 0, \quad (3.4)$$

con  $\alpha_i = 2 \max\{0, g_i(\bar{x})\}$  e  $\beta_j = 2h_j(\bar{x})$ .

Se per assurdo il punto  $\bar{x}$  non fosse il minimo globale si avrebbe che  $w(\bar{x}) > 0$ . Ricordando la definizione di  $w$ , seguirebbe che qualche relazione del sistema (3.1) sarebbe violata e che, quindi, esisterebbe almeno un indice  $\tilde{i}$  tale che  $\alpha_{\tilde{i}} = 2 \max\{0, g_{\tilde{i}}(\bar{x})\} > 0$  oppure un indice  $\tilde{j}$  tale che  $\beta_{\tilde{j}} = 2h_{\tilde{j}}(\bar{x}) \neq 0$ . Ma l'esistenza di questi indici e la (3.4) produrrebbero un assurdo con l'Assunzione 3.1.1.  $\square$

## 3.2 Caratterizzazione dei problemi di ottimizzazione globale

Per quanto richiamato nella precedente sezione, tutti i metodi locali per la programmazione non lineare possono al più determinare punti che soddisfano le condizioni necessarie di ottimo locale e che quindi potrebbero addirittura non essere punti di minimo locale. Perciò questi metodi sono soddisfacenti in tutti quei problemi applicativi in cui si vuole migliorare una situazione iniziale. Tale situazione iniziale è rappresentata dal vettore  $x_0 \in \mathcal{F}$  a cui corrisponde una prestazione descritta dal valore della funzione obiettivo  $f(x_0)$ . Perciò, in questi casi è sufficiente determinare un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  in cui  $f(\bar{x}) < f(x_0)$  e che possa essere considerato un buon candidato ad essere un minimo locale (cioè un punto che almeno soddisfi le condizioni necessarie di ottimi locale).

Sfortunatamente, come visto brevemente nel primo capitolo, in molti problemi applicativi è, invece, assolutamente necessario determinare il minimo globale di una funzione obiettivo su un insieme ammissibile. Tali problemi vengono spesso meglio caratterizzati descrivendoli nella seguente maniera più esplicita:

$$\begin{aligned} \min \text{ glob } f(x) \\ x \in \mathcal{F}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

La maggiore difficoltà a risolvere in maniera soddisfacente questo tipo di problemi segue fondamentalmente dai seguenti due aspetti:

- la presenza di un elevato numero di minimi locali di cui solo alcuni sono anche minimi globali e spesso con valori estremamente diversi della funzione obiettivo;
- la mancanza di caratterizzazioni matematiche semplici dei punti di minimo globale.

Il primo punto mette in evidenza l'assoluta inadeguatezza dei metodi locali a risolvere anche in maniera approssimata un problema di ottimizzazione globale. Invece, il secondo punto indica che, a differenza dei metodi locali, le condizioni di ottimalità proposte per caratterizzare i minimi globali non sono direttamente utilizzabili come basi su cui ispirarsi per definire nuovi algoritmi di ottimizzazione globale. Nel seguito riportiamo alcuni esempi di tali caratterizzazioni matematiche dei minimi globali. Tuttavia, ogni trattazione teorica riguante i problemi di ottimizzazione globale, può essere effettuata se l'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  è sufficientemente regolare. Per assicurare questa regolarità viene spesso richiesta la seguente assunzione.

**Assunzione 3.2.1** L'insieme ammissibile  $\mathcal{F} \subset R^n$  è un insieme non vuoto e compatto ed è tale che:

$$\mathcal{F} = Cl(Int(\mathcal{F})), \quad (3.6)$$

dove  $Cl()$  indica la chiusura di un insieme e  $Int()$  l'interno di un insieme.

Spesso, in letteratura, insiemi che soddisfano all'Assunzione 3.2.1 vengono detti *insiemi robusti*.

Si può notare che la relazione (3.6) implica che un insieme robusto  $\mathcal{F}$  gode della seguente proprietà:

comunque scelti  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  e  $\bar{\varepsilon} > 0$  esiste un punto  $\tilde{x}$  tale che  $\tilde{x} \in B(\bar{x}, \bar{\varepsilon}) \cap Int(\mathcal{F})$ .

Cioè in ogni intorno di un punto appartenente ad un insieme robusto esiste un punto interno all'insieme stesso. Questo, per esempio, esclude che l'insieme contenga punti isolati.

Nella figura (3.1) è riportato un esempio di un insieme che non soddisfa la relazione

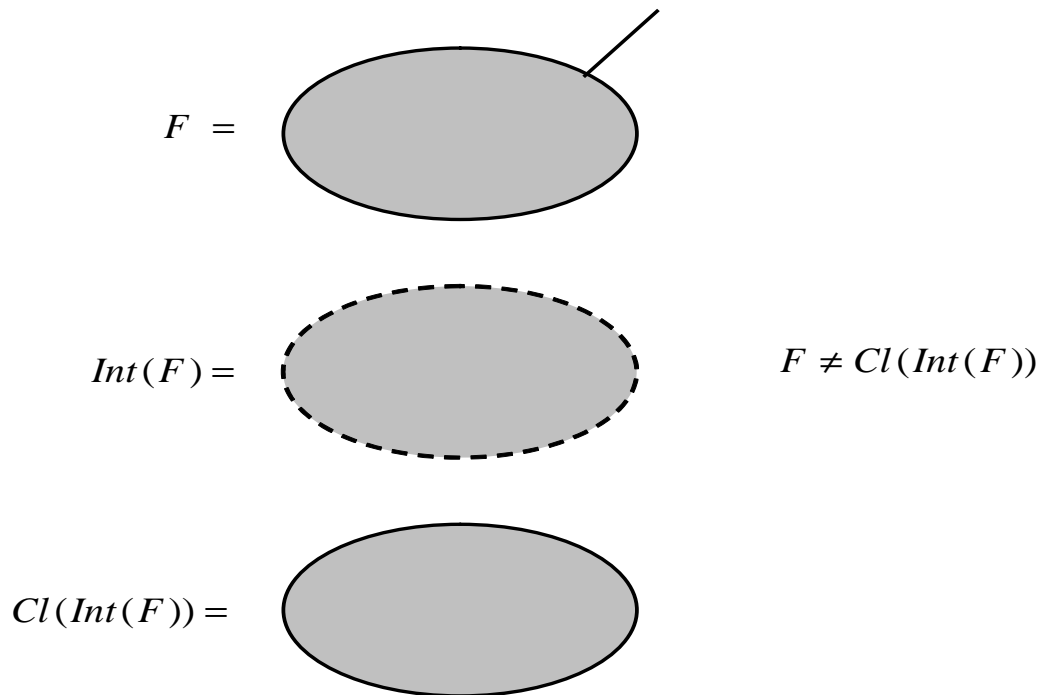


Figura 3.1: Esempio di un insieme che non è robusto.

### 3.2.1 Condizioni di ottimalità globale

Le condizioni di ottimalità globale devono essere in grado di identificare i minimi globali distinguendoli dai minimi locali e dagli altri punti stazionari. Perciò devono essere in grado di tener conto del comportamento globale della funzione obiettivo.

Una delle prime e delle più note condizioni di ottimalità globale è la seguente.

**Teorema 3.2.1** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme che soddisfa l'Assunzione 3.2.1 e sia  $f$  una funzione continua su  $\mathcal{F}$ . Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  se e solamente se l'insieme di livello  $\mathcal{L}^* := \{x \in \mathcal{F} : f(x) < f(x^*)\}$  ha misura (di Lebesgue) nulla, cioè*

$$meas(\mathcal{L}^*) = 0.$$

**Prova.** Si assuma, per assurdo, che  $meas(\mathcal{L}^*) = 0$  e che  $x^*$  non sia un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$ . Se  $x^*$  non fosse un minimo globale esisterebbe un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  tale che

$$f(\bar{x}) < f(x^*).$$

Per la continuità della funzione obiettivo seguirebbe che

$$f(x) < f(x^*),$$

per tutti i punti  $x$  appartenenti ad un intorno sufficientemente piccolo di  $\bar{x}$ . Utilizzando l'Assunzione 3.2.1, in questo intorno di  $\bar{x}$  ci sarebbe un punto interno all'insieme ammissibile, quindi esisterebbe un punto  $\tilde{x} \in Int(\mathcal{F})$  tale che:

$$f(\tilde{x}) < f(x^*).$$

Perciò esisterebbe un  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tale che l'intorno  $B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$  di  $\tilde{x}$  sarebbe strettamente contenuto nell'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  e che, per ogni  $x' \in B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})$ , si avrebbe:

$$f(x') < f(x^*).$$

Quindi, ricordando la definizione di  $\mathcal{L}^*$ , si otterrebbe

$$B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon}) \subset \mathcal{L}^*,$$

da cui si avrebbe l'assurdo

$$0 = meas(\mathcal{L}^*) > meas(B(\tilde{x}, \tilde{\varepsilon})) > 0.$$

Se, invece,  $x^*$  fosse un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  e si avesse che

$$meas(\mathcal{L}^*) > 0$$

allora l'insieme  $\mathcal{L}^*$  non sarebbe vuoto. Quindi, esisterebbe un  $\tilde{x} \in \mathcal{L}^*$ , cioè un punto  $\tilde{x} \in \mathcal{F}$  tale che:

$$f(\tilde{x}) < f(x^*)$$

e, quindi,  $x^*$  non sarebbe un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$ . □

Nella figura (3.2) sono riportati due esempi di insiemi  $\mathcal{L}^*$ : il primo esempio si riferisce al caso in cui il punto  $x^*$  non è un minimo globale, il secondo invece descrive il caso in cui il punto  $x^*$  è il minimo globale della funzione.

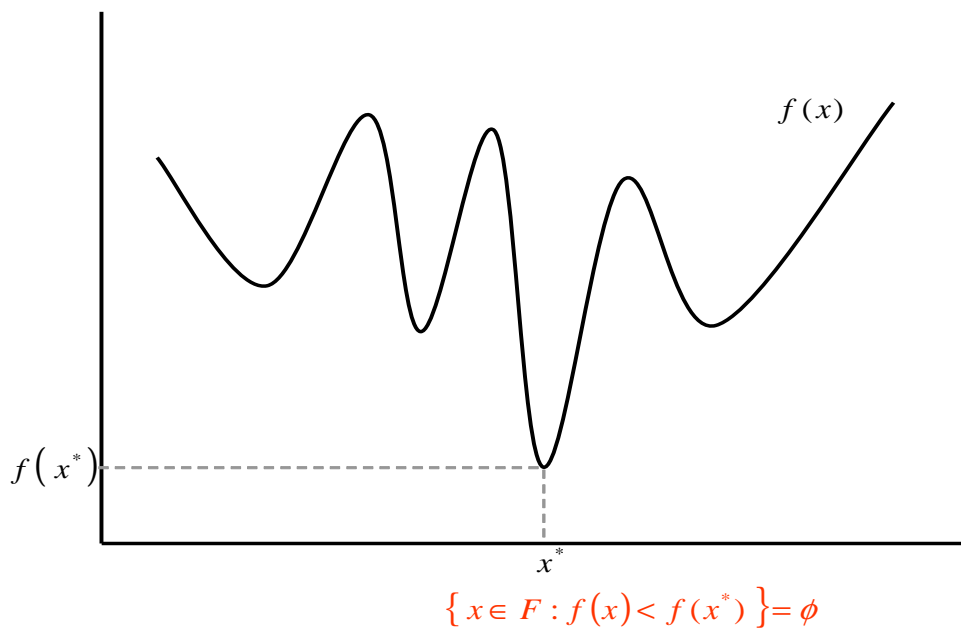
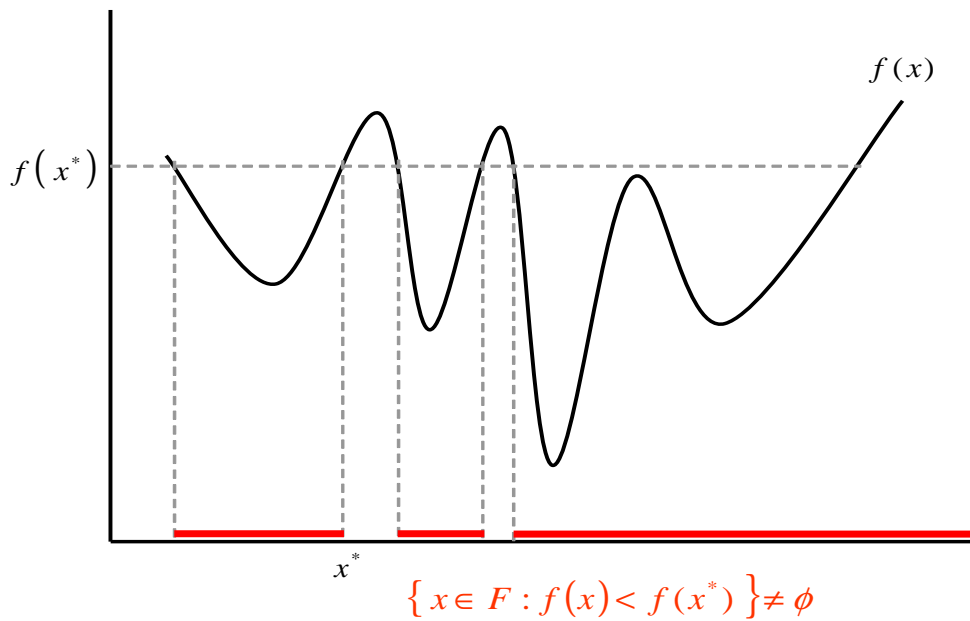


Figura 3.2: Insiemi  $\mathcal{L}^*$  nel caso in cui  $x^*$  non è minimo globale e nel caso che  $x^*$  è minimo globale.

Una differente caratterizzazione dei punti di minimi globale può essere stabilita nel caso di funzioni positive sull'insieme ammissibile. Infatti per questa classe di problemi si ha la seguente condizione di ottimalità.

**Teorema 3.2.2** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme che soddisfa l'Assunzione 3.2.1 e sia  $f$  una funzione continua su  $\mathcal{F}$  e tale che  $f(x) > 0$  per ogni  $x \in \mathcal{F}$ . Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  se e solamente se la sequenza  $\{r_k^*\}$ , con*

$$r_k^* = \int_{\mathcal{F}} \left[ \frac{f(x^*)}{f(x)} \right]^k dx,$$

è limitata.

L'ipotesi che la funzione sia positiva sull'insieme ammissibile non è particolarmente restrittiva da punto di vista teorico in quanto, come è noto, una funzione continua su un insieme ammissibile compatto è limitata inferiormente. Infatti, se  $f_{inf}$  è una sottostima del suo valore ottimo, si può sostituire la funzione originale con  $\tilde{f}(x) = f(x) - f_{inf} > 0$ .

Per descrivere una recente condizione di ottimalità è necessario richiamare la definizione di involucro convesso di una funzione la seguente definizione.

**Definizione 3.2.3 (Involucro convesso di una funzione)** *Sia  $\mathcal{F} \subseteq R^n$  un insieme convesso e sia  $f$  una funzione continua su  $\mathcal{F}$ , si definisce involucro convesso di  $f(x)$  su  $\mathcal{F}$  una funzione  $co(f(x))$  tale che:*

- i)  $co(f(x))$  è convessa su  $\mathcal{F}$ ;
- ii)  $co(f(x)) \leq f(x)$  per ogni  $x \in \mathcal{F}$ ;
- iii) se  $\tilde{f}(x)$  è una funzione convessa su  $\mathcal{F}$  tale che  $\tilde{f}(x) \leq f(x)$  per ogni  $x \in \mathcal{F}$ , allora si ha che  $\tilde{f}(x) \leq co(f(x))$  per ogni  $x \in \mathcal{F}$ .

Dalla precedente definizione segue che la funzione  $co(f(x))$  è la migliore sottostima convessa della funzione  $f(x)$ .

La funzione  $co(f(x))$  presenta interessanti proprietà alcune di queste descritte nella seguente proposizione.

**Proposizione 3.2.4** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme convesso non vuoto e compatto, sia  $f$  una funzione continua su  $\mathcal{F}$ . Allora ogni minimo globale di  $f(x)$  su  $\mathcal{F}$  è anche un minimo globale di  $co(f(x))$  su  $\mathcal{F}$  ed il valore ottimo di  $f(x)$  coincide con quello di  $co(f(x))$ .*

**Prova.** Sia  $x^* \in \mathcal{F}$  un minimo globale di  $f(x)$  su  $\mathcal{F}$ . Per la proprietà ii) della Definizione 3.2.3 si ha:

$$co(f(x^*)) \leq f(x^*).$$

Se fosse  $co(f(x^*)) < f(x^*)$  allora la seguente funzione

$$\tilde{f}(x) = \max\{f(x^*), co(f(x))\},$$

sarebbe una funzione convessa (in quanto il massimo di due funzioni convesse) tale che  $\tilde{f}(x) \neq co(f(x))$  e

$$co(f(x)) \leq \tilde{f}(x) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}.$$

Questo, però, contraddirebbe la proprietà iii) della Definizione 3.2.3. Perciò si deve avere necessariamente che:

$$co(f(x^*)) = f(x^*) \tag{3.7}$$

Utilizzando la (3.7), la definizione della funzione  $\tilde{f}(x)$  e la proprietà iii) della Definizione 3.2.3, si ottiene che:

$$co(f(x^*)) = f(x^*) \leq \tilde{f}(x) \leq co(f(x)), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F},$$

che implica che il punto  $x^*$  è anche un minimo globale della funzione  $co(f(x))$  su  $\mathcal{F}$ . Infine la (3.7) assicura anche che i valori ottimi della funzione  $f(x)$  e della funzione  $co(f(x))$  su  $\mathcal{F}$  coincidono.  $\square$

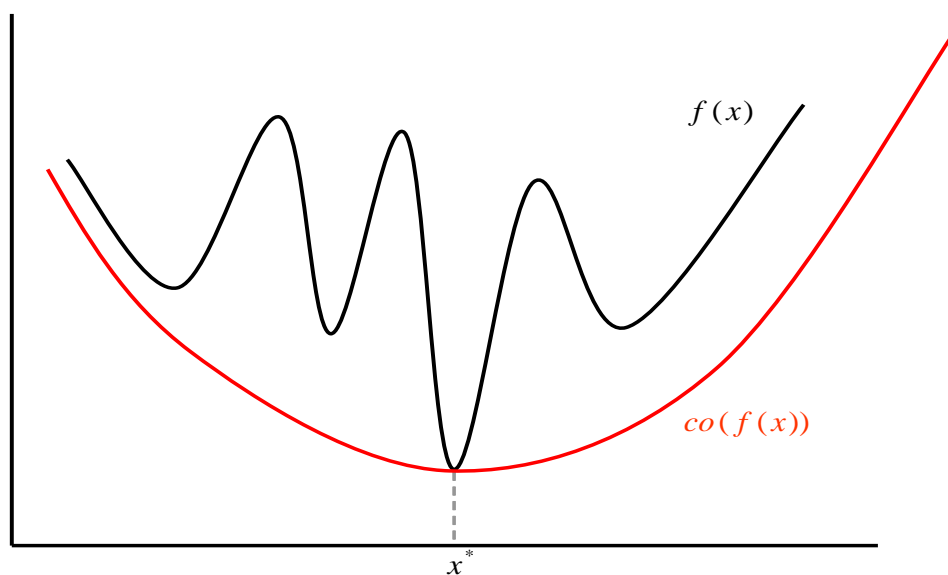


Figura 3.3: Esempio di involucro convesso di una funzione.

La funzione  $co(f(x))$  può essere utilizzata per dare una ulteriore caratterizzazione dei minimi globali non vincolati di una funzione continuamente differenziabile.

**Teorema 3.2.5** *Sia  $f$  una funzione continuamente differenziabile su  $R^n$ . Un punto  $x^* \in R^n$  è un minimo globale di  $f$  su  $R^n$  se e solamente se le seguenti condizioni sono verificate:*



i)  $\nabla f(x^*) = 0;$

ii)  $co(f(x^*)) = f(x^*).$

Dai precedenti risultati emerge che la funzione  $co(f(x))$  potrebbe avere un ruolo significativo nella definizione di metodi di ottimizzazione globale. Purtroppo la sua utilizzazione è limitata per il fatto che, per problemi generali, non si ha una sua rappresentazione semplice. Infatti nel caso in cui la funzione  $f(x)$  sia continua su  $R^n$  e soddisfi ipotesi ragionevoli (al più il fatto che la funzione  $f(x)$  sia coercitiva, cioè  $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ) si possono dare le seguenti espressioni equivalenti della funzione  $co(f(x))$ :

$$co(f(x)) = \sup \left\{ a^T x - b : a \in R^n, b \in R, a^T \tilde{x} - b \leq f(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in R^n \right\}, \quad (3.8)$$

$$co(f(x)) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(x_i) : x_i \in R^n, \alpha_i \in R_+, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = x \right\} \quad (3.9)$$

$$co(f(x)) = \sup_p \left\{ p^T x - \sup_{\tilde{x}} \left\{ p^T \tilde{x} - f(\tilde{x}) \right\} \right\}. \quad (3.10)$$

La (3.8) mostra che in ogni punto la funzione  $co(f(x))$  è costituita dall'estremo superiore delle funzioni lineari che sottostimano la funzione  $f(x)$ .

La (3.9) mostra, invece, che il valore della funzione  $co(f(x))$  nel punto  $x$  è dato dall'estremo inferiore di particolari combinazioni dei valori della funzione obiettivo calcolati nei punti di vertice di semplici contenenti il punto  $x$ . I coefficienti di tali combinazione sono dati dai pesi che permettono di rappresentare il punto  $x$  in funzione dei vertici del semplice considerato.

Infine la (3.10) mostra che la funzione  $co(f(x))$  coincide con la funzione coniugata della funzione coniugata della  $f(x)$ . Infatti la funzione coniugata di  $f(x)$  è definita da:

$$f^*(p) = \sup_x \left\{ p^T x - f(x) \right\},$$

mentre la funzione coniugata di  $f^*(p)$  è data da:

$$f^{**}(x) = \sup_p \left\{ p^T x - f^*(p) \right\}.$$

Dalla (3.10) segue che

$$co(f(x)) = f^{**}(x).$$

### **Il prossimo Teorema e la sua prova non fanno parte del programma di esame**

Una differente condizione di ottimalità può essere ottenuta nel caso particolare in cui la funzione obiettivo sia esprimibile come differenza di una funzione generale e di una funzione convessa. In particolare si ha il seguente risultato.

**Teorema 3.2.6** Sia  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$  un insieme convesso, non vuoto e compatto. Sia  $f$  una funzione continua data da

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad (3.11)$$

dove  $f_1$  è continua su  $\mathcal{F}$  e  $f_2$  è convessa e continuamente differenziabile su  $\mathcal{F}$ . Allora il punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  se e solamente se la seguente condizione vale:

comunque scelto un  $\varepsilon \geq 0$ , ogni direzione  $d \in \mathbb{R}^n$  tale che:

$$f_2(x) \geq f_2(x^*) + d^T(x - x^*) - \varepsilon, \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, \quad (3.12)$$

implica anche che:

$$f_1(x) \geq f_1(x^*) + d^T(x - x^*) - \varepsilon, \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, \quad (3.13)$$

**Prova.** Sia  $x^* \in \mathcal{F}$  un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  e si supponga, per assurdo, che la condizione di ottimalità descritta dal teorema non sia vera. Questo implicherebbe l'esistenza di un valore  $\bar{\varepsilon} \geq 0$ , di una direzione  $\bar{d} \in \mathbb{R}^n$  e di un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  tali che, dalla (3.12), si avrebbe

$$f_2(\bar{x}) - f_2(x^*) \geq \bar{d}^T(\bar{x} - x^*) - \bar{\varepsilon}, \quad (3.14)$$

mentre, dalla negazione della (3.12), si otterrebbe:

$$f_1(\bar{x}) - f_1(x^*) < \bar{d}^T(\bar{x} - x^*) - \bar{\varepsilon}. \quad (3.15)$$

Cambiando segno ai termini della (3.14) si avrebbe:

$$-f_2(\bar{x}) + f_2(x^*) \leq -\bar{d}^T(\bar{x} - x^*) + \bar{\varepsilon}. \quad (3.16)$$

Sommando tra di loro i termini di sinistra e di destra della (3.15) e della (3.16) si ricaverebbe:

$$f_1(\bar{x}) - f_2(\bar{x}) < f_1(x^*) - f_2(x^*),$$

da cui, ricondando l'espressione di  $f$ , si avrebbe l'assurdo che

$$f(\bar{x}) < f(x^*).$$

Si supponga, ora, che la condizione di ottimalità descritta dal teorema sia vera. Sia  $\bar{x}$  un qualsiasi punto nell'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  e si scelga la direzione

$$\bar{d} = \nabla f_2(\bar{x}).$$

Dalla convessità e differenziabilità della  $f_2$  si ha:

$$f_2(x) \geq f_2(\bar{x}) + \bar{d}^T(x - \bar{x}) \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}. \quad (3.17)$$

Perciò si può definire la seguente costante non negativa:

$$\bar{\varepsilon} = f_2(x^*) - f_2(\bar{x}) - \bar{d}^T(x^* - \bar{x}) \geq 0. \quad (3.18)$$

Dalla (3.17) e dalla (3.18) si può affermare che la direzione  $\bar{d}$  soddisfa la seguente relazione

$$f_2(x) \geq f_2(x^*) + \bar{d}^T(x - x^*) - \bar{\varepsilon} \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}, \quad (3.19)$$

Infatti, per ogni  $x \in \mathcal{F}$ , si ha:

$$\begin{aligned} f_2(x) - f_2(x^*) - \bar{d}^T(x - x^*) + \bar{\varepsilon} \\ &= f_2(x) - f_2(x^*) - \bar{d}^T(x - x^*) + f_2(x^*) - f_2(\bar{x}) - \bar{d}^T(x^* - \bar{x}) \\ &= f_2(x) - f_2(\bar{x}) - \bar{d}^T(x - \bar{x}) \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizzando la (3.19) e la condizione di ottimalità del teorema si ha che la direzione  $\bar{d}$  soddisfa anche la relazione:

$$f_1(x) \geq f_1(x^*) + \bar{d}^T(x - x^*) - \bar{\varepsilon} \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{F}. \quad (3.20)$$

Utilizzando la (3.20) nel punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  e ricordando la definizione di  $\bar{\varepsilon}$ , data dalla (3.18), si ha:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &\geq f_1(x^*) + \bar{d}^T(\bar{x} - x^*) - \bar{\varepsilon} \\ &= f_1(x^*) + \bar{d}^T(\bar{x} - x^*) - f_2(x^*) + f_2(\bar{x}) + \bar{d}^T(x^* - \bar{x}) \\ &= f_1(x^*) - f_2(x^*) + f_2(\bar{x}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

In conclusione, dalla definizione della funzione  $f(x)$  e dalla (3.21) si ottiene che, per ogni  $\bar{x} \in \mathcal{F}$ , risulta

$$f(\bar{x}) = f_1(\bar{x}) - f_2(\bar{x}) \geq f_1(x^*) - f_2(x^*) = f(x^*),$$

che completa la dimostrazione.  $\square$

### 3.2.2 Caratterizzazione dei minimi globali unici

Nel caso in cui una funzione  $f$  abbia un solo minimo globale sull'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$ , si può caratterizzare ulteriormente tale minimo globale come descritto dal seguente teorema.

**Teorema 3.2.7** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme che soddisfa l'Assunzione 3.2.1 e sia  $f$  continua su  $\mathcal{F}$ . Se la funzione  $f$  ha un unico minimo globale  $x^*$  su  $\mathcal{F}$  allora per  $i = 1, \dots, n$*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathcal{F}} x_i e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx} = x_i^* \quad (3.22)$$

**Prova.** Per dimostrare il teorema basta provare che, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , le sequenze  $\{\phi_k^i\}$  con

$$\phi_k^i = \frac{\int_{\mathcal{F}} |x_i - x_i^*| e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx}, \quad (3.23)$$

sono tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k^i = 0.$$

Cioè si deve dimostrare che comunque scelto un  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $k_\varepsilon$  tale che per tutti gli indici  $k \geq k_\varepsilon$  si ha:

$$\phi_k^i \leq \varepsilon. \quad (3.24)$$

Per qualsiasi fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $B_\varepsilon$  il seguente intorno aperto

$$B_\varepsilon = \{x \in \mathcal{F} : \|x - x^*\| < \frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Utilizzando questo intorno, si può riscrivere la (3.23) nella seguente maniera:

$$\phi_k^i = \frac{\int_{B_\varepsilon} |x_i - x_i^*| e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx} + \frac{\int_{\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon} |x_i - x_i^*| e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx}. \quad (3.25)$$

Per quanto riguarda il primo termine della sommatoria si ha, ricordando la definizione di  $B_\varepsilon$ :

$$\frac{\int_{B_\varepsilon} |x_i - x_i^*| e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx} \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{\int_{B_\varepsilon} e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.26)$$

Per quanto riguarda, invece, il secondo termine della somma in (3.25) può essere riscritto nella seguente forma:

$$\frac{\int_{\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon} |x_i - x_i^*| e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx} = \frac{\int_{\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon} |x_i - x_i^*| e^{-k(f(x)-f(x^*))} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-k(f(x)-f(x^*))} dx}. \quad (3.27)$$

Poichè, dall'Assunzione 3.2.1, l'insieme  $\mathcal{F}$  è un insieme compatto e poichè  $x^*$  è l'unico minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$ , esistono due costanti  $M > 0$  e  $\delta > 0$  tali che, per tutti  $x \in \mathcal{F} \setminus B_\varepsilon$ , si ha:

$$\begin{aligned} \|x - x^*\| &\leq M, \\ f(x) - f(x^*) &\geq \delta, \end{aligned}$$

per cui dalla (3.27) si ha:

$$\frac{\int_{\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon} |x_i - x_i^*| e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx} \leq M \frac{\int_{\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon} e^{-k\delta} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-k(f(x)-f(x^*))} dx} \leq M \frac{\text{meas}(\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon) e^{-k\delta}}{\int_{\mathcal{F}} e^{-k(f(x)-f(x^*))} dx}. \quad (3.28)$$

Utilizzando la continuità della funzione  $f$  e sfruttando di nuovo il fatto che l'insieme  $\mathcal{F}$  soddisfa l'Assunzione 3.2.1 si ha che esiste un sottoinsieme  $W_\varepsilon$  tale che:

$$\begin{aligned} W_\varepsilon &\subset \mathcal{F}, & \text{meas}(W_\varepsilon) &> 0, \\ f(x) - f(x^*) &\leq \frac{\delta}{2} & \text{per tutti } x &\in W_\varepsilon. \end{aligned}$$

Utilizzando questo sottoinsieme e la (3.28) si ottiene:

$$\frac{\int_{\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon} |x_i - x_i^*| e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx} \leq M \frac{\text{meas}(\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon) e^{-k\delta}}{\int_{W_\varepsilon} e^{-k(\delta/2)} dx} \leq M \frac{\text{meas}(\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon) e^{-k(\delta/2)}}{\text{meas}(W_\varepsilon)}, \quad (3.29)$$

da cui segue che esiste un indice  $k_\varepsilon$  tale che, per tutti gli indici  $k \geq k_\varepsilon$ , si ha:

$$\frac{\int_{\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon} |x_i - x_i^*| e^{-kf(x)} dx}{\int_{\mathcal{F}} e^{-kf(x)} dx} \leq M \frac{\text{meas}(\mathcal{F} \setminus B_\varepsilon) e^{-k(\delta/2)}}{\text{meas}(W_\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.30)$$

Concludendo la (3.25), (3.26) e la (3.30) provano la (3.24) e, quindi, dimostrano la tesi del teorema.  $\square$

### 3.3 Proprietà generali dei metodi di ottimizzazione globale

Come hanno mostrato le condizioni di ottimalità globale riportate nella sezione precedente, i punti di minimo globale di un generico problema di ottimizzazione non sono caratterizzabili matematicamente in modo semplice. Questo fatto rende difficile, da punto di vista teorico, la definizione di algoritmi di ottimizzazione in grado di determinare un punto di minimo globale. Infatti, la complessità delle condizioni di ottimalità globale porta sia all'impossibilità di sfruttare dal punto di vista algoritmico il fatto che un punto prodotto dall'algoritmo non è un minimo globale e sia alla difficoltà di definire dei criteri di arresto efficienti, cioè relativamente semplici ed affidabili.

Per cercare di superare le precedenti difficoltà gli algoritmi proposti in letteratura utilizzano due approcci differenti:

- algoritmi che utilizzano *informazioni globali* sul problema di ottimizzazione;
- algoritmi che utilizzano *informazioni locali* sul problema di ottimizzazione.

Gli algoritmi che utilizzano informazioni globali sono in grado di produrre sequenze di punti che hanno interessanti proprietà di convergenza. Tuttavia essi richiedono o ipotizzano la conoscenza di informazioni "a priori" sul problema da risolvere, per esempio: la struttura particolare del problema come la convessità o la concavità, la costante di Lipschitz della funzione obiettivo e dei vincoli, i limiti superiori sulle derivate prime o seconde delle funzioni che descrivono il problema, valore ottimo della funzione obiettivo, il numero di minimi globali. Purtroppo tali informazioni globali sono difficilmente disponibili nei problemi reali e questo, in qualche maniera, può limitare l'applicabilità di questa classe di metodi.

Gli algoritmi che utilizzano informazioni locali fanno riferimento, invece, a grandezze e quantità del problema di ottimizzazione facilmente ottenibili durante le iterazioni

dell'algoritmo, come, per esempio: i valori della funzione obiettivo e dei vincoli nei vari punti prodotti dall'algoritmo stesso, i valori delle derivate delle funzioni che descrivono il problema (se disponibili). Anche tutte le informazioni ottenibili da formule ed espressioni che utilizzano e combinano le precedenti quantità sono di tipo locale. Esempi di questo genere sono l'uso di formule di interpolazione o di estrapolazione, del punto prodotto dall'algoritmo in cui si è ottenenuto il più basso valore della funzione obiettivo, della massima pendenza della funzione obiettivo incontrata tra due punti. Non richiedendo informazioni "a priori" sul problema, questa classe di metodi ha una ampia applicabilità. Tuttavia, per cercare di avere una qualche proprietà di convergenza verso minimi globali, questi metodi devono estrarre durante le loro iterazioni delle informazioni sul comportamento globale della funzione obiettivo sull'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$ . Questo viene fatto cercando di "campionare" (cioè valutare) la funzione obiettivo in un numero sufficientemente grande di punti appartenenti all'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$ . A seconda di come viene effettuato questo campionamento, i metodi appartenenti a questa classe si dividono in:

- *metodi deterministici*, dove i punti in cui viene valutata la funzione obiettivo sono determinati utilizzano le informazioni sulla funzione già ottenute durante le iterazione dell'algoritmo;
- *metodi probabilistici*, dove i punti in cui la funzione viene campionata sono dei vettori aleatori distribuiti uniformemente o secondo leggi che tengono conto delle informazione estratte dall'algoritmo.

In entrambe queste classi di metodi, l'ideale sarebbe quello di eseguire un campionamento della funzione obiettivo che privilegiasse le zone in cui è localizzato un minimo globale e che fosse in grado di assicurare la convergenza dell'algoritmo verso minimi globali.

Nel seguito si descriveranno alcuni risultati che chiariscono il legame tra il modo di campionare la funzione obiettivo e le proprietà di convergenza dell'algoritmo verso i minimi globali.

Per introdurre questi risultati è necessario definire formalmente quali sono le caratteristiche di un algoritmo che utilizza informazioni locali. Questo può essere fatto introducendo la seguente definizione.

**Definizione 3.3.1** *Si definisce algoritmo che utilizza informazioni locali un algoritmo che, ad ogni iterazione  $k$ , presenta le seguenti caratteristiche:*

- i) il nuovo punto prodotto  $x_{k+1}$  dipende solamente dalla funzione  $f : \mathcal{F} \rightarrow R$ , a cui è applicato l'algoritmo, e da un certo numero di punti  $\tilde{x}_k^0, \tilde{x}_k^1, \dots, \tilde{x}_k^{p_k}$ , in cui si sono estratte le informazioni sul problema da risolvere, cioè esiste un operatore  $D$  tale che*

$$x_{k+1} = D(f, \tilde{x}_k^0, \tilde{x}_k^1, \dots, \tilde{x}_k^{p_k});$$

- ii) se esiste un insieme  $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{F}$  e due funzioni  $f : \mathcal{F} \rightarrow R$  e  $\tilde{f} : \mathcal{F} \rightarrow R$  tali che:*

$$f(x) = \tilde{f}(x), \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{N}$$

e se i punti  $\tilde{x}_k^0, \tilde{x}_k^1, \dots, \tilde{x}_k^{p_k}$  utilizzati dall'algoritmo sono tali che:

$$\tilde{x}_k^i \in \mathcal{N}, \quad \text{per ogni } i = 0, \dots, p_k,$$

allora l'algoritmo produce lo stesso punto  $x_{k+1}$  sia se è applicato alla funzione  $f$  e sia se è applicato alla funzione  $\tilde{f}$ , cioè si ha

$$D(f, \tilde{x}_k^0, \tilde{x}_k^1, \dots, \tilde{x}_k^{p_k}) = D(\tilde{f}, \tilde{x}_k^0, \tilde{x}_k^1, \dots, \tilde{x}_k^{p_k}).$$

Per analizzare in generale le proprietà di convergenza di algoritmi di ottimizzazione globale è necessario richiamare la seguente proposizione.

**Proposizione 3.3.2** *Comunque scelti due scalari  $\varepsilon_1 > 0$  e  $\varepsilon_2 > 0$  con  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , si può definire una funzione  $s(\cdot; \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  infinitamente differenziabile tale che:*

$$\begin{aligned} s(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= 1, & \text{se } \|x\| &\leq \varepsilon_2, \\ 0 < s(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &< 1, & \text{se } \varepsilon_2 < \|x\| < \varepsilon_1, \\ s(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) &= 0, & \text{se } \|x\| &\geq \varepsilon_1. \end{aligned}$$

**Prova.** Un modo per definire una funzione che soddisfa le proprietà descritte dalla proposizione è il seguente.

Per ogni  $\varepsilon_1 > 0$  e  $\varepsilon_2 > 0$ , con  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , si possono introdurre le seguenti funzioni infinitamente differenziabili:

$$s_1(x; \varepsilon_1) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\varepsilon_1^2 - \|x\|^2}} & \text{se } \|x\| < \varepsilon_1 \\ 0 & \text{se } \|x\| \geq \varepsilon_1 \end{cases}$$

$$s_2(x; \varepsilon_2) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{\|x\|^2 - \varepsilon_2^2}} & \text{se } \|x\| > \varepsilon_2 \\ 0 & \text{se } \|x\| \leq \varepsilon_2. \end{cases}$$

Utilizzando le precedenti funzioni, si può definire la seguente funzione:

$$s(x, \varepsilon_1; \varepsilon_2) = \frac{s_1(x; \varepsilon_1)}{s_1(x; \varepsilon_1) + s_2(x; \varepsilon_2)}. \quad (3.31)$$

È facile verificare che la funzione  $s(x, \varepsilon_1; \varepsilon_2)$ , oltre ad essere infinitamente differenziabile, soddisfa anche le altre richieste della proposizione, infatti:

- se  $\|x\| \geq \varepsilon_1$  allora  $s_1(x; \varepsilon_1) = 0$  e  $s_2(x; \varepsilon_2) > 0$  da cui segue che  $s(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0$ ;

- se  $\varepsilon_2 < \|x\| < \varepsilon_1$  allora  $s_1(x; \varepsilon_1) > 0$  e  $s_2(x; \varepsilon_2) > 0$  da cui segue che  $0 < s(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) < 1$ ;
- se  $\|x\| \leq \varepsilon_2$  allora  $s_1(x; \varepsilon_1) > 0$  e  $s_2(x; \varepsilon_2) = 0$  da cui segue che  $s(x; \varepsilon_1, \varepsilon_2) = 1$ .  $\square$

La precedente proposizione mostra che una qualsiasi funzione può essere perturbata arbitrariamente in un punto  $\tilde{x}$  lasciandola immutata in tutti i punti in cui è definita con l'esclusione di un prefissato intorno di un punto  $\tilde{x}$ . Per esempio, data una funzione  $f : R^n \rightarrow R$ , un punto  $\tilde{x} \in R^n$  ed un scalare  $\alpha \in R$ , la funzione

$$\tilde{f}(x) = f(x) + (\alpha - f(\tilde{x}))s(x - \tilde{x}; \varepsilon, \varepsilon/2)$$

coincide con la funzione  $f(x)$  per ogni  $x \in R^n \setminus B(\tilde{x}; \varepsilon)$  ed è tale che  $\tilde{f}(\tilde{x}) = \alpha$ . Inoltre la nuova funzione  $\tilde{f}$  ha le stesse proprietà di regolarità della  $f$ , cioè se, per esempio,  $f$  è due volte continuamente differenziabile continua ad esserlo anche la  $\tilde{f}$ .

Da quanto osservato segue facilmente la seguente proposizione.

**Proposizione 3.3.3** *Comunque scelti una funzione  $f : \mathcal{F} \rightarrow R$ , un punto  $\tilde{x} \in \mathcal{F}$  ed uno scalare  $\varepsilon > 0$ , si può definire una nuova funzione  $\tilde{f} : \mathcal{F} \rightarrow R$  tale che:*

- ha le stesse proprietà di continuità di  $f$ ;
- $\tilde{f}(x) = f(x)$  per ogni  $x \in \mathcal{F} \setminus B(\tilde{x}; \varepsilon)$ ;
- il punto  $\tilde{x} \in \mathcal{F}$  è l'unico minimo globale della funzione  $\tilde{f}$  su  $\mathcal{F}$ .

**Prova.** La dimostrazione segue osservando che un esempio di una funzione  $\tilde{f}$  che gode delle proprietà descritte dalla proposizione è il seguente:

$$\tilde{f}(x) = f(x) + (-\alpha e^{-\|x - \tilde{x}\|^2} - f(x))s(x - \tilde{x}; \varepsilon, \varepsilon/2),$$

dove  $\alpha$  è tale che

$$\alpha > \left| \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) \right|.$$

$\square$

A questo punto è possibile analizzare le proprietà di convergenza degli algoritmi di ottimizzazione globale che utilizzano informazioni locali.

### 3.3.1 Proprietà di convergenza degli algoritmi di ottimizzazione globale deterministici che utilizzano informazioni locali

Il primo teorema considera una prima possibile proprietà di convergenza dei punti prodotti dall'algoritmo, cioè il caso in cui un minimo globale del problema possa coincidere con un punto prodotto dall'algoritmo oppure è un punto di accumulazione della sequenza prodotta.



**Teorema 3.3.4** Sia  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$  un insieme che soddisfa l'Assunzione 3.2.1, sia  $\mathcal{C}$  l'insieme delle funzioni continue su  $\mathcal{F}$ . Per ogni funzione  $f \in \mathcal{C}$ , sia  $x^*$  un suo minimo globale su  $\mathcal{F}$  e sia  $\{x_k\}$  la sequenza di punti generata da un algoritmo di ottimizzazione globale che usa informazioni locali (Definizione 3.3.1) quando applicato alla minimizzazione di  $f$  su  $\mathcal{F}$ . Allora, per ogni funzione  $f \in \mathcal{C}$ , esiste un indice  $\bar{k}$  tale che  $x_{\bar{k}} = x^*$  oppure  $x^*$  è un punto di accumulazione della sequenza  $\{x_k\}$  se e solamente se, per ogni funzione  $f \in \mathcal{C}$ , i punti prodotti dall'algoritmo, al tendere di  $k$  all'infinito, formano un insieme denso su  $\mathcal{F}$  (cioè comunque scelti  $x \in \mathcal{F}$  e  $\varepsilon > 0$  esistono un  $\bar{k}$  ed un  $x_k$  tali che  $k \leq \bar{k}$  e  $x_k \in B(x; \varepsilon)$ ).

**Prova.** La sufficienza segue direttamente dalla definizione di insieme denso su  $\mathcal{F}$ . Infatti dalla densità segue che comunque scelto un  $\varepsilon > 0$  esistono un indice  $\bar{k}$  ed un punto  $x_k$  tali che  $k \leq \bar{k}$  e  $x_k \in B(x^*; \varepsilon)$ . Sia  $\{\varepsilon_i\}$  una sequenza tale che

$$\begin{aligned} \varepsilon_i > \varepsilon_{i+1} > 0 & \quad \text{per ogni } i, \\ \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon_i = 0. \end{aligned}$$

Se si indica con  $k_i$  il più piccolo indice  $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$  tale che

$$x_{k_i} \in B(x^*; \varepsilon_i),$$

segue che:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i} = x^*.$$

Per dimostrare la necessità si supponga che esista una funzione  $f \in \mathcal{C}$  per cui l'insieme dei punti prodotti dall'algoritmo non formi un insieme denso su  $\mathcal{F}$ . Allora esisterebbe un punto  $\tilde{x} \in \mathcal{F}$  e un  $\tilde{\varepsilon} > 0$  tali che

$$x_k \notin B(\tilde{x}; \tilde{\varepsilon}), \quad \text{per tutti } k. \quad (3.32)$$

Sfruttando la Proposizione 3.3.2 si potrebbe costruire una funzione  $\tilde{f} \in \mathcal{C}$  che coinciderebbe con la funzione  $f$  al di fuori della sfera  $B(\tilde{x}; \tilde{\varepsilon})$  e che avrebbe il suo minimo globale  $\hat{x}$  all'interno della sfera  $B(\tilde{x}; \tilde{\varepsilon})$ .

Ricordando la Definizione 3.3.1, un algoritmo che usa informazioni locali produrrebbe una stessa sequenza di punti sia se applicato alla funzione  $f$  e sia se applicato alla funzione  $\tilde{f}$ . Perciò, tenendo conto della (3.32), non ci potrebbe essere un indice  $\bar{k}$  tale che  $x_{\bar{k}} = \tilde{x}$  nè  $\tilde{x}$  potrebbe essere un punto di accumulazione della sequenza  $\{x_k\}$  prodotta dall'algoritmo.  $\square$

La proprietà di convergenza considerata nel precedente teorema può non essere completamente soddisfacente. Infatti la mancanza di condizioni di ottimalità utilizzabili porta al fatto di non saper riconoscere un minimo globale nel caso coincidesse con un punto prodotto dall'algoritmo e di non saper individuare la sottosequenza che sta convergendo al minimo globale. Più interessante sarebbe stabilire che tutti i punti di accumulazione della sequenza prodotta sono dei minimi globali del problema. Purtroppo dal precedente teorema deriva un risultato negativo circa la possibilità di garantire questo tipo di convergenza, come descritto dalla seguente proposizione.

**Proposizione 3.3.5** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme che soddisfa l'Assunzione 3.2.1, sia  $\mathcal{C}$  l'insieme delle funzioni continue su  $\mathcal{F}$ . Per ogni funzione  $f \in \mathcal{C}$  che non sia una costante, la sequenza di punti  $\{x_k\}$  generati da un algoritmo di ottimizzazione globale che usa informazioni locali (Definizione 3.3.1) non gode della proprietà che ogni suo punto di accumulazione è un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$ .*

**Prova.** Se ogni suo punto di accumulazione della sequenza di punti  $\{x_k\}$  generati dall'algoritmo fosse un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  allora il Teorema 3.3.4 implicherebbe che i punti generati dall'algoritmo formerebbero un denso su  $\mathcal{F}$ . Dalla definizione di insieme denso si avrebbe che ogni punto dell'insieme  $\mathcal{F}$  sarebbe un punto di accumulazione della sequenza di punti  $\{x_k\}$  (basta ripetere la prima parte della prova del precedente Teorema facendo riferimento ad un qualsiasi punto  $x \in \mathcal{F}$ ). Si avrebbe, quindi, l'assurdo che ogni punto dell'insieme ammissibile  $\mathcal{F}$  sarebbe un minimo globale del problema.  $\square$

### 3.3.2 Proprietà di convergenza degli algoritmi di ottimizzazione globale probabilistici che utilizzano informazioni locali

Risultati analoghi a quelli ottenuti per algoritmi deterministici, si possono stabilire per gli algoritmi di ottimizzazione globale probabilistici che utilizzano informazioni locali. Infatti si può stabilire il seguente teorema che è l'analogo del Teorema 3.3.4.

**Teorema 3.3.6** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme che soddisfa l'Assunzione 3.2.1, sia  $\mathcal{C}$  l'insieme delle funzioni continue su  $\mathcal{F}$ . Per ogni funzione  $f \in \mathcal{C}$ , sia  $x^*$  un suo minimo globale su  $\mathcal{F}$  e sia  $\{x_k\}$  la sequenza di punti aleatori generati da un algoritmo di ottimizzazione globale probabilistico che usa informazioni locali (Definizione 3.3.1) quando applicato alla minimizzazione di  $f$  su  $\mathcal{F}$ . Sia  $p \in (0, 1)$ . Allora, comunque scelta una funzione  $f \in \mathcal{C}$ , la probabilità che esiste un indice  $\bar{k}$  tale che  $x_{\bar{k}} = x^*$  oppure che  $x^*$  è un punto di accumulazione della sequenza  $\{x_k\}$  è maggiore di  $p$  se e solamente se, comunque scelta una funzione  $f \in \mathcal{C}$ , la probabilità che un qualsiasi punto di  $\mathcal{F}$  appartenga alla chiusura dei punti generati dall'algoritmo, al tendere di  $k$  all'infinito, è maggiore di  $p$ .*

L'analogo del Teorema 3.3.5 diventa, nel caso di algoritmi probabilistici, il seguente risultato.

**Teorema 3.3.7** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme che soddisfa l'Assunzione 3.2.1, sia  $\mathcal{C}$  l'insieme delle funzioni continue su  $\mathcal{F}$ . Allora comunque scelto un valore  $p \in (0, 1)$ , per ogni funzione  $f \in \mathcal{C}$  che non sia una costante, la probabilità che la sequenza di punti  $\{x_k\}$  generati da un algoritmo di ottimizzazione globale che usa informazioni locali (Definizione 3.3.1) non goda della proprietà che ogni suo punto di accumulazione è un minimo globale di  $f$  su  $\mathcal{F}$  è maggiore di  $p$ .*

Come notato per i Teoremi 3.3.4 e 3.3.5, anche i Teoremi 3.3.6 e 3.3.7 continuano a valere nel caso di funzioni continuamente differenziabili oppure nel caso di funzioni due volte continuamente differenziabili.

### 3.4 Metodi di ottimizzazione globale

La maggior parte dei metodi proposti in letteratura considerano dei problemi di ottimizzazione globale che hanno la seguente struttura.

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{D}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

dove la funzione  $f : \mathcal{D} \rightarrow R$  è almeno continua e l'insieme  $\mathcal{D} \subseteq R^n$  è dato da:

$$\mathcal{D} = \{x \in R^n : l \leq x \leq u\}, \tag{3.34}$$

dove  $l \in R^n$  e  $u \in R^n$  sono due vettori dati.

L'insieme dei punti di minimo globale del precedente problema è rappresentato da:

$$X^* = \{x^* \in \mathcal{D} : f(x^*) \leq f(x), \text{ per tutti } x \in \mathcal{D}\}, \tag{3.35}$$

mentre il valore ottimo della funzione obiettivo è rappresentato da:

$$f^* = f(x^*), \quad \text{con } x^* \in X^*. \tag{3.36}$$

Molto spesso si ipotizza anche che i due vettori siano stati scelti in maniera tale che i minimi globali della funzione  $f$  su  $\mathcal{D}$  siano interni all'insieme  $\mathcal{D}$ .

In altre parole i problemi globali maggiormente affrontati sono quelli non vincolati oppure quelli che hanno vincoli molto semplici che impongono solamente dei limiti superiori ed inferiori sulle componenti del vettore delle variabili.

Molto più limitatata è stata l'attività di ricerca verso problemi di ottimizzazione globale con vincoli più complessi. Questo è dovuto alla complessità di questi problemi vincolati che rende inapplicabile gran parte dei risultati e metodi proposti per i problemi del tipo (3.33). Comunque, da punto di vista pratico e teorico, l'uso di funzioni di penalità esatte o lagrangiani aumentati esatti può costituire uno strumento efficace per affrontare problemi di ottimizzazione globale vincolata.

Una descrizione completa ed approfondita dei molti metodi proposti per risolvere problemi di ottimizzazione del tipo (3.33) richiederebbe una trattazione molto complessa e molto lunga. Quindi, nei capitoli successivi, allo scopo di fornire un'introduzione all'argomento, ci si limiterà a considerare solamente alcune classi particolari di metodi di ottimizzazione globale. La scelta si è rivolta principalmente verso metodi che, da una parte, fossero relativamente semplici da descrivere e particolarmente facili da realizzare e che, dall'altra parte, avessero le potenzialità per affrontare anche problemi di ottimizzazione globale derivanti da applicazioni ingegneristiche "difficili", cioè quelle in cui la funzione obiettivo è rappresentata da una "black box" ed il numero di variabili non è particolarmente piccolo.

## Capitolo 4

# Metodi Probabilistici

Questo capitolo è dedicato ad introdurre l'approccio probabilistico per la soluzione di problemi di ottimizzazione globale del tipo (3.33). Dopo aver richiamato quale è l'idea da cui parte tale approccio, vengono brevemente descritti alcuni algoritmi di tipo probabilistico: tra cui i metodi di tipo multistart, i metodi detti di "simulated annealing" e metodi che usano popolazioni di punti.

### 4.1 Algoritmi che utilizzano punti scelti a caso su $\mathcal{D}$ .

Uno dei punti di partenza dei metodi di tipo probabilistico è il seguente risultato.

**Proposizione 4.1.1** *Sia  $\{x_k\}$  una sequenza di punti aleatori scelti a caso su  $\mathcal{D}$  (cioè vettori generati con distribuzione uniforme su  $\mathcal{D}$ ). Allora per ogni sottoinsieme  $\mathcal{A}$  di  $\mathcal{D}$  tale che*

$$\text{meas}(\mathcal{D}) > \text{meas}(\mathcal{A}) > 0, \quad (4.1)$$

(con  $\text{meas}(\cdot)$  misura di Lebesgue di un insieme) si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Prob}\left\{X_k \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\right\} = 1, \quad (4.2)$$

con  $X_k = \{x_0, \dots, x_k\}$ .

**Prova.** Sia lo scalare  $p$  dato da:

$$p = \frac{\text{meas}(\mathcal{A})}{\text{meas}(\mathcal{D})},$$

dalla (4.1) si ha:

$$1 > p > 0.$$

Come è naturale lo scalare  $p$  da la probabilità che un punto, scelto a caso su  $\mathcal{D}$ , cada nell'insieme  $\mathcal{A}$ . Di conseguenza la probabilità che, generati  $k$  vettori con una distribuzione uniforme su  $\mathcal{D}$ , almeno uno cada in  $\mathcal{A}$  è data da:

$$\text{Prob}\left\{X_k \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\right\} = 1 - (1 - p)^k$$

da cui segue:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Prob}\left\{X_k \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\right\} = 1. \quad \square$$

#### 4.1.1 Campionamento uniforme della funzione obiettivo

Il precedente risultato indica che, se  $\mathcal{A}$  è un qualsiasi intorno di un minimo globale  $x^*$  di  $f(x)$  su  $\mathcal{D}$  e se si generano molti punti a caso, allora uno di questi punti generati cade, molto probabilmente, vicino al minimo globale  $x^*$ . Questo suggerisce un primo semplice algoritmo di ottimizzazione globale.

##### Algoritmo di Campionamento Uniforme.

*Passo 0:* si genera a caso un punto  $x_0$  su  $\mathcal{D}$ , si pone  $x_0^* = x_0$  e  $k = 1$ ;

*Passo 1:* si genera a caso un punto  $x_k$  su  $\mathcal{D}$ ;

*Passo 2:* se  $f(x_k) < f(x_{k-1}^*)$  allora si pone  $x_k^* = x_k$

altrimenti si pone  $x_k^* = x_{k-1}^*$ ;

*Passo 3:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 1.

Utilizzando la precedente Proposizione 4.1.1, si può stabilire la seguente proprietà di convergenza dei punti prodotti dal precedente algoritmo.

**Proposizione 4.1.2** *Sia  $\{x_k^*\}$  la sequenza di punti aleatori prodotti dall'Algoritmo di Campionamento Uniforme. Allora, comunque scelto un  $\varepsilon > 0$ , si ha:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Prob}\left\{x_k^* \in \{x \in \mathcal{D} : f(x) \leq f^* + \varepsilon\}\right\} = 1, \quad (4.3)$$

dove  $f^*$  è definito dalla (3.36) ed indica il valore ottimo della  $f$  su  $\mathcal{D}$ .

**Prova.** Se si definisce l'insieme  $\mathcal{A}$  nella seguente maniera:

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \leq f^* + \varepsilon\},$$

si può notare che

$$\text{Prob}\left\{x_k^* \in \{x \in \mathcal{D} : f(x) \leq f^* + \varepsilon\}\right\} = \text{Prob}\left\{X_k \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\right\},$$

dove  $X_k = \{x_0, \dots, x_k\}$  è l'insieme di punti generati a caso su  $\mathcal{D}$  dall'algoritmo.

La dimostrazione della Proposizione segue utilizzando la Proposizione 4.1.1 e ricordando che, dal Teorema 3.2.1, si ha che  $\text{meas}(\mathcal{A}) > 0$ .  $\square$

A partire dalla precedente proposizione si può anche dimostrare che la sequenza dei valori della funzione obiettivo  $\{f(x_k^*)\}$  prodotta dal precedente algoritmo converge con probabilità uno al valore ottimo  $f(x^*)$  con  $x^* \in X^*$ .

### 4.1.2 Metodi che usano direzioni a caso

Una strategia alternativa alla generazione di punti a caso sull'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$  è quella di utilizzare, invece, direzioni a caso. Cioè di definire degli algoritmi in cui, ad ogni iterazione, la direzione  $d_k$  è scelta a caso su una sfera  $n$ -dimensionale di raggio unitario.

Questi metodi si basano sul teorema di Gaviano che afferma che se la sequenza di punti  $\{x_k\}$  è tale che

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

dove  $d_k$  è scelto a caso su una sfera  $n$ -dimensionale di raggio unitario e  $\alpha_k$  è tale che:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) = \min_{\alpha} f(x_k + \alpha d_k)$$

allora la probabilità che accada  $f(x_k) - f^* < \varepsilon$  (dove, di nuovo,  $f^*$  è il valore ottimo della  $f(x)$  su  $\mathcal{D}$ ) tende a 1.

Questi metodi permettono la possibilità di combinare una strategia probabilistica (la scelta della direzione a caso) con una deterministica (la minimizzazione lungo la direzione). In questa maniera si può cercare di globalizzare le varie tecniche di minimizzazione di una funzione di una variabile scalare proposte nella letteratura.

### 4.1.3 Metodi di tipo multistart

Questi metodi si basano sull'idea di utilizzare la generazione di punti a caso su  $\mathcal{D}$  per determinare un punto in un intorno di un minimo globale e di utilizzare qualche algoritmo di minimizzazione locale per determinare efficientemente un minimo globale. Quindi questa classe di metodi possono essere visti o come un tentativo di globalizzare i metodi di ottimizzazione locale oppure come un tentativo di migliorare l'efficienza del Algoritmo di Campionamento Uniforme sfruttando il fatto che gli algoritmi locali possono essere attratti da un minimo globale.

L'algoritmo di tipo multistart di partenza è il seguente.

**Algoritmo Multistart 1.**

*Passo 0:* si genera a caso un punto  $x_0$  su  $\mathcal{D}$ , si pone  $x_0^* = x_0$  e  $k = 1$ ;

*Passo 1:* si genera a caso un punto  $x_k$  su  $\mathcal{D}$ ;

*Passo 2:* partendo da  $x_k$  si applica un algoritmo di ottimizzazione locale ottenendo  $y_k$ ;

*Passo 3:* se  $f(y_k) < f(x_{k-1}^*)$  allora si pone  $x_k^* = y_k$

altrimenti si pone  $x_k^* = x_{k-1}^*$ ;

*Passo 4:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 1.

Naturalmente l'uso di un algoritmo deterministico locale può far migliorare la proprietà di convergenza dei punti prodotti

**Proposizione 4.1.3** *Se esiste un minimo globale  $x^*$  non vincolato della funzione  $f$  su  $\mathcal{D}$  per cui l'algoritmo di minimizzazione locale (utilizzato al Passo 2) soddisfa la Proprietà 1 (sezione 3.1.2) allora la sequenza  $\{x_k^*\}$  di punti aleatori prodotti dall'Algoritmo di Multistart 1 è tale che:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Prob}\{x_k^* \in X^*\} = 1, \quad (4.4)$$

dove  $X^*$  è l'insieme dei minimi globali del Problema (3.33).

**Prova.** Segue, nuovamente, dalla Proposizione 4.1.1. Infatti

$$\text{Prob}\{x_k^* \in X^*\} \geq \text{Prob}\{x_k^* = x^*\},$$

dove  $x^*$  è il minimo globale considerato nell'enunciato della proposizione.

Quindi, si può scegliere

$$\mathcal{A} = B(x^*, \varepsilon),$$

dove  $B(x^*, \varepsilon)$  è l'intorno descritto nella Proprietà 1. Poichè, per ipotesi, l'algoritmo di minimizzazione locale soddisfa la Proprietà 1, nel momento in cui si genera un punto  $x_k$  tale che  $x_k \in B(x^*, \varepsilon)$  si ha  $y_k = x^*$ . Perciò si ha che:

$$\text{Prob}\{x_k^* = x^*\} = \text{Prob}\{X_k \cap \mathcal{A} \neq \emptyset\},$$

dove  $X_k = \{x_0, \dots, x_k\}$  è l'insieme di punti generati a caso su  $\mathcal{D}$  dall'algoritmo e, perciò la tesi della proposizione segue dalla Proposizione 4.1.1.  $\square$

L'Algoritmo Multistart 1 è stato il primo ad essere proposto in letteratura ed è tuttora abbastanza usato; tuttavia presenta il difetto che può richiedere un numero molto grande di minimizzazioni locali. Per superare questo difetto sono state proposte delle variazioni dell'Algoritmo Multistart 1 che cercano di ridurre il numero di minimizzazioni locali senza variarne le proprietà.

### Algoritmo Multistart 2.

*Passo 0:* si genera a caso un punto  $x_0$  su  $\mathcal{D}$ , si pone  $x_0^* = x_0$  e  $k = 1$ ;

*Passo 1:* si genera a caso un punto  $x_k$  su  $\mathcal{D}$ ;

*Passo 2:* se  $f(x_{k-1}^*) < f(x_k)$  allora si pone  $x_k^* = x_{k-1}^*$  e si va al Passo 4;

*Passo 3:* partendo da  $x_k$  si applica un algoritmo di ottimizzazione locale ottenendo  $x_k^*$ ;

*Passo 4:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 1.

Nel precedente algoritmo le minimizzazioni locali non vengono applicate se il valore della funzione obiettivo nel punto generato a caso è peggiore del miglior valore della funzione obiettivo ottenuto dall'algoritmo. Poichè le minimizzazioni locali producono dei punti in cui il valore della funzione obiettivo è non peggiore rispetto al valore che si ha nel punto iniziale, ne deriva che ogni applicazione di tali minimizzazioni produce un punto che può essere considerato come nuova stima  $x_k^*$ . Purtroppo la strategia adottata dal precedente algoritmo può portare ad effettuare poche minimizzazioni locali. L'algoritmo seguente cerca di seguire una strategia intermedia tra i due precedenti algoritmi multistart.

**Algoritmo Multistart 3.**

*Passo 0:* si genera a caso un punto  $x_0$  su  $\mathcal{D}$ , si pone  $x_0^* = x_0$  e  $k = 1$ ;

*Passo 1:* si generano a caso  $N_k^1$  punti su  $\mathcal{D}$ ;

*Passo 2:* si scelgono  $N_k^2 < N_k^1$  punti “più promettenti” e da ciascuno di questi si effettua una minimizzazione locale;

*Passo 3:* fra i punti  $y_k^1, y_k^2, \dots, y_k^{N_k^2}$  ottenuti da queste minimizzazioni locali si sceglie quello  $y_k$  a cui corrisponde il valore della funzione obiettivo più piccolo, cioè

$$f(y_k) = \min_{1 \leq i \leq N_k^2} f(y_k^i);$$

*Passo 4:* se  $f(y_k) < f(x_{k-1}^*)$  allora si pone  $x_k^* = y_k$

altrimenti si pone  $x_k^* = x_{k-1}^*$ ;

*Passo 5:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 1.

L'idea del precedente algoritmo è quella di ridurre il più possibile il numero delle minimizzazioni locali utilizzando le informazioni che si possono ottenere sulla funzione andando a valutarne il valore su un certo numero di punti scelti a caso. Nel Passo 2 si cerca di raggruppare (usualmente utilizzando le tecniche della “cluster analysis”) i punti generati al Passo 1 in maniera tale che ogni gruppo sia costituito da punti che appartengono alla regione di attrazione dello stesso minimo locale. Dopodiché per ogni gruppo si effettua una sola minimizzazione locale.

## 4.2 Metodi di tipo “simulated annealing”

Una evoluzione ulteriore dei metodi descritti nella precedente sezione è quella di cercare di definire dei nuovi algoritmi di ottimizzazione globale basati sull'uso di punti generati in maniera da cercare di sfruttare le informazioni sul problema ottenute durante le iterazioni dell'algoritmo.



### 4.2.1 Distribuzioni non uniformi di punti

Una osservazione importante nell'ambito dei metodi di ottimizzazione globale probabilistici riguarda il fatto che le proprietà di convergenza stabilite dalla Proposizione 4.1.2 e dalla Proposizione 4.1.3 non dipendono in maniera esclusiva dal fatto che i punti  $x_0, \dots, x_k$  sono generati con distribuzione uniforme su  $\mathcal{D}$ , cioè sono realizzazioni di variabili aleatorie destribuite con funzioni densità di probabilità costanti su  $\mathcal{D}$ . Infatti sia la Proposizione 4.1.2 e che la Proposizione 4.1.3 seguono dalla Proposizione 4.1.1 ma quest'ultima può essere generalizzata nella seguente proposizione.

**Proposizione 4.2.1** *Sia  $\{m_k(\cdot)\}$  una sequenza di misure di probabilità tali che, per ogni sottoinsieme  $\mathcal{A}$  di  $\mathcal{D}$  con  $\text{meas}(\mathcal{A}) > 0$ , soddisfano:*

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - m_k(\mathcal{A})\right) = 0. \quad (4.5)$$

*Sia  $\{x_k\}$  una sequenza di punti aleatori generati secondo le distribuzioni associate alle misure di probabilità  $m_k(\cdot)$ . Allora per ogni sottoinsieme  $\mathcal{A}$  di  $\mathcal{D}$  con  $\text{meas}(\mathcal{A}) > 0$  si ha:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Prob} \left\{ X_k \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \right\} = 1, \quad (4.6)$$

con  $X_k = \{x_0, \dots, x_k\}$ .

**Prova.** Per definizione di misura di probabilità e dalle ipotesi della proposizione,  $m_k(\mathcal{A})$  è la probabilità che un punto generato  $x_k$  cada nell'insieme  $\mathcal{A}$ . Di conseguenza la probabilità che, tra i vettori generati  $x_0, \dots, x_k$ , almeno uno cada in  $\mathcal{A}$  è data da:

$$\text{Prob} \left\{ X_k \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \right\} = 1 - \prod_{i=0}^k \left(1 - m_i(\mathcal{A})\right)$$

da cui, usando la (4.5), segue:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Prob} \left\{ X_k \cap \mathcal{A} \neq \emptyset \right\} = 1. \quad \square$$

### 4.2.2 Algoritmi di tipo “simulated annealing”

La Proposizione 4.2.1 mette in evidenza la possibilità di definire dei nuovi algoritmi probabilistici che usino punti generati secondo funzioni densità di probabilità non costanti su  $\mathcal{D}$ . Questo fatto può essere sfruttato per cercare di utilizzare funzioni densità di probabilità che siano maggiormente concentrate intorno ai minimi globali, cioè che rendano più probabile la generazione di punti più vicini ai minimi globali.

Un esempio di una funzione densità di probabilità con queste caratteristiche può essere ottenuto traendo ispirazione dai risultati della meccanica statistica.

Si consideri un sistema fisico composto da un numero molto grande di particelle della stessa natura, si indichi con  $s$  lo stato del sistema e con  $E(s)$  l'energia associata a questo

stato. Se il sistema fisico è in una situazione di equilibrio termico allora la funzione densità di probabilità, relativa al fatto che il sistema sia nello stato  $s$ , è proporzionale a

$$e^{-\frac{E(s)}{\mathcal{K}T}}$$

ove  $\mathcal{K}$  è la costante di Boltzman e  $T$  la temperatura.

Parlando in maniera approssimata, è noto che, se si abbassa la temperatura, diventano sempre più probabili gli stati a bassa energia, fino alla situazione limite per cui  $T \rightarrow 0$  e gli unici stati possibili sono quelli ad energia nulla. Quindi, in linea teorica, si può immaginare un sistema fittizio che associa ad ogni suo stato  $x$ , l'energia:

$$E(x) = f(x) - f^* \geq 0$$

dove  $f^*$  è, come al solito, il minimo globale della  $f(x)$ . Ora, se si simulasse il comportamento di questo sistema e se si facesse tendere a zero la temperatura, diventerebbero sempre più probabili gli stati  $x^*$  del sistema che corrispondono a basse energia fino ad arrivare alla situazione limite che:

$$E(x^*) = f(x^*) - f^* = 0.$$

Per avvalorare ulteriormente questa idea si può far riferimento al Teorema 3.2.7. Infatti, nel caso in cui il minimo globale  $x^*$  su  $\mathcal{D}$  sia unico, questo teorema implica (ponendo  $\mathcal{K} = 1$  e  $k = 1/T$ ):

$$x_i^* = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{D}} x_i e^{-f(x)/T} dx}{\int_{\mathcal{D}} e^{-f(x)/T} dx} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{D}} x_i e^{-(f(x)-f^*)/T} dx}{\int_{\mathcal{D}} e^{-(f(x)-f^*)/T} dx}, \quad \text{per } i = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Le precedenti uguaglianze possono essere riscritte come:

$$x_i^* = \lim_{T \rightarrow 0} \int_{\mathcal{D}} x_i p_T(x) dx = \lim_{T \rightarrow 0} \bar{x}_i(T) \quad (4.8)$$

dove

$$p_T(x) = \frac{e^{-f(x)/T}}{\int_{\mathcal{D}} e^{-f(x)/T} dx} = \frac{e^{-(f(x)-f^*)/T}}{\int_{\mathcal{D}} e^{-(f(x)-f^*)/T} dx}, \quad (4.9)$$

è una densità di probabilità e dove  $\bar{x}_i(T)$  sono i valori medi di variabili aleatorie che sono distribuite secondo la densità di probabilità  $p_T(x)$ .

Quindi, l'idea su cui si basano i metodi di ottimizzazione globale di tipo “simulated annealing” è quella di simulare dei vettori aleatori distribuiti secondo la densità di probabilità  $p_T(x)$  data dalla (4.9). La relazione (4.8) indica che, al diminuire di  $T$ , i vettori  $x$  generati su  $\mathcal{D}$  secondo la funzione densità di probabilità  $p_T(x)$  si avvicinano, in media, al punto di minimo globale della  $f(x)$  su  $\mathcal{D}$ .

Un elemento essenziale allo sviluppo dei metodi “simulated annealing” è il fatto che punti distribuiti secondo la funzione densità di probabilità  $p_T(x)$  posso essere generati

abbastanza facilmente utilizzando il metodo di Von Neumann. Tale metodo si può applicare a tutte le funzioni densità di probabilità  $p(x)$  che hanno la seguente struttura:

$$p(x) = Cs(x), \quad (4.10)$$

dove  $C$  è una costante positiva e  $s : \mathcal{D} \rightarrow R_+$  è tale che  $0 < s(x) \leq 1$ , per tutti  $x \in \mathcal{D}$ . Utilizzando la definizione (4.9), si può scrivere:

$$p_T(x) = \frac{e^{-(f(x)-f^*)/T}}{\int_{\mathcal{D}} e^{-(f(x)-f^*)/T} dx} = \tilde{C}\tilde{s}(x),$$

dove

$$\tilde{C} = 1/\left(\int_{\mathcal{D}} e^{-(f(x)-f^*)/T} dx\right) \quad \text{e} \quad \tilde{s}(x) = e^{-(f(x)-f^*)/T}.$$

Quindi la funzione  $p_T(x)$  ha la struttura (4.10) e, perciò, si può utilizzare il metodo di Von Neumann.

*Sia  $T$  uno scalare positivo, sia  $\alpha$  uno scalare scelto a caso su  $[0, 1]$  e sia  $x$  un vettore scelto a caso su  $\mathcal{D}$ , se*

$$\alpha \leq e^{-(f(x)-f^*)/T}, \quad (4.11)$$

*allora il punto  $x$  è una realizzazione della variabile aleatoria distribuita secondo la funzione densità di probabilità*

$$p_T(x) = \frac{e^{-(f(x)-f^*)/T}}{\int_{\mathcal{D}} e^{-(f(x)-f^*)/T} dx}. \quad (4.12)$$

Purtroppo, per avere la struttura (4.10), la funzione densità di probabilità  $p_T(x)$  deve far comparire nella sua espressione il valore ottimo  $f^*$  della funzione obiettivo. Per la maggior parte dei problemi di ottimo globale questa quantità non è nota “a priori”, quindi viene normalmente sostituita con una sua sovrastima  $\hat{f}$ . Quindi la tecnica di generazione di un nuovo punto viene adattata di conseguenza ottenendo un punto che è la realizzazione di una nuova variabile aleatoria.

Sia  $T$  uno scalare positivo, sia  $\hat{f}$  tale  $\hat{f} \geq f^*$ , sia  $\alpha$  uno scalare scelto a caso su  $[0, 1]$  e sia  $x$  un vettore scelto a caso su  $\mathcal{D}$ , se

$$\alpha \leq e^{-[f(x)-\hat{f}]_+/T}, \quad (4.13)$$

dove  $[f(x)-\hat{f}]_+ = \max\{0, f(x)-\hat{f}\}$ , allora il punto  $x$  è una realizzazione della variabile aleatoria distribuita secondo la funzione densità di probabilità  $\hat{p}_T(x)$  data

$$\hat{p}_T(x) = \frac{e^{-[f(x)-\hat{f}]_+/T}}{\int_{\mathcal{D}} e^{-[f(x)-\hat{f}]_+/T} dx}. \quad (4.14)$$

La nuova funzione densità di probabilità  $\hat{p}_T(x)$  può svolgere un ruolo simile a quello della funzione densità di probabilità originaria  $p_T(x)$ . Infatti, al diminuire della temperatura  $T$ , invece di concentrarsi solamente intorno ai minimi globali si concentra intorno a tutti i punti  $x \in \mathcal{D}$  tali che  $f(x) \leq \hat{f}$ . Se  $\hat{f}$  è il miglior valore della funzione obiettivo ottenuto, la funzione densità di probabilità  $\hat{p}_T(x)$  assegna maggiore probabilità alle regioni in cui si ha, comunque, un miglioramento della funzione obiettivo.

Una possibile utilizzazione di punti generati con la distribuzione con funzione densità di probabilità  $\hat{p}_T(x)$  è descritta nel seguente algoritmo.

#### **Algoritmo Simulated Annealing.**

*Passo 0:* si sceglie una temperatura iniziale  $T_0$ , si genera a caso un punto  $x_0$  su  $\mathcal{D}$ , si pone  $x_0^* = x_0$  e  $k = 1$ ;

*Passo 1:* si generano a caso un punto  $x_k$  su  $\mathcal{D}$  ed uno scalare  $\alpha_k$  su  $[0, 1]$ ;

*Passo 2:* se  $\alpha_k > e^{-[f(x_k)-f(x_{k-1}^*)]_+/T_{k-1}}$  allora si pone  $x_k^* = x_{k-1}^*$  e si va al Passo 6;

*Passo 3:* partendo da  $x_k$  si applica un algoritmo di ottimizzazione locale ottenendo  $y_k$ ;

*Passo 4:* se  $f(y_k) < f(x_{k-1}^*)$  allora si pone  $x_k^* = y_k$

altrimenti si pone  $x_k^* = x_{k-1}^*$ ;

*Passo 5:* si calcola la  $T_k \in (0, T_{k-1}]$ ;

*Passo 6:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 1.

Il precedente algoritmo può essere considerato una via di mezzo tra l'Algoritmo Multistart 1, dove le minimizzazioni locali vengono applicate a partire da ogni punto generato a caso su  $\mathcal{D}$ , e l'Algoritmo Multistart 2, dove le minimizzazioni locali vengono applicate

solamente a partire dai punti generati a caso su  $\mathcal{D}$  in cui si ha un miglioramento della funzione obiettivo. Grazie al test al Passo 2, nell'Algoritmo Simulated Annealing, le minimizzazioni vengono applicate a partire sia dai punti generati a caso su  $\mathcal{D}$  in cui si ha un miglioramento della funzione obiettivo e sia da punti generati a caso su  $\mathcal{D}$  in cui si ha un peggioramento della funzione obiettivo ma che possono essere considerati delle realizzazioni di variabili aleatorie distribuite secondo la funzione densità di probabilità  $\hat{p}_T(x)$ .

Per quanto riguarda le proprietà di convergenza delle sequenze dei punti generati dall'Algoritmo Simulated Annealing si può stabilire il seguente risultato.

**Proposizione 4.2.2** *Se la sequenza di temperature  $\{T_k\}$ , utilizzate nell'Algoritmo Simulated Annealing, è tale che le funzioni densità  $\hat{p}_{T_k}(x)$  definiscono una sequenza di misure di probabilità  $\{m_k(\cdot)\}$  che soddisfano le ipotesi di Proposizione 4.2.1 e se esiste un minimo globale  $x^*$  non vincolato della funzione  $f$  su  $\mathcal{D}$  per cui l'algoritmo di minimizzazione locale (utilizzato al Passo 2) soddisfa la Proprietà 1 (pag. 29), allora la sequenza  $\{x_k^*\}$  di punti aleatori prodotti dall'Algoritmo Simulated Annealing è tale che:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{Prob}\{x_k^* \in X^*\} = 1, \quad (4.15)$$

dove  $X^*$  è l'insieme dei minimi globali del Problema (3.33).

**Prova.** La dimostrazione della proposizione segue utilizzando gli stessi ragionamenti fatti per dimostrare la Proposizione 4.1.3, relativa alle proprietà di convergenza dell'Algoritmo Multistart 1, con la sola differenza di usare la Proposizione 4.2.1 invece della Proposizione 4.1.1  $\square$

Una condizione sufficiente a garantire che la sequenza delle temperature  $T_k$  prodotte dall'algoritmo siano tali da soddisfare l'ipotesi della precedente proposizione è che esista un  $\varepsilon > 0$  tale che

$$T_k \geq \varepsilon, \quad \text{per ogni } k.$$

Condizioni più deboli possono essere determinate notando che, per dimostrare il limite (4.15), è sufficiente che le misure di probabilità derivanti dalle funzioni densità di probabilità  $\hat{p}_T(x)$  soddisfino la (4.5) in corrispondenza solamente ad insiemi  $\mathcal{A}$  con  $\text{meas}(\mathcal{A}) > 0$  e contenuti nell'intorno  $B(x^*; \varepsilon)$  descritto nella Proprietà 1.

La scelta della sequenza di temperature  $\{T_k\}$ , oltre ad essere legata alla convergenza dell'algoritmo, influenza anche l'efficienza computazione dell'algoritmo. Infatti per temperature più basse si tenderà a produrre punti che hanno maggiore probabilità di essere una buona approssimazione di un minimo globale. Tuttavia questi punti saranno più difficili da generare (si veda il test al Passo 2). Viceversa, a temperature più alte, si genereranno più facilmente i punti ma che, però, avranno meno probabilità di essere buone approssimazioni di un minimo globale.

### 4.3 Metodi che usano “popolazioni” di punti

A partire dall’approccio probabilistico si sono sviluppati vari metodi di ottimizzazione globale di tipo euristico. Cioè metodi per cui non si può stabilire nessuna proprietà teorica di convergenza. Questi metodi nascono dall’esigenza di affrontare problemi di ottimizzazione reali. Infatti, per quanto visto nel capitolo precedente (si veda il Teorema 3.3.4 ed il Teorema 3.3.6) e per quanto descritto nei paragrafi precedenti di questo capitolo, le proprietà di convergenza di un metodo sono legate al fatto che, al crescere delle iterazione dell’algoritmo, la funzione obiettivo è valutata “praticamente” su tutto l’insieme ammissibile. Tuttavia seguire, anche in maniera approssimata, questo approccio può essere assolutamente impraticabile nella maggior parte dei casi reali. Per questo motivo sono stati proposti dei metodi che si basano sui seguenti passi:

- ottenere delle informazioni sul comportamento globale della funzione obiettivo sull’insieme ammissibile effettuando inizialmente un campionamento finito della funzione obiettivo su un insieme, detto *popolazione*, iniziale di punti.
- migliorare iterativamente i punti che costituiscono la popolazione attraverso la sostituzione dei punti in cui il valore della funzione obiettivo è più alta con dei nuovi punti ottenuti attraverso delle minimizzazioni locali “approssimate”;
- ripetere il precedente procedimento di miglioramento fino a quando la popolazione non si è “concentrata” intorno ai minimi globali della funzione obiettivo.

Tra le classi di metodi che si basano sull’uso di popolazioni di punti quelle più note e più utilizzate sono:

- *i metodi “controlled random search”;*
- *gli algoritmi genetici;*
- *gli algoritmi evolutivi;*
- *metodi di tipo “swarm”.*

Per brevità, nel seguito si descriveranno solamente un paio di esempi di algoritmi controlled random search, mentre per altre due classi ci si limiterà a richiamarne gli approcci. Questa scelta è dovuta, da una parte, alla efficienza mostrata dagli algoritmi controlled random search nel risolvere problemi di ottimizzazione globale reali e, dall’altra parte, alla difficoltà di dare delle trattazioni generali degli algoritmi genetici e degli algoritmi evolutivi in grado di rappresentare le varie scelte algoritmiche particolari.

#### 4.3.1 I metodi “controlled random search”

I metodi che appartengono a questa classe hanno origine dal seguente algoritmo dovuto a Price nel 1977. Come già detto, questo algoritmo utilizza una famiglia di punti che vengono inizialmente scelti a caso su  $\mathcal{D}$  e che vengono migliorati attraverso minimizzazioni su semplici.

**Algoritmo Controlled Random Search 1.**

*Passo 0:* sia  $m$  tale  $m \geq n + 1$ , si pone  $k = 0$  e si determina l'insieme iniziale

$$S_k = \{x_k^1, \dots, x_k^m\},$$

dove i punti  $x_k^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sono scelti a caso su  $\mathcal{D}$ ;

*Passo 1:* si determinano i punti  $x_k^{max}$ ,  $x_k^{min}$  tali che:

$$f(x_k^{max}) = \max_{x \in S_k} f(x) \qquad f(x_k^{min}) = \min_{x \in S_k} f(x);$$

se  $f(x_k^{max}) - f(x_k^{min}) \leq \varepsilon$  allora *stop*;

*Passo 2:* si scelgono  $n + 1$  punti  $x_k^{i_1}, \dots, x_k^{i_n}, x_k^{i_{n+1}}$ , a caso su  $S_k$ ;

si determina il centroide  $c_k$  dei  $n$  punti  $x_k^{i_1}, \dots, x_k^{i_n}$  dove

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_k^{i_j};$$

si determina il punto  $\tilde{x}_k$  attraverso la riflessione di  $x_k^{i_{n+1}}$  rispetto a  $c_k$

$$\tilde{x}_k = c_k - (x_k^{i_{n+1}} - c_k)$$

se  $\tilde{x}_k \notin \mathcal{D}$  si va al Passo 2;

*Passo 3:* se  $f(\tilde{x}_k) \geq f(x_k^{max})$  allora si pone:

$$S_{k+1} = S_k;$$

si pone  $k = k + 1$  e si va al Passo 2.

*Passo 4:* se  $f(\tilde{x}_k) < f(x_k^{max})$  allora si pone

$$S_{k+1} = S_k \cup \{\tilde{x}_k\} \setminus \{x_k^{max}\}$$

si pone  $k = k + 1$  e si va al Passo 1.

Nel Passo 0 vengono scelti a caso  $m$  punti su  $\mathcal{D}$ . Questi punti costituiscono la famiglia iniziale  $S_0$ . Ad una generica iterazione  $k$  si ha a disposizione la popolazione  $S_k$ .

Nel Passo 1, si effettua il test di arresto dell'algoritmo. In particolare vengono identificati i punti appartenenti a  $S_k$  in cui si ha il valore più alto della funzione obiettivo e quello in cui si ha il valore più basso. Il fatto che questi due valori della funzione obiettivo differiscano di poco dovrebbe indicare che la popolazione  $S_k$  è sufficientemente concentrata intorno ai minimi globali.

Nel Passo 2, si determina il nuovo punto di prova  $\tilde{x}$ . Tale punto viene generato scegliendo a caso  $n + 1$  punti tra la popolazione  $S_k$  e ribaltando uno di questi rispetto al centroide dei rimanenti  $n$  punti (figura (4.1)).

Nel Passo 3 e nel Passo 4 viene aggiornata la popolazione  $S_k$ . In particolare nel caso in cui nel nuovo punto si ha un valore della funzione obiettivo che più grande o uguale del peggior valore della funzione obiettivo nei punti della famiglia, la famiglia non viene cambiata (Passo 3). Mentre, se nel nuovo punto si ha un valore della funzione che è più piccolo del valore massimo che si ha nei punti della famiglia, il peggior punto della famiglia viene sostituito dal nuovo punto prodotto (Passo 4).

I valori più usati per le costanti che compaiono nel precedente algoritmo sono:  $m = 25n$  e  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

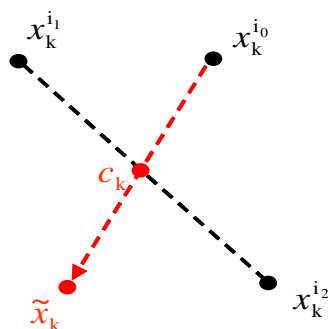


Figura 4.1: Esempio del calcolo del nuovo punto nell'algoritmo Controlled Random Search 1.

Dal punto di vista computazionale, il precedente algoritmo mostra generalmente una buona capacità di identificare le zone dell'insieme ammissibile in cui ci sono i minimi globali, ma una inefficienza a determinarne una buona approssimazione.

Per cercare di migliorarne questo comportamento computazionale, sono state proposte varie modifiche dell'Algoritmo di Price con l'obbiettivo di ottenere degli algoritmi con migliore capacità di determinare velocemente una buona approssimazione del minimo globale nel momento in cui l'algoritmo produce un punto in un intorno relativamente piccolo del minimo globale.

Una variazione dell'iniziale algoritmo controlled random search che presenta un buon comportamento computazionale è il seguente algoritmo.



## Algoritmo Controlled Random Search 2.

*Passo 0:* sia  $m$  tale  $m \geq n + 1$ , si pone  $k = 0$  e si determina l'insieme iniziale

$$S_k = \{x_k^1, \dots, x_k^m\},$$

dove i punti  $x_k^i$ ,  $i = 1, \dots, m$  sono scelti a caso su  $\mathcal{D}$ ;

*Passo 1:* si determinano i punti  $x_k^{max}$ ,  $x_k^{min}$  tali che:

$$f(x_k^{max}) = \max_{x \in S_k} f(x) \quad f(x_k^{min}) = \min_{x \in S_k} f(x);$$

se  $f(x_k^{max}) - f(x_k^{min}) \leq \varepsilon$  allora *stop*;

*Passo 2:* si scelgono  $n + 1$  punti  $x_k^{i_1}, \dots, x_k^{i_n}, x_k^{i_{n+1}}$  a caso su  $S_k$  e sia:

$$f(x_k^{i_{n+1}}) \geq f(x_k^{i_j}), \quad j = 1, \dots, n;$$

si determina il centroide *pesato*  $c_k$  dei  $n + 1$  punti  $x_k^{i_1}, \dots, x_k^{i_{n+1}}$  dove

$$c_k = \sum_{j=1}^{n+1} w_k^j x_k^{i_j}, \quad \text{con} \quad w_k^j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n+1} w_k^j = 1;$$

si determina il punto  $\tilde{x}_k$  attraverso la riflessione *pesata* di  $x_k^{i_{n+1}}$  rispetto a  $c_k$

$$\tilde{x}_k = c_k - \alpha_k (x_k^{i_{n+1}} - c_k), \quad \text{con} \quad \alpha_k \geq 0;$$

se  $\tilde{x}_k \notin \mathcal{D}$  si va al Passo 2;

*Passo 3:* se  $f(\tilde{x}_k) \geq f(x_k^{max})$  allora si pone:

$$S_{k+1} = S_k;$$

si pone  $k = k + 1$  e si va al Passo 2.

*Passo 4:* se  $f(\tilde{x}_k) < f(x_k^{max})$  allora si pone

$$S_{k+1} = S_k \cup \{\tilde{x}_k\} \setminus \{x_k^{max}\}$$

si pone  $k = k + 1$  e si va al Passo 1.

Per quanto riguarda le scelte dei pesi  $w_k^j$ ,  $j = 1, \dots, n + 1$ , e del passo  $\alpha_k$  si ha:

$$w_k^j = \frac{\eta_k^j}{\sum_{j=1}^{n+1} \eta_k^j}, \quad \eta_k^j = \frac{1}{f(x_k^{i_j}) - f(x_k^{min}) + \phi_k} \quad (4.16)$$

$$\alpha_k = 1 - \frac{f(x_k^{i_{n+1}}) - \sum_{j=1}^{n+1} w_k^j f(x_k^{i_j})}{f(x_k^{max}) - f(x_k^{min}) + \phi_k}, \quad (4.17)$$

con

$$\phi_k = \delta \frac{(f(x_k^{max}) - f(x_k^{min}))^2}{f(x_0^{max}) - f(x_0^{min})}, \quad (4.18)$$

dove  $\delta$  è una costante relativamente grande ( $\delta = n$  oppure  $\delta = 10^3$ ).

Nel Passo 2 di questo algoritmo, viene considerato direttamente un sempliceo  $n + 1$  dimensionale, se ne calcola un centroide pesato e si effettua un ribaltamento pesato del vertice, con il valore della funzione obiettivo più alto, rispetto al centroide. Dal punto di vista pratico, questo equivale a considerare i valori della funzione obiettivo nei vertici sufficientemente rappresentativi del comportamento della funzione obiettivo nel sempliceo considerato. Quindi a ritenere una buona direzione di discesa per la funzione obiettivo (a partire dal centroide pesato) la direzione che congiunge il vertice, in cui si ha il valore peggiore della funzione obiettivo, con il centroide.

L'utilizzazione di un sempliceo  $n + 1$  dimensionale può essere avvalorata anche dalla rappresentazione (3.9) dell'involucro convesso di una funzione. Infatti questo nuovo modo di ottenere il punto  $\tilde{x}_k$  può essere interpretato, in maniera relativamente approssimata, come una minimizzazione locale approssimata della funzione involucro convesso della funzione obiettivo.

L'uso di un centroide pesato e di un ribaltamento pesato deriva dal tentativo di ottenere che il nuovo algoritmo avesse lo stesso buon comportamento globale iniziale dell'Algoritmo di Price ed una migliore efficienza locale finale. Infatti per quanto riguarda i pesi  $w_k^j$ , si può notare che, nelle prime iterazioni, gli scalari  $\phi_k$  sono molto più grandi delle quantità  $f(x_k^{i_j}) - f(x_k^{min})$  che compaiono al denominatore delle espressioni degli scalari  $\eta_k^j$ . Perciò, per queste iterazioni, si ha che  $\eta_k^j \approx 1/\phi_k$  per  $j = \dots, n + 1$  da cui  $w_k^j \approx 1/(n + 1)$  per  $j = \dots, n + 1$ . Quindi, come per l'Algoritmo di Price, nelle prime iterazioni il centroide viene calcolato pesando in maniera uniforme i vertici del sempliceo. All'aumentare delle iterazioni, gli scalari  $\phi_k$ , dati dalla (4.18), tendono a diminuire, fino a tendere a zero al tendere all'infinito del numero di iterazioni. Perciò, dopo un numero sufficientemente alto di iterazioni, si ha che  $\eta_k^j \approx 1/(f(x_k^{i_j}) - f(x_k^{min}))$  da cui segue che i pesi  $w_k^j$  corrispondenti a vertici, con valori della funzione più piccoli, saranno più grandi. Per cui il centroide pesato tenderà ad avvicinarsi verso i vertici con valori della funzione più piccola. Discorso analogo per gli scalari  $\alpha_k$ , dati dalla (4.17). Infatti, ricordando la (4.18), si ha che nelle prime iterazioni  $\alpha_k \approx 1$  per cui si ha un ribaltamento analogo all'Algoritmo di Price. Al crescere delle iterazioni, invece, i valori dei parametri  $\alpha_k$  tenderanno a diminuire producendo spostamenti più limitati che non producono punti al di fuori delle regioni già identificate ed in cui dovrebbero essere i minimi globali (figura (4.2) e figura (4.3)).

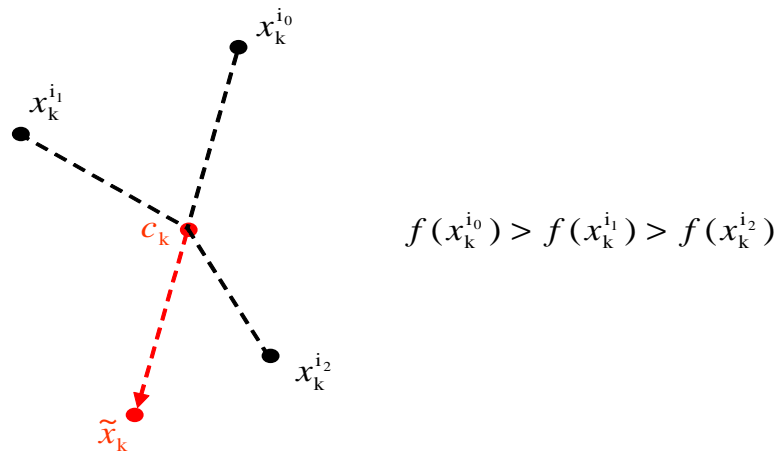


Figura 4.2: Esempio del calcolo del nuovo punto nell'algorithm Controlled Random Search 2 (iterazioni iniziali).

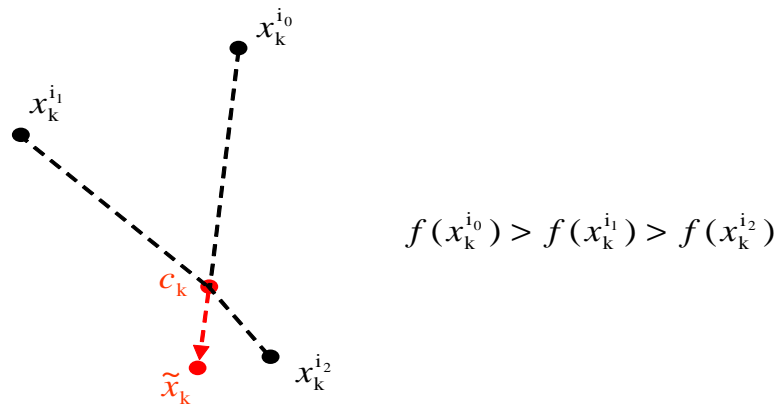


Figura 4.3: Esempio del calcolo del nuovo punto nell'algorithm Controlled Random Search 2 (al crescere del numero di iterazioni).

### 4.3.2 Algoritmi genetici

La differenza principale di questa classe di metodi che utilizzano popolazioni di punti rispetto ai metodi controlled random search risiede nel fatto che ad ogni iterazione, invece di tentare di cambiare un solo punto della famiglia, si cerca di cambiarne un certo numero. Nel determinare i nuovi punti, gli algoritmi genetici cercano di trarre ispirazione dai processi evolutivi biologici. Infatti negli algoritmi genetici inizialmente proposti le variabili del problema venivano codificate attraverso stringhe di binari, i nuovi punti venivano generati attraverso la ripetizione delle seguenti due operazioni genetiche::

- *l'operazione di "crossover"* che consiste nel selezionare a caso due punti della popolazione (punti genitori) e tagliando le stringhe che li rappresentano in corrispondenza di uno stesso indice scelto a caso; i punti figli derivavano dallo scambio delle parti delle stringhe dei genitori (figura 4.4);
- *l'operazione di "mutation"* in cui un vettore della popolazione viene "mutato" cambiandogli una componente della stringa scelta a caso (figura 4.5).

Gli algoritmi genetici più recenti non utilizzano la codifica binaria ma cercano di adattare le due precedenti operazioni alla codifica originaria delle variabili del problema di ottimizzazione da risolvere. Esempi di adattamento delle operazioni di "crossover" e di "mutation" al caso in cui i vettori hanno la loro codifica originaria sono le seguenti:

- *l'operazione di "crossover"* se  $x \in \mathcal{D}$  e  $y \in \mathcal{D}$  sono dei vettori genitori scelti dalla popolazione, le loro componenti vengono mischiate per dare vita a dei nuovi vettori figli, nel seguente modo:

$$\begin{aligned}(\tilde{x})_i &= \alpha^i(x)_i + (1 - \alpha^i)(y)_i, & i = 1, \dots, n, \\(\tilde{y})_i &= \alpha^i(y)_i + (1 - \alpha^i)(x)_i, & i = 1, \dots, n,\end{aligned}$$

dove gli scalari  $\alpha^i$  sono scelti a caso su  $[-0.5, 1.5]$ ;

- *l'operazione di "mutation"* un vettore della popolazione  $x \in \mathcal{D}$  viene "mutato" perturbargli una sola componente, cioè viene generato il nuovo punto  $\hat{x}$  tale che:

$$\begin{aligned}(\hat{x})_i &= (x)_i + \hat{\alpha}(u - l)_i, \\(\hat{x})_j &= (x)_j, & j = 1, \dots, n, \quad j \neq i,\end{aligned}$$

dove l'indice  $i$  è scelto a caso e  $\hat{\alpha} = 0.1$  oppure è scelto a caso tra  $[-0.1, 0.1]$ .

### 4.3.3 Algoritmi evolutivi

La caratteristica che distingue gli algoritmi evolutivi dagli algoritmi controlled random search e dagli algoritmi genetici è il fatto che, ad ogni iterazione, questi algoritmi cercano di aggiornare tutti i punti della popolazione.

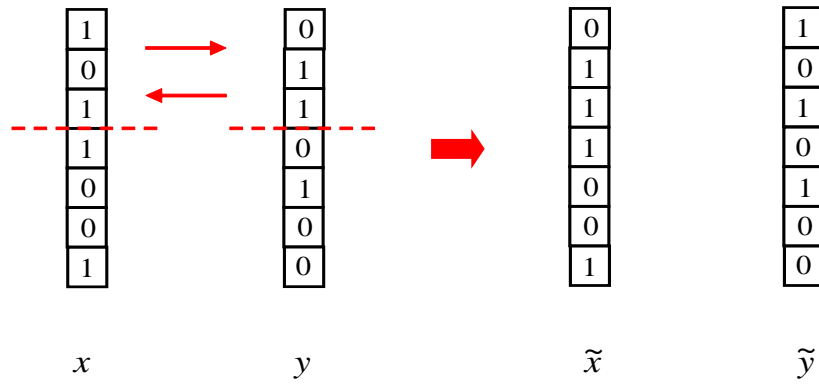


Figura 4.4: Esempio dell'operazione di "crossover".

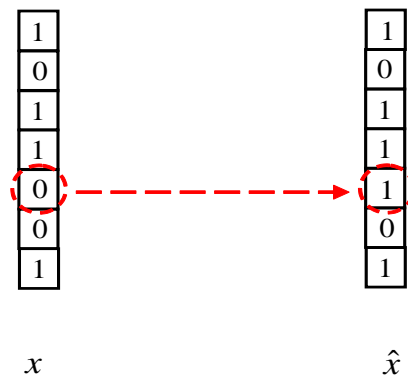


Figura 4.5: Esempio dell'operazione di "mutation".

Più in particolare, essi cercano di sostituire ogni punto  $x \in \mathcal{D}$  della popolazione con un nuovo punto  $y \in \mathcal{D}$  ottenuto dalla combinazione di operazioni di “crossover” e di “mutation”. Se nel nuovo punto  $y$  si ha un miglioramento della funzione obiettivo allora il punto di partenza  $x$  viene sostituito dal nuovo punto  $y$ , altrimenti nella popolazione viene mantenuto il punto  $x$ .

Le tecniche con cui vengono questi nuovi punti variano in maniera significativa da algoritmo ad algoritmo. Un esempio di una tale tecnica è il seguente:

scelto un punto  $x \in \mathcal{D}$  della popolazione il nuovo punto  $y \in \mathcal{D}$  si determina a partire da  $x$  e da un punto  $\hat{x} \in \mathcal{D}$  ottenuto dalla seguente operazione:

$$\hat{x} = x^a + \hat{\alpha}(x^b - x^c),$$

dove  $\hat{\alpha} \in (0, 1]$  e  $x^a, x^b, x^c$  sono scelti a caso nella popolazione di punti;

il nuovo punto  $y$  è dato, quindi, dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} (y)_i &= (\hat{x})_i & \text{se } \alpha^i \leq 0.5 & \text{ oppure } i = \hat{i}, \\ (y)_i &= (x)_i & \text{se } \alpha^i > 0.5 & \text{ e } i \neq \hat{i}, \end{aligned}$$

dove l'indice  $\hat{i}$  è scelto a caso tra  $\{1, \dots, n\}$  e gli scalari  $\alpha^i, i = 1, \dots, n$ , sono scelti a caso tra  $[0, 1]$ .

Negli algoritmi evolutivi più recenti si cerca di migliorare ogni punto della popolazione sfruttando anche il più possibile tutte le informazioni sulla funzione obiettivo contenute nei punti presenti nella popolazione.

#### 4.3.4 Metodi di tipo “swarm”

I metodi di tipo “swarm” hanno in comune con gli algoritmi evolutivi l'idea di cercare aggiornare, ad ogni iterazione, tutti i punti della popolazione. Ma, a differenza di quest'ultimi, non traggono ispirazione dai processi evolutivi ma piuttosto dal comportamento degli sciame (swarm). Infatti essi interpretano i vettori che formano la famiglia all'iterazione  $k$ -esima come punti che identificano la posizione dei membri di uno sciame all'istante  $k$ -esimo. Quindi al variare delle iterazione, l'evoluzione della popolazione è associata al movimento complessivo dello sciame.

Lo stato dello sciame al generico istante  $k$ -esimo è identificato dalle “posizioni” degli elementi dello sciame

$$S_k = \{x_k^1, \dots, x_k^m\},$$

e dalle corrispondenti velocità

$$V_k = \{v_k^1, \dots, v_k^m\}.$$

Nel definire le posizioni degli elementi all'istante successivo  $k + 1$  (cioè nel definire il nuovo insieme  $S_{k+1}$ ), questi metodi cercano di simulare il comportamento in natura dei

membri di uno sciame. Infatti il movimento di ciascun elemento tiene conto della esperienza individuale (che può essere rappresentata dal miglior punto incontrato durante il movimento del  $i$ -esimo membro dello sciame) e dalla esperienza globale dello sciame (che può essere rappresentata dal miglior punto incontrato durante il movimento di tutti i membri dello sciame).

In particolare, un esempio di formule utilizzate dai metodi di tipo “swarm” per descrivere il movimento della famiglia di punti è il seguente:

$$\begin{aligned} v_{k+1}^i &= v_k^i + cr_k^1(\bar{x}_k^i - x_k^i) + cr_k^2(x_k^* - x_k^i), & i = 1, \dots, m, \\ x_{k+1}^i &= x_k^i + v_{k+1}^i, & i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_k^i) &= \min_{h=1, \dots, k} f(x_h^i), \\ f(x_k^*) &= \min_{i=1, \dots, m} f(\bar{x}_k^i), \end{aligned}$$

dove  $c$  è una costante positiva, chiamata costante di accelerazione,  $r_k^1$  e  $r_k^2$  sono dei scalari scelti a caso su  $[0, 1]$ .

Nei metodi di tipo “swarm” più recenti, per controllare meglio l’evoluzione delle velocità ed evitare che siano usati vettori  $v_k^i$  troppo grandi, vengono introdotti ulteriori coefficienti nella formula che fornisce le nuove velocità:

$$v_{k+1}^i = \chi(wv_k^i + c^1 r_k^1(\bar{x}_k^i - x_k^i) + c^2 r_k^2(x_k^* - x_k^i)), \quad i = 1, \dots, m.$$

dove  $w$  è una costante chiamata inerzia,  $c^1$  e  $c^2$  sono costanti positive chiamate coefficiente cognitivo e coefficiente sociale,  $\chi$  è una costante chiamata fattore di costrizione.

## Capitolo 5

# Metodi che utilizzano partizioni dell'insieme ammissibile

In questo capitolo viene brevemente considerata una classe di metodi deterministici di ottimizzazione globale che si basano sull'idea di cercare di produrre sequenze di partizioni dell'insieme ammissibile che tendano ad essere più addensate nelle regioni in cui ci sono i minimi globali della funzione obiettivo.

Nella prima sezione di questo capitolo viene descritto lo schema generale di un algoritmo appartenente a questa classe e se ne indentificano le sue proprietà generali. Nelle sezioni successive, dopo aver richiamato la definizione di funzione Lipschitziana ed alcune delle proprietà di questa classe di funzioni, si descrivono alcuni metodi di ottimizzazione globale che sfruttano la Lipschitzianità della funzione obiettivo per produrre partizioni efficienti dell'insieme ammissibile.

### 5.1 Proprietà generali di un metodo che usa partizioni dell'insieme ammissibile

Per descrivere in maniera formale questa nuova classe di metodi è necessario introdurre la definizione di partizione di un insieme.

**Definizione 5.1.1 (Partizione di un insieme)** *Dato un insieme  $\mathcal{F} \subseteq R^n$ , una collezione di insiemi  $\{\mathcal{F}^i : i \in I\}$  è una partizione dell'insieme  $\mathcal{F}$  se si ha:*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}^i,$$
$$\mathcal{F}^i \cap \mathcal{F}^j = \partial \mathcal{F}^i \cap \partial \mathcal{F}^j, \quad \forall i, j \in I, \quad i \neq j;$$

dove  $\partial \mathcal{F}^j$  indica la frontiera dell'insieme  $\mathcal{F}^j$ .



### 5.1.1 Schema generale di un metodo che usa partizioni dell'insieme ammissibile

Nel caso particolare in cui l'insieme ammissibile è costituito dall'insieme  $\mathcal{D} = \{x \in R^n : l \leq x \leq u\}$  un modo naturale di partizionarlo è quello di suddividerlo in sottoinsiemi che hanno la stessa struttura. Seguendo questa linea, in questo capitolo, si considerano metodi che hanno come punto caratterizzante il fatto che, ad ogni iterazione, viene prodotta una partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  dell'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$  con

$$\mathcal{D}^i = \{x \in R^n : l^i \leq x \leq u^i\}, \quad i \in I_k.$$

Un modello generale di un algoritmo che genera una sequenza di partizioni dell'insieme ammissibile può essere descritto dal seguente schema.

**Algoritmo di Partizione**

*Passo 0:* Si pone  $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$ ,  $l^0 = l$ ,  $u^0 = u$ ,  $I_0 = \{0\}$  e  $k = 0$ ;

*Passo 1:* data la partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  di  $\mathcal{D}$  con

$$\mathcal{D}^i = \{x \in R^n : l^i \leq x \leq u^i\}, \quad \text{per ogni } i \in I_k,$$

si identifica un sottoinsieme di indici  $I_k^* \subseteq I_k$ ;

si pone  $\bar{I}^0 = I_k$ ,  $\hat{I}^0 = I_k^*$  e  $p = 0$

*Passo 2:* si sceglie un indice  $h \in \hat{I}^p$  e si partiziona  $\mathcal{D}^h$  in  $m \geq 2$  sottointervalli

$$\mathcal{D}^{h_1}, \mathcal{D}^{h_2}, \dots, \mathcal{D}^{h_m}.$$

*Passo 3:* si pone:

$$\bar{I}^{p+1} = \bar{I}^p \cup_{j=1, \dots, m} \{h_j\} \setminus \{h\},$$

$$\hat{I}^{p+1} = \hat{I}^p \setminus \{h\},$$

se  $\hat{I}^{p+1} \neq \emptyset$  si pone  $p = p + 1$  e si torna al Passo 2;

*Passo 4:* si definisce la nuova partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_{k+1}\}$  con

$$I_{k+1} = \bar{I}^{p+1},$$

si pone  $k = k + 1$  e si torna al Passo 1.

Al Passo 1, data una partizione dell'insieme ammissibile, l'algoritmo seleziona (secondo un criterio non ancora specificato) un certo numero di sottoinsiemi (identificati dall'insieme di indici  $I_k^*$ ) appartenenti alla partizione. Nel passo 2 e nel passo 3 ognuno dei

sottointervalli selezionati viene partizionato (utilizzando una tecnica anche essa non specificata) in un numero  $m \geq 2$  di sottoinsiemi.

Per effettuare un'analisi di alcune proprietà generali del precedente algoritmo è necessario caratterizzare le tecniche di partizione utilizzabili attraverso il fatto che siano in grado di soddisfare la seguente ipotesi.

**Assunzione 5.1.1** *Esistono dei scalari  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$ , con  $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$  e  $\varepsilon_3 \geq 0$ , tali che ogni insieme  $\mathcal{D}^h$ ,  $h \in I_k^*$ , selezionato dall'algoritmo in una qualsiasi iterazione  $k$ , è partizionato in  $m$  sottoinsiemi  $\mathcal{D}^{h_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$  che soddisfano:*

$$\varepsilon_1 \|u^h - l^h\| \leq \|u^{h_j} - l^{h_j}\| \leq \varepsilon_2 \|u^h - l^h\|, \quad j = 1, \dots, m; \quad (5.1)$$

$$\frac{(u^{h_j} - l^{h_j})_{i_{\min}}}{(u^{h_j} - l^{h_j})_{i_{\max}}} \geq \varepsilon_3 \frac{(u^h - l^h)_{i_{\min}}}{(u^h - l^h)_{i_{\max}}}. \quad (5.2)$$

dove, per un qualsiasi vettore  $v \in R^n$ ,  $i_{\min}$  e  $i_{\max}$  sono dati da  $(v)_{i_{\min}} = \min_{i=1, \dots, n} (v)_i$  e  $(v)_{i_{\max}} = \max_{i=1, \dots, n} (v)_i$

A differenza degli algoritmi di minimizzazione locale, che sono caratterizzati dalla sequenza di punti che generano, l'evoluzione dell'Algoritmo di Partizione è rappresentata dallo sviluppo dei sottoinsiemi generati. Perciò le sue proprietà teoriche possono essere analizzate caratterizzando le sequenze di insiemi che vengono prodotte al tendere all'infinito delle iterazioni dell'algoritmo.

Queste sequenze di insiemi possono essere individuate facendo corrispondere ad ogni sottoinsieme  $\mathcal{D}^{i_k}$ , con  $i_k \in I_k$ , della partizione dell'insieme  $\mathcal{D}$  della generica iterazione  $k$ -esima, un particolare sottoinsieme  $\mathcal{D}^{i_{k-1}}$ , con  $i_{k-1} \in I_{k-1}$  della partizione della iterazione precedente. In particolare, l'insieme  $\mathcal{D}^{i_{k-1}}$  è definito nelle seguente maniera:

- se il sottoinsieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  nasce da un processo di divisione allora  $\mathcal{D}^{i_{k-1}}$  è il sottoinsieme che lo ha generato;
- se, invece, il sottoinsieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  non deriva da un processo di partizione allora si pone  $\mathcal{D}^{i_{k-1}} = \mathcal{D}^{i_k}$ .

Ripetendo lo stesso procedimento, si può associare all'insieme  $\mathcal{D}^{i_{k-1}}$  un insieme  $\mathcal{D}^{i_{k-2}}$ , con  $i_{k-2} \in I_{k-2}$ , della partizione della iterazione  $k-2$ , a quest'ultimo si può associare uno della partizione della iterazione  $k-3$  e così via fino ad arrivare all'insieme  $\mathcal{D}^{i_0} = \mathcal{D}$ . Quindi, ad ogni sottoinsieme  $\mathcal{D}^{i_k}$ , con  $i_k \in I_k$ , della partizione della iterazione  $k$ -esima si può far corrispondere la seguente collezione di insiemi

$$\mathcal{D}^{i_0}, \mathcal{D}^{i_1}, \dots, \mathcal{D}^{i_{k-1}}, \mathcal{D}^{i_k},$$

Al crescere delle iterazioni dell'algoritmo, la precedente collezione di insiemi produce una sequenza annidata  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  di insiemi cioè una sequenza tale che, per ogni  $k$ , si ha:

$$\mathcal{D}^{i_{k+1}} \subseteq \mathcal{D}^{i_k}.$$

Inoltre, ad ogni iterazione, le istruzioni del Passo 2 implicano che un determinato intervallo viene suddiviso in un numero prefissato di sottointervalli e, quindi, il numero di sottoinsiemi dell'insieme ammissibile aumenta di una quantità fissa. Tra le sequenze annidate prodotte dall'algoritmo alcune sono particolarmente significative, in particolare si ha la sequenza definizione.

**Definizione 5.1.2** Una sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'Algoritmo di Partizione è detta strettamente annidata se

$$\mathcal{D}^{i_{k+1}} \subset \mathcal{D}^{i_k}, \quad \text{per un numero infinito di volte.} \quad (5.3)$$

Perciò, per le sequenze non strettamente annidate, esiste un indice  $k_0$  dopo il quale il sottoinsieme  $\mathcal{D}^{i_{k_0}}$  non viene più suddiviso, cioè:

$$\mathcal{D}^{i_k} = \mathcal{D}^{i_{k_0}}, \quad \text{per tutti } k \geq k_0. \quad (5.4)$$

Mentre per quelle strettamente annidate il processo di divisione continua un numero infinito di volte.

Le tre seguenti proposizioni descrivono delle caratterizzazioni matematiche delle sequenze di insiemi strettamente annidate prodotte dall'Algoritmo di Partizione.

**Proposizione 5.1.3** Se l'Assunzione 5.1.1 è soddisfatta, una sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'Algoritmo di Partizione è strettamente annidata se e solamente se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| = 0. \quad (5.5)$$

**Prova.** Sia  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  una sequenza prodotta dall'Algoritmo di Partizione. Dalla definizione della sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  e dalle istruzioni dell'algoritmo, ogni volta che accade che

$$\mathcal{D}^{i_k} \subset \mathcal{D}^{i_{k-1}},$$

significa che, nell'iterazione  $k-1$ , il sottoinsieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  è stato generato dalla partizione dell'insieme  $\mathcal{D}^{i_{k-1}}$ . Dall'Assunzione 5.1.1 si ha

$$\varepsilon_1 \|u^{i_{k-1}} - l^{i_{k-1}}\| \leq \|u^{i_k} - l^{i_k}\| \leq \varepsilon_2 \|u^{i_{k-1}} - l^{i_{k-1}}\|, \quad (5.6)$$

Ricordando nuovamente la definizione della sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  si ha che, per  $j = 1, \dots, k$ ,

$$\mathcal{D}^{i_j} \subset \mathcal{D}^{i_{j-1}} \quad \text{oppure} \quad \mathcal{D}^{i_j} = \mathcal{D}^{i_{j-1}}.$$

Applicando ripetutamente la (5.6) si ha

$$(\varepsilon_1)^{p_k} \|u^0 - l^0\| \leq \|u^{i_k} - l^{i_k}\| \leq (\varepsilon_2)^{p_k} \|u^0 - l^0\|, \quad (5.7)$$

dove  $p_k$  indica quante volte il processo di divisione del Passo 2 è intervenuto per generare l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  oppure, equivalentemente, quante volte si ha la stretta inclusione tra due insiemi successivi nella sequenza  $\mathcal{D}^{i_0}, \mathcal{D}^{i_1}, \dots, \mathcal{D}^{i_{k-1}}, \mathcal{D}^{i_k}$ .

Ora, se la sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'algoritmo è strettamente annidata segue, per definizione, che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \infty,$$

da cui, utilizzando la (5.7) e il fatto che  $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ , si ottiene che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon_2)^{p_k} \|u^0 - l^0\| = 0.$$

Viceversa, se la sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'algoritmo soddisfa il limite (5.5), dalla (5.7) segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\varepsilon_1)^{p_k} \|u^0 - l^0\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| = 0.$$

La precedente relazione e il fatto che  $\varepsilon_1 \in (0, 1)$  implicano che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \infty,$$

da cui segue che la sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'algoritmo è strettamente annidata.  $\square$

**Proposizione 5.1.4** *Se l'Assunzione 5.1.1 è soddisfatta, una sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'Algoritmo di Partizione è strettamente annidata se e solamente se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{i_k} = \bar{x} \tag{5.8}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l^{i_k} = \bar{x}; \tag{5.9}$$

oppure, equivalentemente

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\}.$$

**Prova.** Si dimostra inizialmente che se la sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'algoritmo è strettamente annidata allora valgono i limiti (5.8) e (5.9).

Si consideri le sequenze di scalari  $\{(u^{i_k})_j\}$  e  $\{(l^{i_k})_j\}$ , con  $j = 1, \dots, n$ . Dalle istruzioni dell'algoritmo si può facilmente notare che, per ogni  $k$ , si ha:

$$(l)_j \leq (u^{i_k})_j, \quad (u^{i_{k+1}})_j \leq (u^{i_k})_j, \quad j = 1, \dots, n, \tag{5.10}$$

$$(l^{i_k})_j \leq (u)_j, \quad (l^{i_k})_j \leq (l^{i_{k+1}})_j, \quad j = 1, \dots, n. \tag{5.11}$$

Per ogni  $j = 1, \dots, n$ , la (5.10) mostra che  $\{(u^{i_k})_j\}$  è una sequenza di scalari non crescente e limitata inferiormente mentre la (5.11) implica che  $\{(l^{i_k})_j\}$  è una sequenza di scalari non decrescente e limitata superiormente, da cui segue l'esistenza dei seguenti limiti:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (u^{i_k})_j &= (\bar{u})_j, & j &= 1, \dots, n, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (l^{i_k})_j &= (\bar{l})_j, & j &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

che, a loro volta, implicano l'esistenza dei due vettori  $\bar{u}, \bar{l} \in R^n$  tali che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u^{i_k} = \bar{u}, \quad (5.12)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l^{i_k} = \bar{l}. \quad (5.13)$$

Per quanto riguarda i due vettori  $\bar{u}$  e  $\bar{l}$  si ha:

$$\|\bar{u} - \bar{l}\| \leq \|\bar{u} - u^{i_k}\| + \|u^{i_k} - l^{i_k}\| + \|l^{i_k} - \bar{l}\| \quad (5.14)$$

facendo il limite per  $k$  tendente all'infinito alla precedente relazione e, ricondando i limiti (5.12) e (5.13) e la Proposizione 5.1.3, si ha:

$$\bar{u} = \bar{l} = \bar{x}. \quad (5.15)$$

La prova dell'uguaglianza  $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\}$  segue direttamente dalla definizione degli insiemi  $\mathcal{D}^{i_k}$  e dalle (5.8), (5.9) e (5.15).

Se, invece, valgono i limiti (5.8) e (5.9) segue che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{i_k} - \bar{x}\| + \lim_{k \rightarrow \infty} \|l^{i_k} - \bar{x}\| = 0$$

che, utilizzando la Proposizione 5.1.3, implica che la sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  è strettamente annidata.  $\square$

**Proposizione 5.1.5** *Se l'Assunzione 5.1.1 è soddisfatta, una sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'Algoritmo di Partizione è strettamente annidata e  $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\}$  se e solamente se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un indice  $\bar{k}$  tale che per ogni  $k \geq \bar{k}$  si ha:*

$$\mathcal{D}^{i_k} \subset B(\bar{x}; \varepsilon). \quad (5.16)$$

**Prova.** Dalla definizione di norma segue che per ogni  $x \in \mathcal{D}^{i_k}$  si ha che

$$\|x - l^{i_k}\| \leq \|u^{i_k} - l^{i_k}\|. \quad (5.17)$$

Utilizzando il limite (5.9) di Proposizione 5.1.4 ed il limite (5.5) di Proposizione 5.1.3 si ha che, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $\bar{k}$  tale che per ogni  $k \geq \bar{k}$  si ha:

$$\|l^{i_k} - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5.18)$$

$$\|u^{i_k} - l^{i_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.19)$$

Dalle (5.17), (5.18) e (5.19), per ogni  $k \geq \bar{k}$  e per ogni  $x \in \mathcal{D}^{i_k}$ , si ha che :

$$\|x - \bar{x}\| \leq \|x - l^{i_k}\| + \|l^{i_k} - \bar{x}\| \leq \|u^{i_k} - l^{i_k}\| + \|l^{i_k} - \bar{x}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

da cui segue la dimostrazione della (5.16).

Viceversa se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $\bar{k}$  tale che per ogni  $k \geq \bar{k}$  vale la (5.16) segue, a maggior ragione, che

$$u^{i_k} \subset B(\bar{x}; \varepsilon) \quad l^{i_k} \subset B(\bar{x}; \varepsilon), \quad (5.20)$$

che mostrano che i due limiti (5.8) e (5.9) di Proposizione 5.1.4 valgono e, quindi, la sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  è strettamente annidata.  $\square$

Dopo aver descritto alcune proprietà delle sequenze di insiemi strettamente annidate prodotte dall'Algoritmo di Partizione, nella seguente proposizione si affronta il problema di garantire che tale algoritmo produca almeno una di queste sequenze.

**Proposizione 5.1.6** *Se l'Assunzione 5.1.1 è soddisfatta, l'Algoritmo di Partizione genera almeno una sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$ .*

**Prova.** La dimostrazione segue ricordando i seguenti due punti caratterizzanti l'Algoritmo di Partizione:

- alla generica iterazione  $k$ -esima, l'algoritmo ha prodotto una partizione  $\{\mathcal{D}^i, i \in I_k\}$  dell'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$  tale che:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i \in I_k} \mathcal{D}^i, \quad \text{Int}(\mathcal{D}^i) \cap \text{Int}(\mathcal{D}^j) = \emptyset, \quad \forall i, j \in I_k, \quad i \neq j; \quad (5.21)$$

- ripetendo gli argomenti utilizzati nella dimostrazione della Proposizione 5.1.3 segue che l'applicazione ripetuta dell'Assunzione 5.1.1 implica, per ogni  $i \in I_k$ ,

$$(\varepsilon_1)^{p_i} \|u^0 - l^0\| \leq \|u^i - l^i\| \leq (\varepsilon_2)^{p_i} \|u^0 - l^0\|; \quad (5.22)$$

$$\frac{(u^i - l^i)_{i_{\min}}}{(u^i - l^i)_{i_{\max}}} \geq (\varepsilon_3)^{p_i} \frac{(u^0 - l^0)_{i_{\min}}}{(u^0 - l^0)_{i_{\max}}}. \quad (5.23)$$

dove  $p_i$  indica il numero di volte in cui processo di divisione è intervenuto per generare l'insieme  $\mathcal{D}^i$  a partire dall'insieme iniziale  $\mathcal{D}$ .

Ora, si supponga per assurdo che l'algoritmo non generi nessuna sequenza strettamente annidata. Questo implicherebbe l'esistenza di un valore  $\bar{p}$  tale che, per qualsiasi  $k$ , limiterebbe superiormente i numeri di processi di divisione che avrebbero generato i sottoinsiemi  $\mathcal{D}^i$ , con  $i \in I_k$ , della partizione di  $\mathcal{D}$  nella iterazione  $k$ -esima. Cioè, per ogni  $k$  e per ogni  $i \in I_k$ , si avrebbe che:

$$p_i \leq \bar{p}. \quad (5.24)$$

Le (5.22),(5.23) e (5.24) implicherebbero che, per ogni  $k$  e per ogni  $i \in I_k$ ,

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1)^{\bar{p}} \|u^0 - l^0\| &\leq \|u^i - l^i\| \\ \frac{(u^i - l^i)_{i_{\min}}}{(u^i - l^i)_{i_{\max}}} &\geq (\varepsilon_3)^{\bar{p}} \frac{(u^0 - l^0)_{i_{\min}}}{(u^0 - l^0)_{i_{\max}}} \end{aligned}$$

da cui se ne ricaverebbe l'esistenza di una costante  $\bar{\delta}$  tale che, per ogni  $k$  e per ogni  $i \in I_k$ , risulterebbe:

$$\text{meas}(\mathcal{D}^i) \geq \delta. \quad (5.25)$$

Dalle istruzioni dell'algoritmo si ha che, ad ogni iterazione, viene generata una nuova partizione con un numero di sottoinsiemi che è aumentato di  $m \geq 2$  elementi rispetto alla partizione precedente. Quindi, per  $k$  tendente all'infinito, il numero di sottoinsiemi che costituiscono le partizioni tende all'infinito. Questo può essere espresso equivalentemente con

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |I_k| = \infty, \quad (5.26)$$

dove  $|I_k|$  indica la cardinalità dell'insieme  $I_k$ , cioè il numero di indici che lo compongono. Le (5.21), (5.25) e (5.26) produrrebbero un assurdo con la compattezza dell'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$ . Infatti le (5.21), (5.25) e (5.26) implicherebbero che un insieme compatto può essere partizionato in un numero arbitrariamente grande di insiemi che hanno misura uniformemente diversa da zero.  $\square$

I risultati descritti in questa sottosezione derivano scegliendo la tecnica di partizione utilizzata nello schema generale dell'Algoritmo di Partizione in maniera che l'Assunzione 5.1.1 sia soddisfatta.

Le prossime due sottosezioni sono dedicate all'analisi del comportamento asintotico dell'algoritmo nel caso di due differenti approcci per la scelta dei sottoinsiemi da partizionare.

### 5.1.2 Scelta dei sottoinsiemi da partizionare: sottoinsiemi di dimensioni più grandi.

Una possibile caratteristica su cui possono basarsi i metodi che utilizzano partizioni è quella di cercare di localizzare i minimi globali tentando di analizzare il comportamento della funzione obiettivo su insiemi sempre più piccoli. Infatti al diminuire delle dimensioni dell'insieme, le informazioni locali della funzioni diventano sempre più attendibili. Seguendo questa impostazione, la scelta dei sottoinsiemi da partizionare deve garantire che, al crescere delle iterazioni, le dimensioni di tutti gli insiemi che costituiscono la partizione tendano a diminuire. In questa sottosezione viene mostrato che questa caratteristica può essere garantita richiedendo che almeno uno dei sottoinsiemi di dimensione massima è partizionato, ad ogni iterazione.

Per formalizzare questa modalità di scelta dei sottoinsiemi da partizionare ed effettuare l'analisi teorica è necessario introdurre alcune nuove notazioni. Data una partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  si identifica l'ampiezza massima dei sottointervalli con:

$$d_k^{max} = \max_{i \in I_k} \|u^i - l^i\|, \quad (5.27)$$

e l'insieme degli indici dei sottoinsiemi che hanno ampiezza massima con:

$$I_k^{max} = \{i \in I_k : \|u^i - l^i\| = d_k^{max}\}. \quad (5.28)$$

A questo punto si può introdurre la seguente assunzione.

**Assunzione 5.1.2** *Esiste un infinito sottoinsieme di indici  $K \subseteq \{1, 2, 3, \dots\}$ , tale che  $I_k^{\max} \cap I_k^* \neq \emptyset$  per ogni  $k \in K$ .*

La proposizione seguente mostra che, se almeno un sottoinsieme di dimensione massima viene selezionato in un sottoinsieme infinito di iterazione, il processo di partizione di ogni sottoinsieme generato non viene interrotto mai.

**Proposizione 5.1.7** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.2 siano soddisfatte. Siano  $\{D^i, i \in I_k\}$  la partizione generata dall'Algoritmo di Partizione all'iterazione  $k$ -esima e  $d_k^{\max}$  la quantità data dalla (5.27). Allora*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^{\max} = 0. \quad (5.29)$$

**Prova.** Dalle istruzioni dell'Algoritmo di Partizione si ha che la sequenza di scalari  $\{d_k^{\max}\}$  è non crescente e limitata inferiormente. Perciò la sequenza  $\{d_k^{\max}\}$  è convergente. Si supponga, per assurdo, che il limite (5.29) non sia verificato e che, quindi, esista un valore  $\bar{\delta} > 0$  tale che, per tutti  $k$ , si abbia:

$$d_k^{\max} > \bar{\delta}. \quad (5.30)$$

Dalla compattezza dell'insieme  $\mathcal{D}$  si ha che il numero di sottointervalli che hanno ampiezza

$$\|u^i - l^i\| > \bar{\delta}$$

è limitato superiormente da un numero  $N$ . Infatti, in caso contrario, si avrebbe la contraddizione che l'insieme compatto  $\mathcal{D}$  potrebbe essere partizionato in un numero infinito di sottointervalli con ampiezza delle diagonali maggiori della quantità  $\bar{\delta}$ .

Per ogni iterazione  $k$ , si può definire il seguente insieme di indici

$$\tilde{I}_k(\bar{\delta}) = \{i \in I_k : \|u^i - l^i\| > \bar{\delta}\},$$

cioè l'insieme degli indici dei sottointervalli che hanno lunghezza della diagonale strettamente maggiore della costante  $\bar{\delta}$ . Da quanto detto precedentemente, si ha che il numero di questi indici è limitato superiormente da un numero  $N$ , cioè

$$|\tilde{I}_k(\bar{\delta})| \leq N, \quad \text{per ogni } k.$$

Ricordando la definizione dell'insieme  $I_k^{\max}$  (data dalla (5.28)), si ha anche:

$$I_k^{\max} \subseteq \tilde{I}_k(\bar{\delta}).$$

Poichè si è supposto che sia vera l'Assunzione 5.1.2, l'insieme di iterazioni  $K = \{k : I_k^{\max} \cap I_k^* \neq \emptyset\}$  è infinito. Per ogni  $k \in K$  esiste un indice  $i_k^{\max} \in I_k^{\max} \cap I_k^*$ . Quindi l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k^{\max}}$  è partizionato dall'algoritmo dando luogo a dei nuovi sottointervalli  $\mathcal{D}^{h_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , che, ricordando l'Assunzione 5.1.1, hanno ampiezze che soddisfano la seguente relazione:

$$\|u^{h_j} - l^{h_j}\| \leq \varepsilon_2 \|u^{i_k^{\max}} - l^{i_k^{\max}}\| = \varepsilon_2 d_k^{\max}, \quad j = 1, \dots, m \quad (5.31)$$



con  $\varepsilon_2 \in (0, 1)$ .

Dati due indici di iterazioni  $k < \bar{k}$  si definisce con  $K(k, \bar{k})$  l'insieme di iterazioni che appartengono a  $K$  e che sono comprese tra  $k$  e  $\bar{k}$ , cioè:

$$K(k, \bar{k}) = \{h \in K : k \leq h \leq \bar{k}\}.$$

Poichè  $K$  è infinito esiste un indice  $\bar{k}(N)$  tale che tra  $k$  e  $\bar{k}(N)$  ci sono  $N$  iterazioni che appartengono a  $K$ , cioè:

$$|K(k, \bar{k}(N))| = N.$$

Nelle  $N$  iterazioni  $h \in K(k, \bar{k}(N))$ , dalla (5.30) seguirebbe che

$$d_h^{\max} > \bar{\delta}, \quad h \in K(k, \bar{k}(N)) \quad (5.32)$$

ma questa relazione implicherebbe che, in queste  $N$  iterazioni, la Procedura di Partizione sarebbe stata applicata a tutti gli insiemi  $\mathcal{D}^i$ ,  $i \in \tilde{I}_k(\bar{\delta})$ , oppure che sarebbe stata applicata a due insiemi strettamente annidati tra di loro. In entrambi i casi, ricordando la (5.31), si avrebbe:

$$d_{\bar{k}(N)}^{\max} \leq \varepsilon_2 d_k^{\max}.$$

Ripetendo gli stessi ragionamenti e definendo con  $\bar{k}(pN)$  l'indice tale che:

$$|K(k, \bar{k}(pN))| = pN.$$

Assumendo vera la (5.30), per le iterazioni  $h \in K(k, \bar{k}(pN))$ , si otterrebbe che:

$$d_{\bar{k}(pN)}^{\max} \leq (\varepsilon_2)^p d_k^{\max}, \quad \text{con } p = 1, 2, \dots$$

che, per valori sufficientemente grandi di  $p$  implicherebbe che

$$d_{\bar{k}(pN)}^{\max} < \bar{\delta}$$

che produrrebbe una contraddizione con la (5.30).  $\square$

Dalla precedente proposizione segue che l'Algoritmo di Partizione, con la precedente richiesta sulla scelta dei sottoinsiemi da partizionare, genera un insieme di punti che, al crescere delle iterazioni, tende a diventare un insieme denso su  $\mathcal{D}$ , come è formalizzato dai seguenti risultati.

**Proposizione 5.1.8** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.2 siano soddisfatte. Allora tutte le sequenze di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  generate dall'Algoritmo di Partizione sono strettamente annidate.*

**Prova.** Per ogni sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  generata dall'Algoritmo di Partizione, dalla definizione di  $d_k^{\max}$  e dalla Proposizione 5.1.7, si ottiene che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d_k^{\max} = 0,$$

da cui, utilizzando la Proposizione 5.1.3, si ha che la sequenza è strettamente annidata.  $\square$

**Proposizione 5.1.9** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.2 siano soddisfatte. Allora per ogni  $\tilde{x} \in \mathcal{D}$  l'Algoritmo di Partizione genera una sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  strettamente annidata tale che*

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\tilde{x}\}.$$

**Prova.** Poichè l'algoritmo genera una sequenza di partizioni  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  dell'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$ , in ogni iterazione è possibile identificare un sottoinsieme  $\mathcal{D}^{\ell_k}$ , con  $\ell_k \in I_k$ , che contiene il punto  $\tilde{x}$ , cioè i cui estremi soddisfano, per ogni  $k$ :

$$l^{\ell_k} \leq \tilde{x} \leq u^{\ell_k}. \quad (5.33)$$

Dalla Proposizione 5.1.8 si ha che la sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{\ell_k}\}$  è strettamente annidata. Facendo i limiti, per  $k$  tendente all'infinito, dei tre termini delle disequazioni (5.33) e ricondando la Proposizione 5.1.4 segue la dimostrazione della proposizione.  $\square$

Dai precedenti risultati seguono i seguenti corollari.

**Corollario 5.1.10** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.2 siano soddisfatte. Sia  $\{D^i, i \in I_k\}$  la partizione generata dall'Algoritmo di Partizione all'iterazione  $k$ -esima. Per ogni  $\bar{x} \in \mathcal{D}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una iterazione  $k$  dell'Algoritmo di Partizione in cui c'è un indice  $h_k \in I_k$  tale che:*

$$\mathcal{D}^{h_k} \subset B(\bar{x}; \varepsilon).$$

**Corollario 5.1.11** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.2 siano soddisfatte. Sia  $\{D^i, i \in I_k\}$  la partizione generata dall'Algoritmo di Partizione all'iterazione  $k$ -esima. Per ogni minimo globale  $x^*$  di  $f(x)$  su  $\mathcal{D}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una iterazione  $k$  dell'Algoritmo di Partizione in cui c'è un indice  $h_k \in I_k$  tale che:*

$$\mathcal{D}^{h_k} \subset B(x^*; \varepsilon).$$

### 5.1.3 Scelta dei sottoinsiemi da partizionare: sottoinsiemi più promettenti.

Nella sottosezione precedente si è considerato il caso in cui l'Algoritmo di Partizione, nella scelta dei sottoinsiemi da partizionare, includesse uno di dimensioni massime. In questa sottosezione si analizza una strategia diversa in cui l'idea base è quella di selezionare i sottoinsiemi considerati più promettenti. I punti caratterizzanti di questa scelta dei sottoinsiemi da partizionare sono i seguenti:

- data una partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  dell'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$ ;
- per ogni sottoinsieme  $\mathcal{D}^i$ ,  $i \in I_k$ , viene calcolato uno scalare  $R_k^i$  che fornisce una stima del valore minimo che assume la funzione obiettivo nel sottoinsieme considerato;

- vengono determinati gli insiemi  $\mathcal{D}^h$ , a cui corrispondono gli scalari  $R_k^h$  a valore più basso;
- uno dei precedenti insiemi viene suddiviso ulteriormente (in alcuni algoritmi vengono suddivisi tutti).

Per incominciare ad analizzare formalmente questa seconda strategia di scelta dei sottoinsiemi da partizionare è utile introdurre la seguente ipotesi.

**Assunzione 5.1.3** Per ogni  $k$ , si ha  $I_k^* = \{h\}$  dove l'indice  $h$  è tale che

$$R_k^h = \min_{i \in I_k} R_k^i,$$

con i valori d'interesse  $R_k^i$ ,  $i \in I_k$ , che soddisfano a:

i) per ogni sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$ , con  $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\}$ , si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k^{i_k} = f(\bar{x});$$

ii) in corrispondenza ad un minimo globale  $x^* \in X^*$  esiste un indice  $\bar{k}$  tale che, se  $\mathcal{D}^{j_k}$ ,  $j_k \in I_k$ , è l'insieme per cui  $x^* \in \mathcal{D}^{j_k}$ , si ha che, per ogni  $k \geq \bar{k}$ ,

$$R_k^{j_k} \leq f(x^*).$$

La seguente proposizione caratterizza il comportamento dell'Algoritmo di Partizione nel caso in cui utilizzi, come strategia di scelta dell'insieme da partizionare, quella descritta dall'Assunzione 5.1.3. In particolare essa mostra che ogni sequenza strettamente annidata prodotta dall'algoritmo converge verso un minimo globale della funzione obiettivo.

**Proposizione 5.1.12** Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.3 siano soddisfatte. Allora, per ogni sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'Algoritmo di Partizione, si ha che

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} \subseteq X^*. \quad (5.34)$$

(Dove  $X^*$  è l'insieme dei minimi globali della funzione  $f$  sull'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$ .)

**Prova.** Si procede assumendo, per assurdo, che l'Algoritmo di Partizione produca una sequenza strettamente annidata di insiemi per cui non valga la (5.34), cioè una sequenza per cui si abbia:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\},$$

con  $\bar{x} \notin X^*$ .

Sia  $K \subseteq \{1, 2, \dots\}$  il sottoinsieme degli indici delle iterazioni dell'algoritmo in cui l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  viene suddiviso. Dalle istruzioni dell'algoritmo si ha che, per  $k \in K$ :

$$R_k^{i_k} = \min_{i \in I_k} R_k^i. \quad (5.35)$$

Per ogni  $k \in K$ , sia  $\mathcal{D}_k^{j_k}$  l'insieme che contiene il minimo globale  $x^* \in X^*$  considerato nel punto ii) dell'Assunzione 5.1.3. Dalla (5.35) si ha che, per ogni  $k \in K$ :

$$R_k^{i_k} \leq R_k^{j_k}. \quad (5.36)$$

L'assunzione ii) implica l'esistenza di un indice  $\bar{k}$  tale che, per tutti gli indici  $k \in K$  e  $k \geq \bar{k}$ , si ha:

$$R_k^{i_k} \leq R_k^{j_k} \leq f(x^*). \quad (5.37)$$

Facendo tendere  $k$  all'infinito ed utilizzando l'ipotesi i), si ottiene dalla (5.37):

$$\lim_{k \in K, k \rightarrow \infty} R_k^{i_k} = f(\bar{x}) \leq f(x^*),$$

che produrrebbe un assurdo con il fatto che  $\bar{x} \notin X^*$ . □

Le proprietà dell'Algoritmo di Partizione posso essere completate richiedendo la seguente assunzione che è un rafforzamento dell'Assunzione 5.1.3.

**Assunzione 5.1.4** Per ogni  $k$  si ha  $I_k^* = \{h\}$  dove l'indice  $h$  è tale che

$$R_k^h = \min_{i \in I_k} R_k^i,$$

con  $i$  valori d'interesse  $R_k^i$ ,  $i \in I_k$ , che soddisfano a:

i) per ogni sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$ , con  $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\}$ , si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k^{i_k} = f(\bar{x});$$

ii) per ogni minimo globale  $x^* \in X^*$  esistono una costante  $\delta > 0$  ed un indice  $\bar{k}$  tali che, se  $\mathcal{D}^{j_k}$ ,  $j_k \in I_k$ , è l'insieme per cui  $x^* \in \mathcal{D}^{j_k}$ , si ha che, per ogni  $k \geq \bar{k}$ ,

$$R_k^{j_k} \leq f(x^*) - \delta \|u^{j_k} - l^{j_k}\|.$$

Utilizzando questa nuova assunzione si può stabilire la seguente proposizione che assicura che ogni minimo globale attrae una sequenza di insiemi strettamente annidata di insiemi prodotta dall'algoritmo .

**Proposizione 5.1.13** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.4 siano soddisfatte. Allora, per ogni minimo globale  $x^* \in X^*$ , esiste una sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'Algoritmo di Partizione tale che:*

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{x^*\}. \quad (5.38)$$

**Prova.** Si procede assumendo, per assurdo, che esista un minimo globale  $x^* \in X^*$  per cui l'Algoritmo di Partizione non produca una sequenza strettamente annidata di insiemi per cui valga la (5.38). In altre parole si assume che, per ogni sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'Algoritmo di Partizione si abbia:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\},$$

con  $\bar{x} \neq x^*$ .

Dalla precedente relazione si avrebbe, come prima conseguenza, che la sequenza di sottoinsiemi  $\{\mathcal{D}^{j_k}\}$ , considerati nel punto ii) dell'Assunzione 5.1.4 e contenenti il minimo globale  $x^*$ , non sarebbe strettamente annidata e, quindi, esisterebbero uno scalare  $\varepsilon > 0$  ed un indice  $\tilde{k}$  tali che per ogni  $k \geq \tilde{k}$  si avrebbe:

$$\|u^{j_k} - l^{j_k}\| \geq \varepsilon. \quad (5.39)$$

Sia  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  una sequenza strettamente annidata di insiemi prodotta dall'Algoritmo di Partizione e sia  $K \subseteq \{1, 2, \dots\}$  il sottoinsieme degli indici delle iterazioni dell'algoritmo in cui l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  viene suddiviso, cioè  $i_k \in I_k^*$ , per ogni  $k \in K$ . Quindi, per ogni  $k \in K$ , si ha che:

$$R_k^{i_k} = \min_{i \in I_k} R_k^i. \quad (5.40)$$

Il punto ii) dell'Assunzione 5.1.4, (5.39) e (5.40) implicano che per tutti gli indici  $k \in K$  e  $k \geq \max\{\tilde{k}, \tilde{k}\}$ , si ha:

$$R_k^{i_k} \leq R_k^{j_k} \leq f(x^*) - \delta \|u^{j_k} - l^{j_k}\| \leq f(x^*) - \delta \varepsilon. \quad (5.41)$$

Facendo tendere  $k$  all'infinito ed utilizzando il punto i) dell'Assunzione 5.1.4, si ottiene dalla (5.41):

$$\lim_{k \in K, k \rightarrow \infty} R_k^{i_k} = f(\bar{x}) \leq f(x^*) - \delta \varepsilon,$$

che produrrebbe un assurdo con il fatto che  $x^* \in X^*$ . □

Unendo la Proposizione 5.1.12 e la Proposizione 5.1.13 con la Proposizione 5.1.5 si ottengono i seguenti corollari

**Corollario 5.1.14** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.3 siano soddisfatte. Sia  $\{D^i, i \in I_k\}$  la partizione generata dall'Algoritmo di Partizione all'iterazione  $k$ -esima. Esiste un minimo globale  $x^*$  di  $f(x)$  su  $\mathcal{D}$  tale che, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste una iterazione  $k$  dell'Algoritmo di Partizione in cui c'è un indice  $h_k \in I_k$  tale che:*

$$\mathcal{D}^{h_k} \subset B(x^*; \varepsilon).$$

**Corollario 5.1.15** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.4 siano soddisfatte. Sia  $\{D^i, i \in I_k\}$  la partizione generata dall'Algoritmo di Partizione all'iterazione  $k$ -esima. Per ogni minimo globale  $x^*$  di  $f(x)$  su  $\mathcal{D}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una iterazione  $k$  dell'Algoritmo di Partizione in cui c'è un indice  $h_k \in I_k$  tale che:*

$$\mathcal{D}^{h_k} \subset B(x^*; \varepsilon).$$

#### 5.1.4 Algoritmo di Partizione con minimizzazioni locali.

Analogamente a quanto avvenuto nel caso degli algoritmi probabilistici anche gli algoritmi che partizionano l'insieme ammissibile possono sfruttare al loro interno l'efficienza dei metodi di ottimizzazione locale in modo da migliorare le loro proprietà teoriche e la loro efficienza computazionale. In particolare il seguente algoritmo è un esempio di un Algoritmo di Partizione che utilizza minimizzazioni locali.

**Algoritmo di Partizione Multistart.**

*Passo 0:* Si pone  $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$ ,  $l^0 = l$ ,  $u^0 = u$ ,  $I_0 = \{0\}$ , si sceglie un punto  $x_0 \in \mathcal{D}^0$ , si pone  $x_0^* = x_0$  e  $k = 0$ ;

*Passo 1:* data la partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  di  $\mathcal{D}$ ;  
 si identifica un sottoinsieme di indici  $I_k^* \subseteq I_k$ ,  
 si pone  $\bar{I}^0 = I_k$ ,  $\hat{I}^0 = I_k^*$  e  $p = 0$ ;

*Passo 2:* si sceglie un indice  $h \in \hat{I}^p$  e si partiziona  $\mathcal{D}^h$  in  $m \geq 2$  sottointervalli

$$\mathcal{D}^{h_1}, \mathcal{D}^{h_2}, \dots, \mathcal{D}^{h_m},$$

si scelgono i punti  $x^{h_j} \in \mathcal{D}^{h_j}$ , per  $j = 1, \dots, m$ ;

*Passo 3:* a partire da ogni punto  $x^{h_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , si effettuano delle minimizzazioni locali ottenendo  $y^{h_j}$ ,  $j = 1, \dots, m$ ;

si sceglie  $y^*$  tale che  $f(y^*) = \min_{j=1, \dots, m} f(y^{h_j})$ ;

se  $f(y^*) < f(x_k^*)$  si pone  $x_{k+1}^* = y^*$ ; altrimenti si pone  $x_{k+1}^* = x_k^*$ ;

*Passo 4:* si pone:

$$\begin{aligned} \bar{I}^{p+1} &= \bar{I}^p \bigcup_{j=1, \dots, m} \{h_j\} \setminus \{h\}, \\ \hat{I}^{p+1} &= \hat{I}^p \setminus \{h\}, \end{aligned}$$

se  $\hat{I}^{p+1} \neq \emptyset$  si pone  $p = p + 1$  e si torna al Passo 2;

*Passo 5:* si definisce la nuova partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_{k+1}\}$  con

$$I_{k+1} = \bar{I}^{p+1};$$

si pone  $k = k + 1$  e si torna al Passo 1.

Come accenato, l'utilizzazione dei metodi di ottimizzazione locale permette di realizzare degli algoritmi con interessanti proprietà teoriche. In particolare, per quando riguarda il precedente algoritmo, ha si il seguente risultato.

**Proposizione 5.1.16** *Si supponga che siano verificate l'Assunzione 5.1.1 ed una tra l'Assunzione 5.1.2 e l'Assunzione 5.1.4. Se esiste un minimo globale  $x^*$  della funzione  $f$  su  $\mathcal{D}$  per cui l'algoritmo di minimizzazione locale (utilizzato al Passo 3) soddisfa la Proprietà 1 (sezione 3.1.2) allora esiste una iterazione  $\bar{k}$  in cui l'Algoritmo di Partizione Multistart produce un punto  $x_{\bar{k}}^*$  tale che:*

$$x_{\bar{k}}^* \in X^*. \quad (5.42)$$

**Prova.** la prova segue direttamente dal Corollario 5.1.11 oppure dal Corollario 5.1.15 e dalla Proprietà 1 dell'algoritmo locale.  $\square$

**(La Sezione 5.1.5 non fa parte del programma dell'esame di Metodi di Ottimizzazione Globale (5cfu), mentre fa parte di quello dell'esame di Ottimizzazione Globale (6cfu))**

### 5.1.5 Scelta dei sottoinsiemi da partizionare: conoscenza del valore ottimo della funzione obiettivo.

La scelta dei sottoinsiemi da partizionare può essere fatta più efficientemente nel caso in cui siano note delle informazioni globali sul problema da risolvere. In questa sezione viene descritta una tale situazione. In particolare si considera la seguente assunzione.

**Assunzione 5.1.5** *La funzione  $f$  è continuamente differenziabile su  $R^n$  ed il valore ottimo  $f^* = \min_{x \in D} f(x)$  è noto.*

Utilizzando la precedente assunzione è possibile considerare una nuova funzione obiettivo data da:

$$\theta(x) = (f(x) - f^*)^p, \quad (5.43)$$

dove  $p \geq 1$  se non esiste nessun punto di  $x^* \in X^*$  tale che  $x^* \in \partial D$  altrimenti  $p > 1$ .

Per questa funzione obiettivo si può stabilire il seguente risultato.

**Proposizione 5.1.17** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.5 è soddisfatta. Allora, per ogni costante  $0 < \hat{L} < \infty$  e per ogni  $x^* \in X^*$ , esiste  $\varepsilon > 0$  tale che la costante  $\hat{L}$  è una sovrastima della costante di Lipschitz locale della funzione  $\theta(x)$  nell'intorno  $B(x^*; \varepsilon)$ , cioè per tutti  $x \in B(x^*; \varepsilon)$  si ha*

$$|\theta(x^*) - \theta(x)| < \hat{L} \|x^* - x\|.$$

**Prova.** Dal Teorema della Media si ha:

$$\theta(x) = \theta(x^*) + \nabla \theta(\hat{x})^T (x - x^*) = \theta(x^*) + p(f(\hat{x}) - f^*)^{p-1} \nabla f(\hat{x})^T (x - x^*),$$

dove  $\hat{x} = x^* + \eta(x - x^*)$ , con  $\eta \in [0, 1]$ .

Dalla precedente uguaglianza si ottiene:

$$|\theta(x) - \theta(x^*)| \leq p(f(\hat{x}) - f^*)^{p-1} \|\nabla f(\hat{x})\| \|x - x^*\|.$$

Perciò, dalla continuità di  $\nabla f$  e dalla compattezza di  $D$ , segue che, per ogni  $x^* \in X^*$  e per ogni  $\hat{L} > 0$ , esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che

$$\max_{x \in B(x^*; \varepsilon)} p(f(x) - f^*)^{p-1} \|\nabla f(x)\| < \hat{L}.$$

Allora segue che per tutti  $x \in B(x^*; \varepsilon)$ ,

$$|\theta(x^*) - \theta(x)| < \hat{L} \|x^* - x\|.$$



□

Utilizzando la nuova funzione obiettivo  $\theta(x)$  è possibile definire dei particolari scalari  $R_k^i$  da associare a vari sottointervalli  $D^i$ , con  $i \in I_k$ .

Per ogni  $\tilde{L} > 0$  e per ogni  $i \in I_k$  si può infatti definire:

$$R_k^i = \theta(x_k^i) - \tilde{L}d^i, \quad (5.44)$$

dove  $x_k^i \in D^i$  e  $d^i = \|u^i - l^i\|$ .

Introdotti gli scalari  $R_k^i$ , con  $i \in I_k$ , è possibile formalizzare una nuova strategia di scelta dei sottoinsiemi da partizionare attraverso la seguente ipotesi.

**Assunzione 5.1.6** *Per ogni  $k$ , l'insieme  $I_k^*$  è definito nella seguente maniera: se  $R_k^{\min} < 0$  (dove  $R_k^{\min} = \min_{i \in I_k} R_k^i$ ), allora*

$$I_k^* = \{i \in I_k : R_k^i < 0\},$$

*altrimenti  $I_k^*$  deve soddisfare*

$$I_k^* \cap I_k^{\max} \neq \emptyset.$$

L'idea della precedente ipotesi è quella di combinare le strategie descritte nella Sezione 5.1.2 e nella Sezione 5.1.3.

La seguente proposizione descrive il comportamento asintotico dell'Algoritmo di Partizione nel caso in cui utilizzi la strategia di partizionare descritta dall'Assunzione 5.1.6.

**Proposizione 5.1.18** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1, l'Assunzione 5.1.5 e l'Assunzione 5.1.6 siano soddisfatte. Allora, per ogni sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'Algoritmo di Partizione, si ha che*

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} \subseteq X^*. \quad (5.45)$$

**Prova.** Come prima cosa si mostra che esiste un indice  $\bar{k}$  tale che, per tutti  $k \geq \bar{k}$ , si ha  $R_k^{\min} < 0$ .

Si supponga, per assurdo che esista un sottoinsieme infinito di indici  $K$  tale, che per tutti  $k \in K$ , si abbia

$$R_k^{\min} \geq 0. \quad (5.46)$$

L'Assunzione 5.1.6 implicherebbe che, per tutti  $k \in K$ ,  $I_k^* \cap I_k^{\max} \neq \emptyset$ . Applicando la Proposizione 5.1.7, si otterrebbe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^{\max} = 0.$$

Scelto un qualsiasi  $x^* \in X^*$ , la Proposizione 5.1.17 garantirebbe l'esistenza di un  $\epsilon > 0$  tale che, per tutti  $x \in B(x^*, \epsilon)$ , si avrebbe

$$|\theta(x^*) - \theta(x)| < \tilde{L}\|x^* - x\|. \quad (5.47)$$

Dalla Proposizione 5.1.9 e dalla Proposizione 5.1.5, esisterebbero una sequenza  $\{D^{h_k}\}$  tale che  $\bigcap_{k=0}^{\infty} D^{h_k} = \{x^*\}$  ed un indice  $\bar{k} \in K$  tale che per ogni  $k \geq \bar{k}$  si avrebbe

$$x_k^{h_k} \in B(x^*, \epsilon) \quad \text{e} \quad D^{h_k} \subseteq B(x^*, \epsilon).$$

Perciò, tenendo conto che  $\theta(x^*) = 0$ , si avrebbe dalla (5.47)

$$\theta(x_k^{h_k}) < \tilde{L}\|x_k^{h_k} - x^*\| \leq \tilde{L}d^{h_k}.$$

Dalla definizione di  $R_k^{\min}$ , seguirebbe

$$R_k^{\min} = \min_{i \in I_k} (\theta(x_k^i) - \tilde{L}d_k^i) \leq \theta(x_k^{h_k}) - \tilde{L}d^{h_k} < 0,$$

che contraddirebbe la (5.46).

Perciò, per  $k$  sufficientemente grande, si ha  $R_k^{\min} < 0$ . Si consideri una qualsiasi sequenza strettamente annidata  $\{D^{i_k}\}$  tale che  $\bigcap_{k=0}^{\infty} D^{i_k} = \{\bar{x}\}$ . Sia  $K$  l'insieme di indici di iterazioni tali che

$$D^{i_{k+1}} \subset D^{i_k}.$$

Allora, poichè  $I_k^* = \{i \in I_k : R_k^i < 0\}$  si ha

$$\theta(x_k^{i_k}) < \tilde{L}d^{i_k}. \quad (5.48)$$

Inoltre dalla Proposizione 5.1.3 si ha che  $\lim_{k \rightarrow \infty} d^{i_k} = 0$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k^{i_k} = \bar{x}$ , che combinati con la (5.48) implicano

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^{i_k}) = f(\bar{x}) = f^*,$$

cioè,  $\bar{x} \in X^*$ . □

Nel caso in cui il valore ottimo  $f^*$  della funzione obiettivo non è noto a priori, si può comunque trarre ispirazione da quanto descritto precedentemente per definire un algoritmo che cerca di stimarsi il valore  $f^*$ .

In questo caso viene fatta utilizzata la seguente ipotesi:

**Assunzione 5.1.7** *La funzione  $f$  è continuamente differenziabile su  $R^n$  ed ogni minimo globale  $x^* \in X^*$  è tale che  $x^* \notin \partial D$  (cioè  $l < x^* < u$ ).*

Si introduce la seguente funzione

$$\tilde{\theta}(x; \tilde{f}, \varepsilon) = f(x) - (\tilde{f} - \varepsilon) \quad (5.49)$$

dove  $\tilde{f} \in R$  e  $\varepsilon \in R_+$ .

La forma della funzione  $\tilde{\theta}$  deriva da quella della  $\theta$  scegliendo  $p = 1$  e stimando  $f^*$  attraverso la differenza  $\tilde{f} - \varepsilon$ .

Un modello generale di un algoritmo che genera una sequenza di partizioni dell'insieme ammissibile cercando di stimare il valore ottimo della funzione obiettivo è descritto dal seguente schema.

**Algoritmo di Partizione con Stima del Valore Ottimo (PSVO)**

*Passo 0:* Dati  $\tilde{L} > 0$ ,  $\tau \in (0, 1)$ ,  $\varepsilon_0 > 0$ ,  $\tilde{x} \in D$ . Si pone  $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$ ,  $l^0 = l$ ,  $u^0 = u$ ,  $I_0 = \{0\}$ ,  $x^0 = \tilde{x}$  e  $k = 0$ ;

*Passo 1:* data la partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  di  $\mathcal{D}$  e determinati i punti

$$x^i \in \mathcal{D}^i, \quad \text{per ogni } i \in I_k,$$

si calcola  $\tilde{f}_k = \min_{i \in I_k} f(x^i)$ ;

si calcola  $R_k^i = \tilde{\theta}(x^i; \tilde{f}_k, \varepsilon_k) - \tilde{L}d^i$ , per ogni  $i \in I_k$ ,

se  $\min_{i \in I_k} R_k^i < 0$ , si sceglie  $I_k^*$  tale che  $I_k^* \subseteq \{i \in I_k : R_k^i < 0\}$   
 altrimenti si sceglie  $I_k^*$  tale che  $I_k^* \cap I_k^{\max} \neq \emptyset$ ;

si pone  $\bar{I}^0 = I_k$ ,  $\hat{I}^0 = I_k^*$  e  $p = 0$

*Passo 2:* si sceglie un indice  $h \in \hat{I}^p$  e si partiziona  $\mathcal{D}^h$  in  $m \geq 2$  sottointervalli

$$\mathcal{D}^{h_1}, \mathcal{D}^{h_2}, \dots, \mathcal{D}^{h_m}.$$

*Passo 3:* si pone:

$$\bar{I}^{p+1} = \bar{I}^p \cup_{j=1, \dots, m} \{h_j\} \setminus \{h\},$$

$$\hat{I}^{p+1} = \hat{I}^p \setminus \{h\},$$

se  $\hat{I}^{p+1} \neq \emptyset$  si pone  $p = p + 1$  e si torna al Passo 2;

*Passo 4:* si definisce la nuova partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_{k+1}\}$  con  $I_{k+1} = \bar{I}^{p+1}$ ;

se  $\tau(d_{k+1}^{\max})^2 < \varepsilon_k$ , allora si pone  $\varepsilon_{k+1} = \tau(d_{k+1}^{\max})^2$  altrimenti  $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ ;

si pone  $k = k + 1$  e si torna al Passo 1.

Visto che il precedente algoritmo non usa nessuna informazione globale, la prima proprietà da garantire è il fatto che sia in grado di produrre un insieme di punti che asintoticamente formi un insieme denso su  $D$ .

**Proposizione 5.1.19** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.7 siano soddisfatte. Allora*

i) tutte le sequenze di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotti dall'Algoritmo PSVO sono strettamente annidate;

ii) per ogni  $\tilde{x} \in \mathcal{D}$ , Algoritmo PSVO produce una sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  strettamente annidata tale che

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\tilde{x}\}.$$

**Prova.** Si supponga che, per contraddizione, la tesi del punto i) sia falsa. Ricordando la definizione di  $I_k^{\max}$  e la Proposizione 5.1.8, esisterebbe un indice  $\bar{k}$  tale che per ogni  $k \geq \bar{k}$  si avrebbe:

$$\begin{aligned} d_k^{\max} &= \delta > 0, \\ I_k^* \cap I_k^{\max} &= \emptyset. \end{aligned}$$

Dalle precedenti relazioni e dalle istruzioni dell'algoritmo si avrebbe che per ogni  $k \geq \bar{k}$  si avrebbe:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \varepsilon > 0, \\ \min_{i \in I_k} R_k^i &< 0. \end{aligned}$$

Sia  $\{D^{i_k}\}$  una qualsiasi sequenza strettamente annidata e sia  $K$  l'insieme di indici di iterazioni tali che, per  $k \in K$ , si abbia

$$D^{i_{k+1}} \subset D^{i_k}.$$

Allora, poichè  $I_k^* = \{i \in I_k : R_k^i < 0\}$  si avrebbe

$$R_k^{i_k} = f(x^{i_k}) - \tilde{f}_k + \varepsilon_k - \tilde{L}d^{i_k} < 0,$$

da cui seguirebbe:

$$f(x^{i_k}) - \tilde{f}_k < -\varepsilon_k + \tilde{L}d^{i_k}. \quad (5.50)$$

Inoltre dalla Proposizione 5.1.3 seguirebbe che  $\lim_{k \rightarrow \infty} d^{i_k} = 0$ , perciò per valori di  $k \geq \bar{k}$  sufficientemente grandi, si avrebbe che  $\tilde{L}d^{i_k} < \bar{\varepsilon}/2 = \varepsilon_k/2$ . Da cui seguirebbe

$$f(x^{i_k}) - \tilde{f}_k < -\bar{\varepsilon} + \tilde{L}d^{i_k} < -\frac{\bar{\varepsilon}}{2}.$$

Quest'ultima relazione implicherebbe che per valori di  $k$  sufficientemente grandi si avrebbe

$$\tilde{f}_{k+1} \leq \tilde{f}_k - \frac{\bar{\varepsilon}}{2}$$

che produrrebbe un assurdo con il fatto che la funzione  $f$  è limitata sull'insieme compatto  $D$ .

Quindi la tesi del punto i) è vera.

Dalla prima parte della dimostrazione segue che esiste un insieme infinito  $K$  di indici iterazioni per cui l'Algoritmo PSVO sceglie  $I_k^*$  tale che  $I_k^* \cap I_k^{\max} \neq \emptyset$  per ogni  $k \in K$ .

La dimostrazione del punto ii) della proposizione segue dalla Proposizione 5.1.8 e dalla Proposizione 5.1.9 .  $\square$

La prossima proposizione mostra che il test al Passo 1 ha un ruolo positivo nel spingere l'algoritmo a considerare e partizionare i sottoinsiemi contenenti punti di ottimo globale.

**Proposizione 5.1.20** *Si supponga che l'Assunzione 5.1.1 e l'Assunzione 5.1.7 siano soddisfatte.*

(i) *Per ogni  $\bar{x} \in \mathcal{D} \setminus X^*$ , se  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  è la sequenza per cui  $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\}$ , esiste un indice di iterazione  $\bar{k}$  tale che, per ogni  $k \geq \bar{k}$ , si ha*

$$R_k^{i_k} \geq 0.$$

(ii) *Per ogni  $x^* \in X^*$ , se  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  è la sequenza per cui  $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{x^*\}$ , esiste un indice di iterazione  $\bar{k}$  tale che, per ogni  $k \geq \bar{k}$ , se  $\mathcal{D}^{i_k}$  soddisfa*

$$x^* \in \mathcal{D}^{i_k} \quad \text{and} \quad d^{i_k} \geq \frac{2\tau}{\bar{L}} (d_k^{\max})^2,$$

*allora si ha*

$$R_k^{i_k} < 0.$$

**Prova.** Punto (i). Dalla Proposizione 5.1.19 segue che, per ogni  $x \in \mathcal{D}$ , l'Algoritmo PSVO produce una sequenza di insiemi strettamente annidata tale che  $\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{x\}$ . Dalla Proposizione 5.1.3 e dalla Proposizione 5.1.19 seguono che  $\lim_{k \rightarrow \infty} d^{i_k} = 0$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k^{\max} = 0$ .

Perciò dal Passo 4 dell'Algoritmo PSVO si ha:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0. \tag{5.51}$$

Dalla formula di aggiornamento di  $\tilde{f}_k$  al Passo 4 e dalla Proposizione 5.1.19, segue che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{f}_k = f(x^*), \quad x^* \in X^*. \tag{5.52}$$

Per ogni  $\bar{x} \in \mathcal{D} \setminus X^*$ , sia  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  la sequenza strettamente annidata prodotta dall'Algoritmo PSVO tale che

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\}.$$

Dalla definizione di  $R_k^{i_k}$ , segue che

$$R_k^{i_k} = f(x_k^{i_k}) - \tilde{f}_k - \bar{L}d^{i_k} + \varepsilon_k = f(x_k^{i_k}) - f^* + f^* - \tilde{f}_k - \bar{L}d^{i_k} + \varepsilon_k,$$

Poichè  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^{i_k}) = f(\bar{x}) > f^*$ , facendo i limiti della precedente relazione si ottiene dalla (5.51) e dalla (5.52)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_k^{i_k} > 0,$$

e quindi segue la tesi.

Punto (ii). Si consideri il sottointervallo  $\mathcal{D}^{i_k}$  tale che  $x^* \in \mathcal{D}^{i_k}$ . Poichè  $x^* \in X^*$ , segue

$$f(x_k^{i_k}) - \tilde{f}_k - \tilde{L}d^{i_k} + \varepsilon_k \leq f(x_k^{i_k}) - f(x^*) - \tilde{L}d^{i_k} + \varepsilon_k.$$

Dalla regola di aggiornamento di  $\varepsilon_k$ , si ha che

$$\begin{aligned} f(x_k^{i_k}) - f(x^*) - \tilde{L}d^{i_k} + \varepsilon_k &\leq f(x_k^{i_k}) - f(x^*) - \tilde{L}d^{i_k} + \tau(d_k^{\max})^2 \\ &= f(x_k^{i_k}) - f(x^*) - \frac{\tilde{L}}{2}d^{i_k} + \left( \tau(d_k^{\max})^2 - \frac{\tilde{L}}{2}d^{i_k} \right). \end{aligned}$$

Ricordando la Proposizione 5.1.17, si ottiene che, per  $k$  sufficientemente grande,  $\tilde{L}/2$  è una sovrastima della costante di Lipschitz di  $\theta(x) = f(x) - f^*$ . Quindi, per  $k$  sufficientemente grande, utilizzando l'ipotesi del Punto ii) della proposizione si ha:

$$\begin{aligned} f(x_k^{i_k}) - f(x^*) - \frac{\tilde{L}}{2}d^{i_k} + \left( \tau(d_k^{\max})^2 - \frac{\tilde{L}}{2}d^{i_k} \right) \\ \leq f(x_k^{i_k}) - f(x^*) - \frac{\tilde{L}}{2}\|x_k^{i_k} - x^*\| + \left( \tau(d_k^{\max})^2 - \frac{\tilde{L}}{2}d^{i_k} \right) < 0, \end{aligned}$$

che prova il risultato. □

La precedente proposizione mette in evidenza il ruolo giocato da valori  $R_k^i$  nella strategia di selezione degli intervalli. Parlando in maniera approssimata, essi possono aiutare a produrre sequenze di partizioni che si concentrano più rapidamente intorno a minimi globali. Infatti, per  $k$  sufficientemente grande, il valore  $R_k^i$  dei sottointervalli che non contengono un minimo globale è positivo o uguale a zero. Invece, quei sottoinsiemi che contengono un minimo globale e che hanno diagonal sufficientemente grandi, hanno  $R_k^i < 0$ .

## 5.2 Introduzione alla minimizzazione di funzioni Lipschitziane

Un altro elemento comune della maggior parte dei metodi proposti che generano sequenze di partizioni dall'insieme ammissibile è quello di cercare di generare efficientemente queste sequenze cercando di sfruttare la possibile Lipschitzianet  della funzione obiettivo. Quindi, per poterli descrivere, pu  essere utile richiamare la definizione di funzione Lipschitziana.

**Definizione 5.2.1** *Dato un insieme  $\mathcal{F} \subseteq R^n$ , una funzione  $f : \mathcal{F} \rightarrow R$  si dice Lipschitziana su  $\mathcal{F}$ , se esiste una costante  $L > 0$  (chiamata costante di Lipschitz) tale che per tutti  $x, y \in \mathcal{F}$  si ha*

$$|f(y) - f(x)| \leq L\|y - x\|. \quad (5.53)$$

La richiesta che la funzione obiettivo sia Lipschitziana non è una ipotesi particolarmente restrittiva. Per esempio, la seguente proposizione mostra che, su un insieme convesso e compatto, una funzione continuamente differenziabile è sicuramente Lipschitziana.

**Proposizione 5.2.2** *Sia  $\mathcal{F} \subset R^n$  un insieme convesso e compatto e sia  $f : \mathcal{F} \rightarrow R$  una funzione continuamente differenziabile. Allora la funzione  $f$  è Lipschitziana su  $\mathcal{F}$ .*

**Prova.** Ricordando il Teorema della Media si ha che, comunque scelti  $y, x \in \mathcal{F}$ :

$$f(y) = f(x) + \nabla f(x + \theta(y - x))^T (y - x),$$

con  $\theta \in [0, 1]$ . Dalla uguaglianza precedente si ottiene:

$$|f(y) - f(x)| \leq \tilde{L} \|y - x\|,$$

dove la costante  $\tilde{L}$  è data da

$$\tilde{L} = \max_{x \in \mathcal{F}} \|\nabla f(x)\|,$$

ed è ben definita dalla continuità di  $\nabla f$  e dalla compattezza del insieme  $\mathcal{F}$ .  $\square$

La precedente proposizione si applica in particolare alla classe di problemi di ottimizzazione che si sta trattando, cioè

$$\begin{aligned} \min f(x) \\ x \in \mathcal{D}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

dove  $\mathcal{D} = \{x \in R^n : l \leq x \leq u\}$ .

Nel seguito di questo capitolo si assumerà che la funzione obiettivo  $f$  è Lipschitziana sull'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$  e che  $L$  è la sua costante di Lipschitz.

### 5.3 Metodi che utilizzano una sovrastima della costante di Lipschitz della funzione obiettivo

Dalla Definizione 5.2.1 si ha che una funzione Lipschitziana sull'insieme  $\mathcal{D}$  soddisfa contemporaneamente le due seguenti relazioni (si veda figura 5.1):

$$f(x) \geq f(x_0) - L \|x - x_0\| \tag{5.55}$$

$$f(x) \leq f(x_0) + L \|x - x_0\| \tag{5.56}$$

per ogni  $x_0, x \in \mathcal{D}$ .

La prima delle due precedenti relazioni può essere sfruttata dal punto di vista algoritmico. Infatti essa mostra che la funzione

$$F_0(x) = f(x_0) - L \|x - x_0\|$$

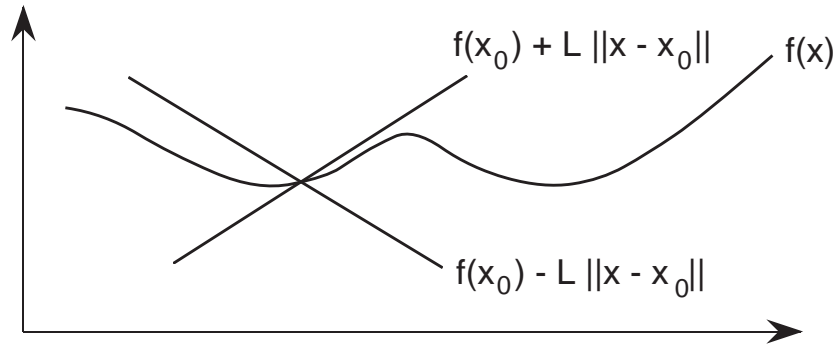


Figura 5.1: Funzione Lipschitziana.

permette di sottostimare i valori della funzione obiettivo, cioè per ogni  $x \in \mathcal{D}$  si ha:

$$f(x) \geq F_0(x).$$

Il valore ottimo della  $F_0(x)$  fornisce una stima inferiore del valore ottimo della funzione obiettivo ed, inoltre, la  $F_0(x)$  è semplice da minimizzare perchè la sua particolare struttura implica che può assumere valori più bassi solamente agli estremi dell'insieme  $\mathcal{D}$  (cioè  $x^* = l$  e/o  $x^* = u$ ).

Se si dispone di un secondo punto  $x_1 \in \mathcal{D}$ , di cui si conosce il valore della funzione obiettivo  $f(x_1)$ , la (5.55) può essere applicata due volte ottenendo che, per ogni  $x \in \mathcal{D}$ , si ha:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x_0) - L\|x - x_0\| \\ f(x) &\geq f(x_1) - L\|x - x_1\|, \end{aligned}$$

che implica, per ogni  $x \in \mathcal{D}$ ,

$$f(x) \geq \max\{f(x_0) - L\|x - x_0\|, f(x_1) - L\|x - x_1\|\}$$

Quest'ultima relazione mostra che la funzione

$$F_1(x) = \max\{f(x_0) - L\|x - x_0\|, f(x_1) - L\|x - x_1\|\} \quad (5.57)$$

soddisfa, per ogni  $x \in \mathcal{D}$ , alle seguenti relazioni

$$f(x) \geq F_1(x) \geq F_0(x).$$

Perciò la funzione  $F_1(x)$  fornisce delle sottostime dei valori della funzione obiettivo  $f(x)$  che sono migliori di quelle che derivano da  $F_0(x)$ . Infatti i valori di  $F_1(x)$  coincidono con quelli di  $F_0(x)$  oppure forniscono valori più vicini a quelli di  $f(x)$ . Di conseguenza, il valore ottimo della funzione  $F_1(x)$  su  $\mathcal{D}$  fornisce una stima migliore del valore ottimo della funzione obiettivo. D'altra parte, la funzione  $F_1(x)$  continua ad avere una struttura tale da poter essere minimizzata in maniera abbastanza semplice. Per esempio, nel caso in cui  $x$  è uno scalare (cioè  $x \in R$ ), un punto di minimo globale  $x^*$  di  $F_1(x)$



su  $\mathcal{D}$  coincide con gli estremi dell'intervallo  $\mathcal{D}$  (cioè  $x^* = l$  e/o  $x^* = u$ ) oppure coincide con il punto in cui le due sottostime  $f(x_0) - L\|x - x_0\|$  e  $f(x_1) - L\|x - x_1\|$  assumono lo stesso valore, cioè:

$$x^* = \begin{cases} \frac{x_0 + x_1}{2} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{2L} & \text{se } x_0 \leq x_1 \\ \frac{x_0 + x_1}{2} - \frac{f(x_0) - f(x_1)}{2L} & \text{se } x_0 > x_1 \end{cases} \quad (5.58)$$

I ragionamenti e passaggi fatti precedentemente possono essere ripetuti nel caso in cui si è già valutata la funzione obiettivo in un certo numero di punti  $x_0, \dots, x_m$ . Infatti l'applicazione ripetuta della (5.55) porta al fatto che, per ogni  $x \in \mathcal{D}$ , si ha:

$$f(x) \geq f(x_j) - L\|x - x_j\|, \quad j = 0, \dots, m.$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene che la funzione

$$F_m(x) = \max_{0 \leq j \leq m} \{f(x_j) - L\|x - x_j\|\}$$

è tale che, per ogni  $x \in \mathcal{D}$ :

$$f(x) \geq F_m(x) \geq F_1(x) \geq F_0(x).$$

Quindi si ottiene che, all'aumentare dei punti in cui si è valutata la funzione, migliora la qualità della sottostima  $F_m(x)$ . Tuttavia, all'aumentare dei punti, si complica l'espressione della funzione  $F_m(x)$  rendendo sempre più complessa la sua minimizzazione.

### 5.3.1 Algoritmo di Schubert-Mladineo

Tutte le considerazioni e proprietà viste precedentemente possono essere utilizzate per definire un primo algoritmo per determinare il minimo globale di una funzione Lipschitziana. Il punto essenziale è conoscere una sovrastima  $\tilde{L}$  della costante di Lipschitz  $L$ . Infatti tutte disuguaglianze viste continuano a valere sostituendo  $L$  con  $\tilde{L}$  purchè  $\tilde{L} \geq L$ .

**Algoritmo di Schubert-Mladineo.**

*Passo 0:* Sia data una costante  $\tilde{L}$  tale che  $\tilde{L} \geq L$  e sia dato un punto  $x_0 \in \mathcal{D}$ ;

*Passo 1:* si definisce la funzione

$$F_0(x) = f(x_0) - \tilde{L}\|x - x_0\|$$

si sceglie  $x_1$  in modo tale che:

$$F_0(x_1) = \min_{x \in \mathcal{D}} F_0(x),$$

si pone  $k = 1$ ;

*Passo 2:* si definisce la funzione

$$F_k(x) = \max_{j=0, \dots, k} \{f(x_j) - \tilde{L}\|x - x_j\|\}$$

si sceglie  $x_{k+1}$  in maniera che

$$F_k(x_{k+1}) = \min_{x \in \mathcal{D}} F_k(x)$$

*Passo 3:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 2.

La figura 5.2 descrive alcune iterazioni del precedente algoritmo.

Per la sequenza dei punti generati dall'algoritmo di Schubert-Mladineo si può stabilire il seguente risultato.

**Teorema 5.3.1** *Sia  $\{x_k\}$  la sequenza di punti generati dall'algoritmo di Schubert-Mladineo allora si ha che:*

i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f^*$ ;

ii) *la sequenza  $\{F_k(x_{k+1})\}$  è non decrescente e tale che  $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x_{k+1}) = f^*$ ;*

iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{x^* \in X^*} \|x^* - x_k\| = 0$ ;

dove  $f^*$  e  $X^*$  sono rispettivamente il valore ottimo e l'insieme dei minimi globali della funzione  $f(x)$  su  $\mathcal{D}$ .

Il precedente teorema mostra che l'Algoritmo di Schubert-Mladineo ha interessanti proprietà teoriche. Inoltre, per tale algoritmo, si può definire un criterio di arresto. Infatti se  $\{f(x_k)\}$  e  $\{F_k(x_{k+1})\}$  sono le sequenze generate, si ha

$$\begin{aligned} f(x_k) &\geq f^* \geq F_k(x_{k+1}) \\ f(x_k) &\geq f^* \geq f(x_k) + r_k \end{aligned}$$

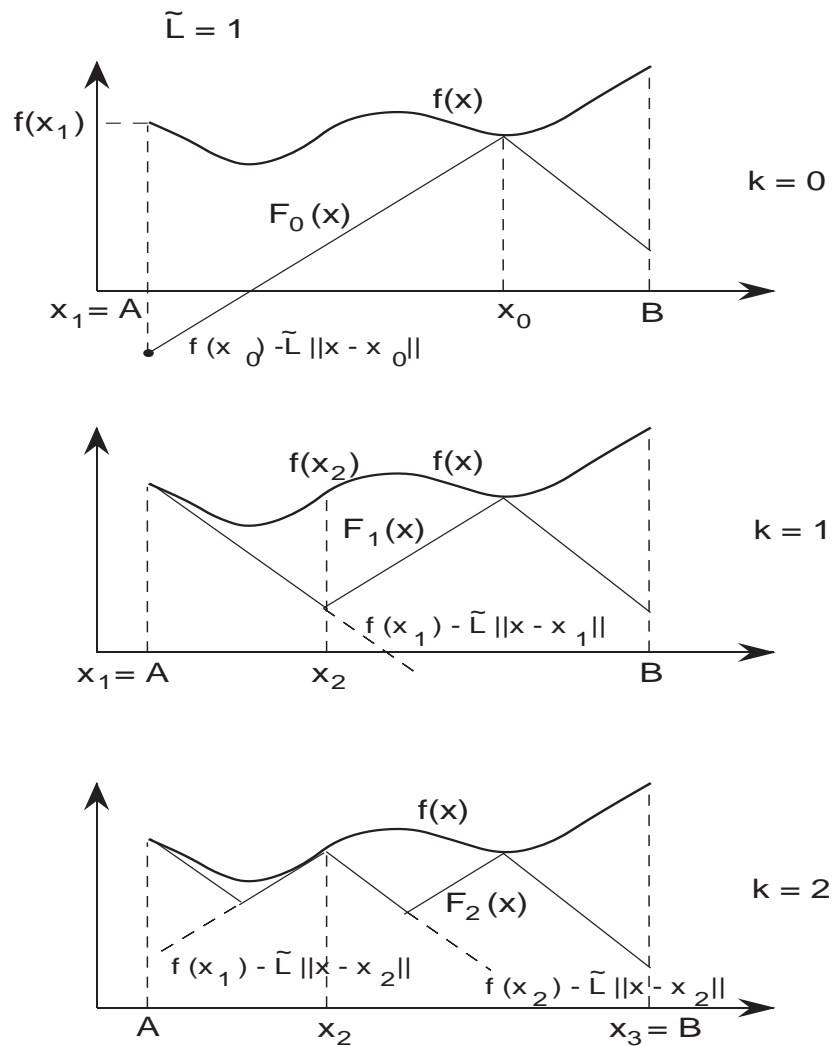


Figura 5.2: Iterazioni dell'algoritmo di Schubert-Mladineo.

dove  $r_k = F_k(x_{k+1}) - f(x_k)$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$  per il teorema precedente. Quindi se  $|r_k| < \epsilon$  il punto  $x_k$  è un punto di minimo di  $f(x)$  a meno di un valore  $\epsilon$ .

Purtroppo, dal punto di vista computazionale, il precedente algoritmo presenta alcuni difetti. Il primo è legato al fatto che, al crescere delle dimensioni del problema e del numero di punti prodotti dall'algoritmo, diventa sempre difficile minimizzare le sottostime  $F_k(x)$ . Il secondo deriva dalla necessità di conoscere "a priori" una buona sovrastima della costante di Lipschitz della funzione obiettivo. Infatti, scegliere la costante  $\tilde{L}$  molto grande porta al fatto che le sottostime  $F_k$  possono avere tratti lineari molto inclinati e valori molto distanti da quelli della funzione obiettivo  $f$ . Invece, scegliere la costante  $\tilde{L}$  troppo piccola può portare al fatto che  $\tilde{L}$  non è una sovrastima della costante di Lipschitz della funzione obiettivo

### 5.3.2 Algoritmi diagonali per funzioni Lipschitziane

Gli algoritmi appartenenti a questa classe sono stati proposti con l'obiettivo di sfruttare il fatto che la funzione obiettivo è Lipschitziana e, per quanto possibile, di evitare i difetti dell'Algoritmo di Schubert-Mladineo. Difetti costituiti principalmente dalla necessità di conoscere, fin dalla prima iterazione, un sovrastima della costante di Lipschitz e dall'esigenza di dover risolvere ad ogni iterazione sottoproblemi estremamente costosi.

L'idea di partenza degli algoritmi diagonali è di interpretare l'approccio dell'Algoritmo di Schubert-Mladineo come un metodo che produce una sequenza di partizioni  $\{\mathcal{D}^i, i \in I_k\}$  dell'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$ . Ad ogni iterazione, il sottoinsieme più promettente dal punto di vista della minimizzazione globale, cioè, quello in cui c'è il minimo globale della funzione  $F_k(x)$ , viene suddiviso ulteriormente. Questo criterio di scelta è equivalente

- ad associare ad ogni insieme  $\mathcal{D}^i$  lo scalare  $R_k^i$  dato da:

$$R_k^i = \min_{x \in \mathcal{D}^i} F^i(x),$$

con  $F^i(x) = \max\{f(l_i) - \tilde{L}\|x - l^i\|, f(u_i) - \tilde{L}\|x - u^i\|\}$ ;

- a partizionare l'insieme  $\mathcal{D}^h$  a cui corrisponde lo scalare  $R_k^h$  valore più basso.

Partendo dalle precedenti osservazioni, i metodi diagonali più recenti possono essere caratterizzati dai seguenti punti:

- di non richiedere la conoscenza di una sovrastima della costante Lipschitz della funzione obiettivo sull'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$  ma, piuttosto cercare di determinare ed utilizzare delle sovrastime  $L_k^i$  delle costanti di Lipschitz (locali) della funzione obiettivo su  $\mathcal{D}^i$ ;
- di determinare gli scalari  $R_k^i$  e di suddividere i sottoinsiemi in maniera efficiente; utilizzando delle stime delle costanti di Lipschitz locali  $L_k^i$  e delle informazioni sul comportamento della funzione obiettivo sulla diagonale che congiunge i due estremi  $l^i$  e  $u^i$ .

Più formalmente un algoritmo diagonale può essere descritto dal seguente schema.

**Algoritmo Diagonale.**

*Passo 0:* si pone  $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$ ,  $l^0 = l$ ,  $u^0 = u$ ,  $I_0 = \{0\}$  e  $k = 0$ ;

*Passo 1:* data la partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  di  $\mathcal{D}$ ;

si stimano le costanti di Lipschitz (locali)  $L_k^i$  di  $f$  sui  $\mathcal{D}^i$ ,  $i \in I_k$ ;

utilizzando tali stime, si calcolano i valori  $R_k^i$  di ogni insieme  $\mathcal{D}^i$ ,  $i \in I_k$ ;

*Passo 2:* si sceglie un insieme  $\mathcal{D}^h$  tale che  $h \in I_k^* = \{j \in I_k : R_k^j = \min_{i \in I_k} R_k^i\}$ ;

*Passo 3:* si determina il vettore  $x_k = \alpha_k u^h + (1 - \alpha_k) l^h$  con  $\alpha_k \in (0, 1)$ ;

lo scalare  $\alpha_k$  viene calcolato utilizzando nuovamente la stima  $L_k^h$ ;

*Passo 4:* si sostituisce l'insieme  $\mathcal{D}^h$  con la sua partizione  $\{\mathcal{D}^{h_j} : j = 1, \dots, 2^n\}$  con

$$\mathcal{D}^{h_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : l^{h_j} \leq x \leq u^{h_j}\},$$

in cui, per ogni  $i = 1, \dots, n$ , si ha che:

$$(l^{h_j})_i = (l^h)_i \quad \text{e} \quad (u^{h_j})_i = (x_k)_i,$$

oppure

$$(l^{h_j})_i = (x_k)_i \quad \text{e} \quad (u^{h_j})_i = (u^h)_i;$$

*Passo 5:* si definisce la nuova partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_{k+1}\}$  di  $\mathcal{D}$  con

$$I_{k+1} = I_k \cup \{h_1, \dots, h_{2^n}\} \setminus \{h\},$$

si pone  $k = k + 1$  e si torna al Passo 1.

Nel Passo 3 del precedente algoritmo si suddivide l'insieme  $\mathcal{D}^h$  nei sottoinsiemi  $\mathcal{D}^{h_j}$ , con  $j = 1, \dots, 2^n$  delimitati dalla frontiera di  $\mathcal{D}^h$  e dagli iperpiani che contengono  $x_k$  e che sono paralleli alla frontiera di  $\mathcal{D}^h$ .

Nel Passo 4 si devono determinare gli estremi  $l^{h_j}$  e  $u^{h_j}$  dei nuovi sottointervalli  $\mathcal{D}^{h_j}$ ,  $j = 1, \dots, 2^n$  e si deve calcolare la funzione obiettivo in questi estremi. Quindi si devono introdurre  $2^{n+1} - 3$  nuovi punti poichè gli intervalli sono  $2^n$  ma gli estremi  $l^h$  e  $u^h$  dell'intervallo diviso  $\mathcal{D}^h$  sono già disponibili ed il nuovo punto  $x_k$  diventa l'estremo di due intervalli.

Le istruzioni dei Passo 3 e del Passo 4 (figura 5.3) devono assicurare che i nuovi sottointervalli  $\mathcal{D}^{h_j}$  vengano generati in maniera sufficientemente regolare, cioè che sia soddisfatta l'Assunzione 5.1.1. Questo può essere formalizzato dalla seguente proposizione.

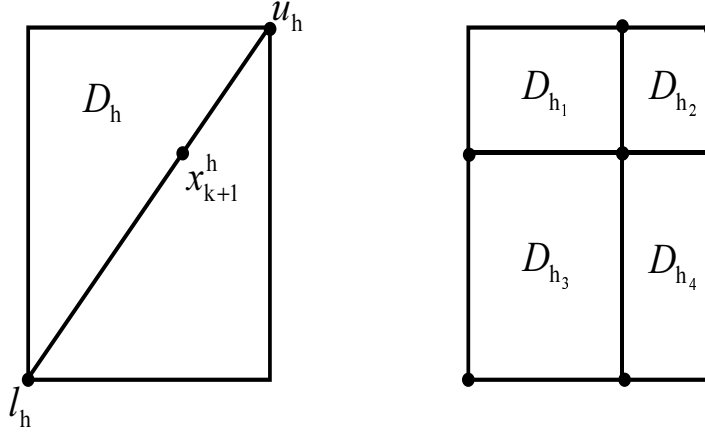


Figura 5.3: Suddivisione dell'intervallo  $\mathcal{D}^h$ .

**Proposizione 5.3.2** *Se, per ogni  $k$ , lo scalare  $\alpha_k$  utilizzato dall'Algoritmo Diagonale nel Passo 3 soddisfa alla condizione:*

$$\theta \leq \alpha_k \leq 1 - \theta,$$

con  $\theta \in (0, 0.5)$ , allora l'Assunzione 5.1.1 è soddisfatta.

**Prova.** Siano  $\mathcal{D}^{h_j} = \{x \in R^n : l^{h_j} \leq x \leq u^{h_j}\}$ ,  $j = 1, \dots, 2^n$ , i sottointervalli generati dall'intervallo  $\mathcal{D}^h = \{x \in R^n : l^h \leq x \leq u^h\}$  al Passo 4 dell'Algoritmo Diagonale allora, per ogni  $j = 1, \dots, 2^n$ , le istruzioni del Passo 3 implicano che le componenti dei vettori  $x_k - l^h$  e  $u^h - x_k$  sono date da:

$$\begin{aligned} (x_k - l^h)_i &= \alpha_k (u^h - l^h)_i, & i &= 1, \dots, n, \\ (u^h - x_k)_i &= (1 - \alpha_k) (u^h - l^h)_i, & i &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

da cui, ricordando le ipotesi su  $\alpha_k$ , si ottiene:

$$\theta (u^h - l^h)_i \leq (x_k - l^h)_i \leq (1 - \theta) (u^h - l^h)_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.59)$$

$$\theta (u^h - l^h)_i \leq (u^h - x_k)_i \leq (1 - \theta) (u^h - l^h)_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.60)$$

Per costruzione, le componenti del generico vettore  $l^{h_j}$  sono date da  $(l^{h_j})_i = (l^h)_i$  oppure da  $(l^{h_j})_i = (x_k)_i$  mentre le componenti del generico vettore  $u^{h_j}$  sono date da  $(u^{h_j})_i = (u^h)_i$  oppure da  $(u^{h_j})_i = (x_k)_i$ . Quindi, per ogni  $j = 1, \dots, 2^n$ , il vettore  $u^{h_j} - l^{h_j}$  ha componenti date da  $(u^{h_j} - l^{h_j})_i = (x_k - l^h)_i$  oppure da  $(u^{h_j} - l^{h_j})_i = (u^h - x_k)_i$  e, perciò, ricordando le (5.59) e (5.60), si ottiene per  $j = 1, \dots, 2^n$ :

$$\theta (u^h - l^h)_i \leq (u^{h_j} - l^{h_j})_i \leq (1 - \theta) (u^h - l^h)_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.61)$$

da cui, ricordando la definizione di norma si ha per  $j = 1, \dots, 2^n$ :

$$\theta \| (u^h - l^h) \| \leq \| (u^{h_j} - l^{h_j}) \| \leq (1 - \theta) \| (u^h - l^h) \|. \quad (5.62)$$

Se si indicano con  $\tilde{i}$  e  $\hat{i}$  gli indici tali che

$$\begin{aligned}(u^{h_j} - l^{h_j})_{\tilde{i}} &= (u^{h_j} - l^{h_j})_{i_{\min}} = \min_{i=1, \dots, n} (u^{h_j} - l^{h_j})_i, \\ (u^{h_j} - l^{h_j})_{\hat{i}} &= (u^{h_j} - l^{h_j})_{i_{\max}} = \max_{i=1, \dots, n} (u^{h_j} - l^{h_j})_i,\end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned}(u^{h_j} - l^{h_j})_{i_{\min}} &= (u^{h_j} - l^{h_j})_{\tilde{i}} \geq \theta(u^h - l^h)_{\tilde{i}} \geq \theta \min_{i=1, \dots, n} (u^h - l^h)_i = \theta(u^h - l^h)_{i_{\min}}, \\ (u^{h_j} - l^{h_j})_{i_{\max}} &= (u^{h_j} - l^{h_j})_{\hat{i}} \\ &\leq (1 - \theta)(u^h - l^h)_{\hat{i}} \leq (1 - \theta) \max_{i=1, \dots, n} (u^h - l^h)_i = (1 - \theta)(u^h - l^h)_{i_{\max}},\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\frac{(u^{h_j} - l^{h_j})_{i_{\min}}}{(u^{h_j} - l^{h_j})_{i_{\max}}} \geq \left( \frac{\theta}{1 - \theta} \right) \frac{(u^h - l^h)_{i_{\min}}}{(u^h - l^h)_{i_{\max}}}. \quad (5.63)$$

Dalle relazioni (5.62) e (5.63) segue che l'Assunzione 5.1.1 è verificata con  $\varepsilon_1 = \theta$ ,  $\varepsilon_2 = 1 - \theta$  e  $\varepsilon_3 = \theta/(1 - \theta)$ .  $\square$

Dalla precedente proposizione e dalla Proposizione 5.1.6 si ha il seguente risultato.

**Proposizione 5.3.3** *Se, per ogni  $k$ , lo scalare  $\alpha_k$  utilizzato dall'Algoritmo Diagonale nel Passo 3 soddisfa alla condizione:*

$$\theta \leq \alpha_k \leq 1 - \theta,$$

*con  $\theta \in (0, 0.5)$ , allora L'Algoritmo Diagonale genera almeno una sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$ .*

Le varie istanze dell'Algoritmo Diagonale proposte in letteratura, si differenziano nei modi di stimare le costanti  $L_k^i$ , di determinare il punto  $x_k$  ed i valori  $R_k^i$ . Nel seguito vengono descritti prima degli esempi di come determinare il punto  $x_k^h$  ed i valori  $R_k^i$  per fissati valori delle stime delle costanti  $\hat{L}_k^i$  e vengono evidenziate quali ipotesi devono soddisfare queste stime per garantire delle proprietà di convergenza dell'algoritmo. Per ultimo viene affrontato il problema di ottenere queste stime  $\hat{L}_k^i$  cercando di sfruttare il più possibile le informazioni sulla funzione da minimizzare, ottenute nelle varie iterazioni dell'algoritmo, in modo da cercare di determinare dei valori soddisfacenti sia dal punto di vista teorico che pratico.

*Scelta del punto  $x_k$ .*

Nel determinare il punto  $x_k$ , si evita di effettuare calcoli costosi ipotizzando che il comportamento della funzione obiettivo sia ben approssimato dal suo andamento lungo

la diagonale del sottointervallo considerato  $\mathcal{D}^h$ , con  $h \in I_k$ . Più in particolare, i punti lungo la diagonale del sottointervallo  $\mathcal{D}^h$  vengono indentificati attraverso l'insieme:

$$x(\alpha) = \alpha u^h + (1 - \alpha)l^h, \quad \text{con} \quad \alpha \in [0, 1] \quad (5.64)$$

e la funzione obiettivo viene pensata come funzione della variabile scalare che indentifica un punto lungo la diagonale del sottointervallo  $\mathcal{D}_h$ , cioè si considera la seguente funzione:

$$f(x(\alpha)) = f(\alpha u^h + (1 - \alpha)l^h), \quad \text{con} \quad \alpha \in [0, 1]. \quad (5.65)$$

In maniera simile al Metodo di Schubert-Mladineo, se la costante  $\hat{L}_k^h$  fosse una sovrastima della costante di Lipschitz della funzione  $f$ , la funzione  $f(x(\alpha))$  potrebbe essere sottostimata dalla funzione:

$$\begin{aligned} F(x(\alpha)) &= \max\{f(x(1)) - \hat{L}_k^h \|x(\alpha) - x(1)\|, f(x(0)) - \hat{L}_k^h \|x(\alpha) - x(0)\|\} \\ &= \max\{f(u^h) - (1 - \alpha)\hat{L}_k^h \|u^h - l^h\|, f(l^h) - \alpha\hat{L}_k^h \|u^h - l^h\|\}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

La funzione  $F(x(\alpha))$ , grazie alla sua particolare struttura e al fatto di dipendere solamente dalla variabile scalare  $\alpha$ , può essere minimizzata facilmente nell'intervallo  $[0, 1]$ . Tenendo conto di questo fatto, si può scegliere lo scalare  $\alpha_k$  in maniera tale che sia:

$$F(x(\alpha_k)) = \min_{\alpha \in [0,1]} F(x(\alpha)). \quad (5.67)$$

Lo scalare  $\alpha_k$  che verifica la (5.67) è l'unico valore che soddisfa la seguente uguaglianza:

$$f(u^h) - (1 - \alpha_k)\hat{L}_k^h \|u^h - l^h\| = f(l^h) - \alpha_k\hat{L}_k^h \|u^h - l^h\|, \quad (5.68)$$

da cui si ha:

$$\alpha_k = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\hat{L}_k^h} \frac{f(u^h) - f(l^h)}{\|u^h - l^h\|} \right) \quad (5.69)$$

Determinato il precedente valore di  $\alpha_k$ , il punto  $x_k$  diventa:

$$x_k = x(\alpha_k) = \alpha_k u^h + (1 - \alpha_k)l^h = \frac{l^h + u^h}{2} - \frac{f(u^h) - f(l^h)}{2\hat{L}_k^h} \frac{u^h - l^h}{\|u^h - l^h\|}. \quad (5.70)$$

La seguente proposizione mostra che, se le stime  $\hat{L}_k^i$  sono scelte in maniera ragionevole, i valori di  $\alpha_k$ , dati dalla (5.69), sono tali da soddisfare l'assunzione richiesta sia da Proposizione 5.3.2 che da Proposizione 5.3.3.

**Proposizione 5.3.4** *Si supponga che, per ogni  $k$  ed ogni  $i \in I_k$ , le stime  $\hat{L}_k^i$  soddisfino la seguente relazione:*

$$\hat{L}_k^i \geq r \frac{|f(u^i) - f(l^i)|}{\|u^i - l^i\|}, \quad (5.71)$$

con  $r > 1$ . Allora, per ogni  $k$ , gli scalari  $\alpha_k$ , dati dalla (5.69), soddisfano a

$$\theta \leq \alpha_k \leq 1 - \theta, \quad (5.72)$$

con  $\theta \in (0, 0.5)$ .



**Prova.** Dall'espressione (5.69) e dalla relazione (5.71) si ottiene:

$$\begin{aligned}\alpha_k &\geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\hat{L}_k} \frac{|f(u^h) - f(l^h)|}{\|u^h - l^h\|} \right) \geq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \\ \alpha_k &\leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{\hat{L}_k} \frac{|f(u^h) - f(l^h)|}{\|u^h - l^h\|} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{r} \right) = 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r} \right),\end{aligned}$$

da cui segue:

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \leq \alpha_k \leq 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r} \right), \quad (5.73)$$

che, a sua volta, assicura che  $\alpha_k$  soddisfa alla (5.72) con

$$\theta = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r} \right) \in (0, 0.5).$$

□

Scelta dei scalari  $R_k^i$ .

Per quanto riguarda i valori d'interesse  $R_k^i$  degli insiemi  $\mathcal{D}^i$ ,  $i \in I_k$ , sono state proposte varie espressioni. Quella può essere considerata di riferimento deriva dalla seguenti considerazioni. Se si conoscesse la costante di Lipschitz si avrebbe per ogni  $x \in \mathcal{D}^i$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(l^i) - L\|x - u^i\| \geq f(l^i) - L\|l^i - u^i\|, \\ f(x) &\geq f(u^i) - L\|x - u^i\| \geq f(u^i) - L\|l^i - u^i\|, \end{aligned}$$

da cui sommando termine a termine le precedenti disuguaglianze si otterrebbe per ogni  $x \in \mathcal{D}^i$ :

$$f(x) \geq \frac{f(l^i) + f(u^i)}{2} - L\|l^i - u^i\|.$$

Quindi il termine di destra della precedente disuguaglianza fornirebbe una sottostima del valore ottimo della funzione obiettivo sull'insieme  $\mathcal{D}^i$  e, perciò, potrebbe fornire una indicazione ragionevole del possibile interesse dell'insieme  $\mathcal{D}^i$ . Perciò una espressione ragionevole per gli scalari  $R_k^i$  può essere ottenuta dal precedente termine sostituendo alla costante di Lipschitz  $L$  le stime locali  $\hat{L}_k^i$ , cioè:

$$R_k^i = \frac{f(l^i) + f(u^i)}{2} - \hat{L}_k^i \|l^i - u^i\|. \quad (5.74)$$

Per quanto riguarda questa scelta si può stabilire il seguente risultato.

**Proposizione 5.3.5** *Sia  $X^*$  l'insieme dei minimi globali della funzione  $f$  sull'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$ , siano  $R_k^i$  i valori d'interesse degli insiemi  $\mathcal{D}^i$ ,  $i \in I_k$ , determinati dalla (5.74) e siano  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  e  $\delta_3$  delle costanti tali che  $\delta_2 \geq \delta_1 > 0$  e  $\delta_3 \in (0, 1)$ . Si ha che:*

i) se, per ogni  $k$ , le stime  $\hat{L}_k^i$ ,  $i \in I_k$  soddisfano la condizione:

$$\hat{L}_k^i \leq \delta_2, \quad i \in I_k, \quad (5.75)$$

allora il punto i) della Assunzione (5.1.3) e l'ipotesi i) della Assunzione (5.1.4) sono soddisfatte;

ii) se in corrispondenza ad un minimo globale  $x^* \in X^*$  esiste un indice  $\bar{k}$  tali che, se  $\mathcal{D}^{j_k}$ ,  $j_k \in I_k$ , è l'insieme per cui  $x^* \in \mathcal{D}^{j_k}$ , si ha che, per ogni  $k \geq \bar{k}$ ,

$$\hat{L}_k^{j_k} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} H^{j_k}, \quad (5.76)$$

dove

$$H^{j_k} = \max \left\{ \frac{f(l^{j_k}) - f(x^*)}{\|x^* - l^{j_k}\|}, \frac{f(u^{j_k}) - f(x^*)}{\|u^{j_k} - x^*\|} \right\}, \quad (5.77)$$

allora il punto ii) della Assunzione (5.1.3) è soddisfatto;

iii) se per ogni minimo globale  $x^* \in X^*$  esiste un indice  $\bar{k}$  tali che, se  $\mathcal{D}^{j_k}$ ,  $j_k \in I_k$ , è l'insieme per cui  $x^* \in \mathcal{D}^{j_k}$ , si ha che, per ogni  $k \geq \bar{k}$ ,

$$\hat{L}_k^{j_k} \geq \max\{\delta_1, \frac{1}{\delta_3} \frac{\sqrt{2}}{2} H^{j_k}\}, \quad (5.78)$$

allora il punto ii) della Assunzione (5.1.4) è soddisfatto.

**Prova.** Punto i). La dimostrazione di questo punto segue utilizzando l'ipotesi (5.75), la definizione (5.74) e ricordando che, per ogni sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'algoritmo, si ha  $\lim_{k \rightarrow \infty} u^{i_k} = \bar{x}$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} l^{i_k} = \bar{x}$ .

Punto ii). Per dimostrare questo punto è necessario premettere alcuni risultati. Dati due scalari  $a$  e  $b$ , dalla

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0,$$

si ha:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

da cui segue:

$$\begin{aligned} 2(a^2 + b^2) &\geq a^2 + b^2 + 2ab, \\ 2(a^2 + b^2) &\geq (a + b)^2, \end{aligned}$$

che, a sua volta, implica:

$$\sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2} \geq a + b. \quad (5.79)$$

Dato un sottointervallo  $\mathcal{D}^i = \{x \in R^n : l^i \leq x \leq u^i\}$  la precedente formula (5.79) permette di dimostrare che

$$\max_{x \in \mathcal{D}^i} \left\{ \|x - l^i\| + \|u^i - x\| \right\} \leq \sqrt{2} \|u^i - l^i\|. \quad (5.80)$$

Infatti, la (5.79) (applicata con  $a = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x - l^i)_j^2}$  e  $b = \sqrt{\sum_{j=1}^n (u^i - x)_j^2}$ ) ed il fatto che, per ogni  $x \in \mathcal{D}^i$ , si ha  $(x - l^i)_j (u^i - x)_j \geq 0$ , con  $j = 1, \dots, n$ , implicano che per ogni  $x \in \mathcal{D}^i$ :

$$\begin{aligned} \|x - l^i\| + \|u^i - x\| &= \sqrt{\sum_{j=1}^n (x - l^i)_j^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n (u^i - x)_j^2} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\sum_{j=1}^n [(x - l^i)_j^2 + (u^i - x)_j^2]} \\ &\leq \sqrt{2} \sqrt{\sum_{j=1}^n [(x - l^i)_j^2 + (u^i - x)_j^2 + 2(x - l^i)_j (u^i - x)_j]} \\ &= \sqrt{2} \|u^i - l^i\|. \end{aligned}$$

Stabilita la (5.80), si può passare a dimostrare la proposizione.  
Dalla (5.77) si ha:

$$\begin{aligned} f(l^i) - f(x^*) &\leq H^i \|l^i - x^*\|, \\ f(u^i) - f(x^*) &\leq H^i \|u^i - x^*\|. \end{aligned}$$

Sommando le due precedenti disuguaglianze ed utilizzando la (5.80) si ottiene:

$$\begin{aligned} f(u^{j_k}) + f(l^{j_k}) &\leq 2f(x^*) + H^{j_k} (\|l^{j_k} - x^*\| + \|u^{j_k} - x^*\|) \\ &\leq 2f(x^*) + H^{j_k} \max_{x \in D^{j_k}} (\|l^{j_k} - x\| + \|u^{j_k} - x\|) \\ &\leq 2f(x^*) + \sqrt{2} H^{j_k} \|u^{j_k} - l^{j_k}\|. \end{aligned} \quad (5.81)$$

La definizione (5.74) di  $R_k^{j_k}$  e la precedente (5.81) implicano:

$$\begin{aligned} R_k^{j_k} &= \frac{f(u^{j_k}) + f(l^{j_k})}{2} - \hat{L}_k^{j_k} \|u^{j_k} - l^{j_k}\| \\ &\leq f(x^*) - \left( \hat{L}_k^{j_k} - \frac{\sqrt{2}}{2} H^{j_k} \right) \|u^{j_k} - l^{j_k}\|. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Da cui, ricordando che le stime  $\hat{L}_k^{j_k}$ ,  $i \in I_k$ , soddisfano alla (5.76), si ottiene:

$$R_k^{j_k} \leq f(x^*). \quad (5.83)$$

Quindi le ipotesi fatte nel punto ii) della proposizione e la (5.83) implicano il punto ii) della Assunzione (5.1.3).

Punto iii). Ripetendo gli stessi ragionamenti fatti nel punto ii) si arriva alla (5.82). Utilizzando il fatto che le stime  $\hat{L}_k^{j_k}$ ,  $i \in I_k$ , soddisfano alla (5.78), si ha:

$$R_k^{j_k} \leq f(x^*) - \left(1 - \delta_3\right) \hat{L}_k^{j_k} \|u^{j_k} - l^{j_k}\| \leq f(x^*) - \left(1 - \delta_3\right) \delta_1 \|u^{j_k} - l^{j_k}\|,$$

che dimostra che, in questo caso, il punto ii) della Assunzione (5.1.4) è soddisfatto con  $\delta = (1 - \delta_3)\delta_1$ .  $\square$

*Scelta delle stime  $\hat{L}_k^{j_k}$ .*

Il punto di partenza, per cercare di stimare la costante di Lipschitz della funzione obiettivo, è quello di utilizzare tutte le informazioni sulla funzione obiettivo ottenute durante le iterazioni dell'algoritmo. Alla  $k$ -esima iterazione una possibile stima della costante di Lipschitz della funzione può essere:

$$\hat{L}_k^{max} = \max_{i \in I_k} \left\{ \frac{|f(l^i) - f(u^i)|}{\|l^i - u^i\|} \right\}. \quad (5.84)$$

Osservando il comportamento dell'Algoritmo di Schubert-Mladineo, risulta evidente che, delle buone sottostime della funzione obiettivo, possono essere ottenute utilizzando delle stime locali della costante di Lipschitz. Infatti una generica funzione obiettivo

potrebbe presentare zone in cui è molto oscillante e zone in cui è più regolare. In questo caso, la costante di Lipschitz globale della funzione obiettivo sarebbe determinata dal comportamento più oscillante della funzione. La relativa funzione approssimante costruita dall'Algoritmo di Schubert-Mladineo presenterebbe un errore significativo nelle zone in cui la funzione è più "piatta". La situazione migliorerebbe drasticamente dividendo l'insieme ammissibile in sottointervalli, stimando le costanti di Lipschitz della funzione obiettivo nei vari sottointervalli ed costruendo le rispettive funzioni approssimanti.

In linea con le precedenti osservazioni, gli algoritmi diagonali più recenti stimano la costante di Lipschitz della funzione obiettivo nella seguente maniera:

$$\hat{L}_k^i = \left( r + \frac{c}{k} \right) \max\{\sigma^i, \gamma_k^i, \xi\}, \quad (5.85)$$

dove,  $r > 1$ ,  $c > 0$ ,  $\xi > 0$  e

$$\sigma^i = \frac{|f(l^i) - f(u^i)|}{\|l^i - u^i\|}, \quad (5.86)$$

$$\gamma_k^i = \frac{\hat{L}_k^{max}}{d_k^{max}} \|l^i - u^i\| \quad (5.87)$$

con  $d_k^{max}$  dato dalla (5.27).

Il termine  $\sigma_i$  costituisce una stima locale della costante di Lipschitz, cioè che riflette il comportamento della funzione obiettivo nel sottointervallo  $\mathcal{D}^i$ .

Il termine  $\xi$  è necessario per considerare anche funzioni costanti.

Il termine  $\gamma_k^i$  è tale che:

- se il sottointervallo  $\mathcal{D}^i$  è piccolo (cioè se  $\|l^i - u^i\|$  è molto più piccolo di  $d_k^{max}$ ) e, quindi, le informazioni locali possono essere attendibili, allora la stima  $\hat{L}_k^i$  coincide con la stima locale  $\sigma^i$ ;
- se il sottointervallo  $\mathcal{D}^i$  è grande (cioè se  $\|l^i - u^i\|$  è circa uguale a  $d_k^{max}$ ) e, quindi, le informazioni locali possono essere completamente non attendibili, allora la stima  $\hat{L}_k^i$  coincide con la stima globale  $\hat{L}_k^{max}$ .

Perciò i vari scalari  $\hat{L}_k^i$  dati dalla (5.85) possono essere considerati delle ragionevoli sovrastime delle costanti locali di Lipschitz della funzione obiettivo sui vari sottoinsiemi  $\mathcal{D}^i$ .

A conclusione della descrizione e della analisi dell'Algoritmo Diagonale si può stabilire la seguente proposizione.

**Proposizione 5.3.6** *Sia  $X^*$  l'insieme dei minimi globali della funzione  $f$  sull'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$ . Si consideri l'Algoritmo Diagonale in cui lo scalare  $\alpha_k$  sia dato dalla (5.69), i valori d'interesse  $R_k^i$ ,  $i \in I_k$ , dalla (5.74) e le stime  $\hat{L}_k^i$ ,  $i \in I_k$ , dalla (5.85). Si ha che:*

- i) l'algoritmo genera almeno una sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  strettamente annidata;
- ii) se lo scalare  $r$  che compare nella (5.85) è tale da soddisfare le ipotesi del punto ii) della Proposizione 5.3.5 allora ogni sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'algoritmo soddisfa a:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} \subseteq X^*; \quad (5.88)$$

- iii) se lo scalare  $r$  che compare nella (5.85) è tale da soddisfare le ipotesi del punto iii) della Proposizione 5.3.5 allora si ha che, per ogni minimo globale  $x^* \in X^*$ , esiste una sequenza strettamente annidata di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  prodotta dall'algoritmo che soddisfa a:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{x^*\}. \quad (5.89)$$

**Prova.** Punto i). Dalla (5.85) segue che le stime  $\hat{L}_k^i$ ,  $i \in I_k$ , soddisfano la condizione (5.71). Quindi la prova del punto i) segue da Proposizione 5.3.3 e Proposizione 5.3.4.

Punto ii) e Punto iii). Prima di tutto si può osservare che le stime  $\hat{L}_k^i$ ,  $i \in I_k$ , sono uniformemente limitate sia inferiormente che superiormente. Infatti dalla definizione (5.85) si ha, per ogni  $k$  ed ogni  $i \in I_k$ :

$$\hat{L}_k^i \leq (r + c) \max\{L, \xi\} \quad (5.90)$$

$$\hat{L}_k^i \geq r\xi, \quad (5.91)$$

dove  $L$  è la costante di Lipschitz della funzione obiettivo sull'insieme ammissibile. Le precedenti relazioni (5.90) e (5.91) e le ipotesi fatte nei punti ii) e iii) assicurano che tutte le assunzioni richieste dalla Proposizione 5.3.5 sono soddisfatte. La dimostrazione della proposizione può essere completata utilizzando la Proposizione 5.3.2, la Proposizione 5.3.4, la Proposizione 5.3.5, la Proposizione 5.1.12 e la Proposizione 5.1.13.  $\square$

## 5.4 Metodi che non utilizzano stime della costante di Lipschitz della funzione obiettivo

Dal punto di vista teorico, i metodi diagonali costituiscono un interessante passo avanti rispetto all'Algoritmo di Schubert-Mladineo. Essi presentano proprietà di convergenza verso un minimo globale senza avere la necessità di conoscere, fin dalla prima iterazione, una sovrastima della costante di Lipschitz della funzione obiettivo. Infatti è sufficiente ottenere, entro un numero sufficientemente grande di iterazioni, una sovrastima della costante di Lipschitz della funzione obiettivo in un intorno di un minimo globale. Tuttavia, anche quest'ultima richiesta pone dei limiti sulla garanzia di ottenere un minimo globale utilizzando questi algoritmi. Questo motiva il tentativo di definire degli algoritmi che cerchino di sfruttare l'ipotesi che la funzione è Lipschitziana senza richiedere,

però, nessuna informazione sulla costante di Lipschitz. Tra questi metodi uno dei più significativi ed importanti è quello chiamato Algoritmo Direct.

L'Algoritmo Direct, come gli algoritmi diagonali, partiziona l'insieme ammissibile  $\mathcal{D}$  in un numero crescente di sottointervalli  $\mathcal{D}^i = \{x \in R^n : l^i \leq x \leq u^i\}$  con  $i \in I_k$  (da cui il nome *dividing rectangles*). Ad ogni iterazione, un certo numero di sottointervalli vengono giudicati di interesse e, di conseguenza, vengono ulteriormente suddivisi. La maggiore novità dell'Algoritmo Direct è il modo con cui giudica l'interesse di un sottointervallo. Infatti gli algoritmi diagonali scelgono delle stime delle costanti di Lipschitz locali e, sfruttando la Lipschitzianet  della funzione obiettivo, selezionano il sottointervallo di maggiore interesse. Invece l'Algoritmo di Direct seleziona ogni sottointervallo per cui esiste un valore della costante di Lipschitz della funzione obiettivo che rende il sottointervallo considerato il pi  interessante.

Il punto di partenza di questo algoritmo   di misurare l'interesse di un intervallo  $\mathcal{D}^i$  calcolando il valore che assume ai suoi punti estremi la sottostima della funzione obiettivo

$$\hat{f}^i(x, \bar{L}) = f(x^i) - \bar{L}\|x - x^i\|,$$

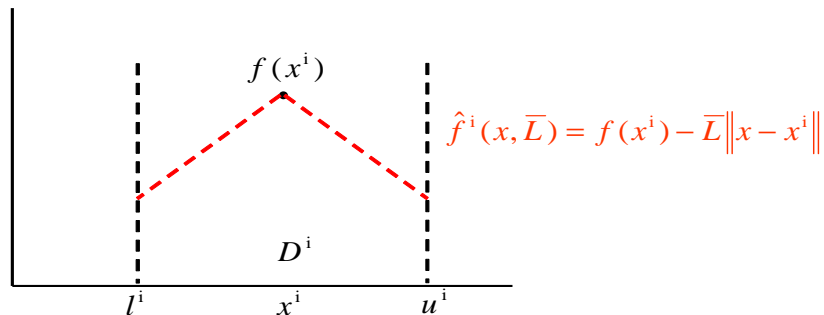


Figura 5.4: Esempio della sottostima  $\hat{f}(x, \bar{L})$ .

Tuttavia i valori assunti agli estremi dei sottoinsiemi dalle funzioni  $\hat{f}^i(x, \bar{L})$  dipendono dal particolare valore della stima  $\bar{L}$ . Infatti per valori molto grandi di  $\bar{L}$  sono giudicati interessanti i sottoinsiemi di dimensioni massime (figura (5.5)). Per valori molto piccoli di  $\bar{L}$  sono giudicati interessanti i sottoinsieme a cui corrispondono i valori pi  piccoli  $f(x^i)$  (figura (5.6)). Tutti gli altri sottointervalli possono essere divisi in due gruppi: il primo costituito da sottoinsiemi per cui esiste un valore di  $\bar{L}$  per cui sono considerati interessanti (figura (5.7)) e il secondo costituito da sottoinsiemi per cui non esiste un valore di  $\bar{L}$  per cui sono considerati interessanti (sottoinsieme  $\mathcal{D}^3$  della figura (5.7)).

Formalmente l'Algoritmo Direct usa la seguente definizione di sottointervalli potenzialmente ottimi.

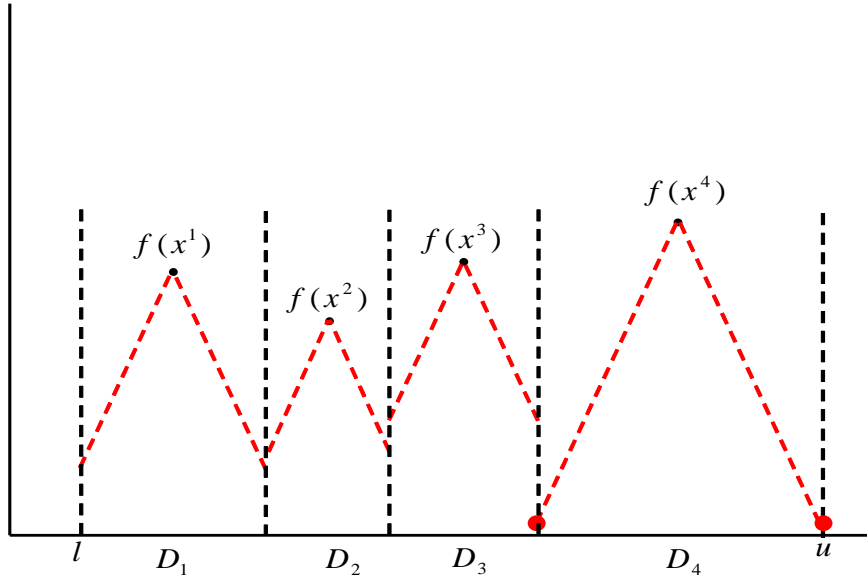


Figura 5.5: Esempio di valutazioni dei sottoinsiemi per  $\bar{L}$  grande.

**Definizione 5.4.1** Data la partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I\}$  dell'insieme  $\mathcal{D}$ , dove, per ogni  $i \in I$

$$\mathcal{D}^i = \{x \in R^n : l^i \leq x \leq u^i\}, \quad x^i = \frac{u^i + l^i}{2},$$

e sia

$$f_{min} = \min_{i \in I} f(x^i).$$

Un sottointervallo  $\mathcal{D}^h$ ,  $h \in I$ , è detto potenzialmente ottimo se, scelto un parametro  $\varepsilon > 0$ , esiste una costante  $\bar{L}^h > 0$  tale che:

$$f(x^h) - \frac{\bar{L}^h}{2} \|u^h - l^h\| \leq f(x^i) - \frac{\bar{L}^h}{2} \|u^i - l^i\|, \quad \text{per tutti } i \in I, \quad (5.92)$$

$$f(x^h) - \frac{\bar{L}^h}{2} \|u^h - l^h\| \leq f_{min} - \varepsilon |f_{min}|, \quad (5.93)$$

Introdotta la precedente definizione, è possibile descrivere formalmente l'Algoritmo Direct.



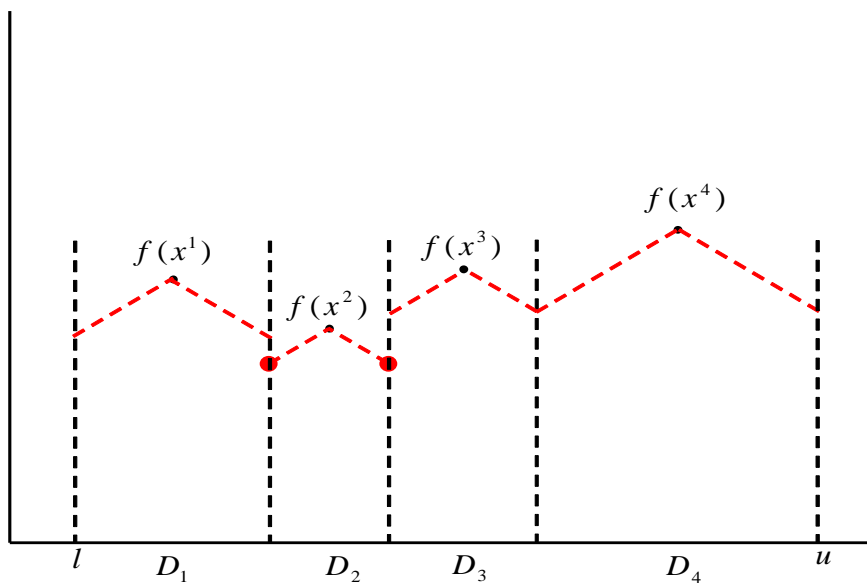


Figura 5.6: Esempio di valutazioni dei sottoinsiemi per  $\bar{L}$  piccolo.

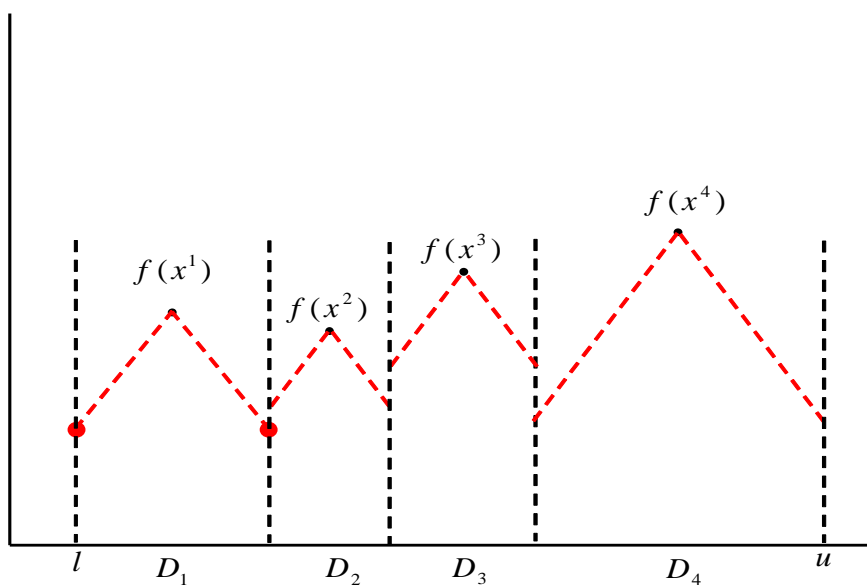


Figura 5.7: Esempio di valutazioni dei sottoinsiemi per  $\bar{L}$  medio.

**Algoritmo Direct.**

*Passo 0:* Si pone  $\mathcal{D}^0 = \mathcal{D}$ ,  $l^0 = l$ ,  $u^0 = u$ ,  $x^0 = (l^0 + u^0)/2$ ,  $I_0 = \{0\}$  e  $k = 0$ ;

*Passo 1:* data la partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_k\}$  di  $\mathcal{D}$

dato l'insieme di punti  $\{x^i = (l^i + u^i)/2 : i \in I_k\}$

si identifica il sottoinsieme di indici  $I_k^* \subseteq I_k$  tale che:

$$I_k^* = \{i \in I_k : \mathcal{D}^i \text{ è potenzialmente ottimo}\},$$

si pone  $\bar{I}^0 = I_k$ ,  $\hat{I}^0 = I_k^*$  e  $p = 0$

*Passo 2:* si sceglie un indice  $h \in \hat{I}^p$  e si determinano:

$$\delta = \max_{1 \leq j \leq n} (u^h - l^h)_j,$$

$$J = \{j = 1, \dots, n : (u^h - l^h)_j = \delta\}$$

$$m = |J| \quad (\text{dove } |J| \text{ è la cardinalità dell'insieme } J);$$

*Passo 3:* si determinano i  $2m + 1$  punti dati da:

$$x^{h_0} = x^h, \quad x^{h_j} = x^h + \frac{\delta}{3}e_j, \quad x^{h_{j+m}} = x^h - \frac{\delta}{3}e_j, \quad \text{per ogni } j \in J;$$

*Passo 4:* attraverso la *Procedura di Partizione* si partiziona l'insieme  $\mathcal{D}^h$  attraverso i  $2m + 1$  sottointervalli  $\mathcal{D}^{h_0}, \mathcal{D}^{h_j}, \mathcal{D}^{h_{j+m}}$ , con  $j \in J$ , che hanno come punti centrali i vettori  $x^{h_0}, x^{h_j}, x^{h_{j+m}}$ , con  $j \in J$ ;

*Passo 5:* si pone:

$$\bar{I}^{p+1} = \bar{I}^p \cup \{h_0\} \cup \bigcup_{j \in J} \{h_j, h_{j+m}\} \setminus \{h\},$$

$$\hat{I}^{p+1} = \hat{I}^p \setminus \{h\},$$

se  $\hat{I}^{p+1} \neq \emptyset$  si pone  $p = p + 1$  e si torna al Passo 2;

*Passo 6:* si definisce la nuova partizione  $\{\mathcal{D}^i : i \in I_{k+1}\}$  con

$$I_{k+1} = \bar{I}^{p+1},$$

si pone  $k = k + 1$  e si torna al Passo 1.

Al Passo 1 l'algoritmo seleziona, tra tutti gli intervalli generati, quelli che sono potenzialmente ottimi. Per ognuno di questi, al Passo 2 determina l'insieme degli indici  $J$  che corrispondono ai spigoli più lunghi dell'intervallo scelto. Al Passo 3, a partire dal centro dell'intervallo, vengono generati dei nuovi punti lungo gli assi coordinati (i ver-

sori  $e_j$ ) i cui indici appartengono a  $J$  e lungo i loro opposti. Questi nuovi punti vengono generati a distanza dal centro pari ad un terzo dell'ampiezza massima dell'intervallo. Al Passo 4, l'intervallo scelto viene diviso in sottointervalli che hanno come centri i punti generati al Passo 3 ed il punto  $x^h$ , centro dell'intervallo di partenza.

Per quanto riguarda la generazione dei sottointervalli che partizionano un intervallo potenzialmente ottimo, si ha la seguente procedura.

**Procedura di Partizione.**

*Passo 0:* Dati l'intervallo  $\mathcal{D}^h$ , lo scalare  $\delta$ , l'insieme  $J$ , i punti  $x^{h_0}, x^{h_j}, x^{h_{j+m}}$ , con  $j \in J$ , si pone  $\tilde{\mathcal{D}}^0 = \mathcal{D}^h$ ,  $\tilde{J}^0 = J$  e  $p = 0$ ;

*Passo 1:* si determina l'indice  $\ell \in \tilde{J}^p$  tale che:

$$w^\ell = \min_{j \in \tilde{J}^p} w^j,$$

con  $w^j = \min\{f(x^{h_j}), f(x^{h_{j+m}})\}$ .

*Passo 2:* si determinano gli insiemi:

$$\mathcal{D}^{h_\ell} = \tilde{\mathcal{D}}^p \cap \{x \in R^n : (u^h)_\ell - \frac{\delta}{3} \leq (x)_\ell \leq (u^h)_\ell\},$$

$$\mathcal{D}^{h_{\ell+m}} = \tilde{\mathcal{D}}^p \cap \{x \in R^n : (l^h)_\ell \leq (x)_\ell \leq (l^h)_\ell + \frac{\delta}{3}\},$$

e si pone:

$$\tilde{\mathcal{D}}^{p+1} = \tilde{\mathcal{D}}^p \cap \{x \in R^n : (l^h)_\ell + \frac{\delta}{3} \leq (x)_\ell \leq (u^h)_\ell - \frac{\delta}{3}\},$$

$$\tilde{J}^{p+1} = \tilde{J}^p \setminus \{\ell\};$$

*Passo 3:* se  $\tilde{J}^{p+1} \neq \emptyset$ , si pone  $p = p + 1$  e si torna al Passo 1;

*Passo 4:* si pone:

$$\mathcal{D}^{h_0} = \tilde{\mathcal{D}}^{p+1}$$

e la procedura termina.

Nella presente procedura si determina la forma dei nuovi intervalli cercando di sfruttare i valori della funzione obiettivo ottenuti nei punti generati al Passo 3 dell'Algoritmo Direct. L'obiettivo è di associare dimensioni più grandi agli intervalli in cui al centro la funzione obiettivo assume valori più piccoli. In questo modo si aumenta la possibilità che, all'iterazione successiva dell'Algoritmo Direct, questi intervalli siano giudicati potenzialmente ottimi. Per ottenere questo obiettivo la precedente procedura determina, ad ogni passo, il versore  $e_j$  lungo il quale si ha il valore più basso della funzione obiet-

tivo. Poi il sottointervallo in cui c'è il centro  $x^h$  dell'intervallo di partenza viene diviso in tre parti uguali lungo la direzione indentificata da  $e_j$ .

In figura 5.8 è riportato un esempio di partizione dell'intervallo  $\mathcal{D}_h$ , nel caso in cui il valore più piccolo della funzione obiettivo è nel punto  $x^{h_4}$ .

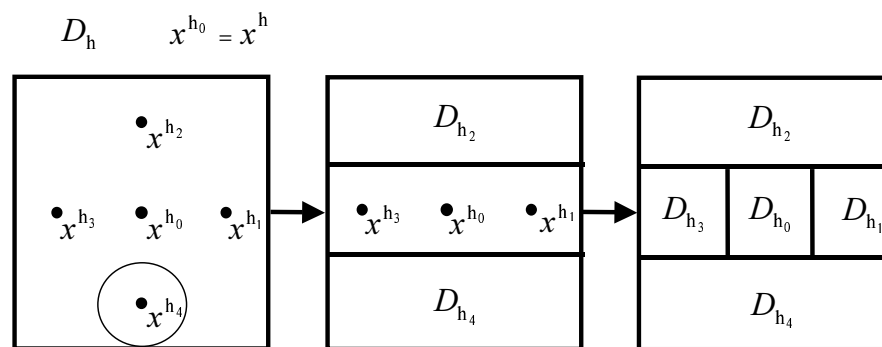


Figura 5.8: Suddivisione dell'intervallo  $\mathcal{D}_h$ .

La figura 5.9 descrive il comportamento della Procedura di Partizione nel caso in cui l'intervallo  $\mathcal{D}_h$  diventa potenzialmente ottimo.

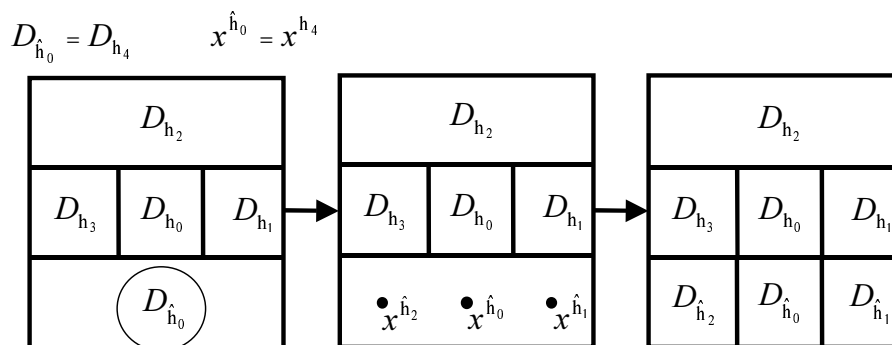


Figura 5.9: Suddivisione dell'intervallo  $\mathcal{D}_{h_4}$ .

L'analisi delle proprietà dell'Algoritmo Direct segue facilmente dalle seguenti due proposizioni. La prima evidenzia che l'Algoritmo Direct partiziona i sottoinsiemi identificati in maniera da soddisfare l'Assunzione 5.1.1.

**Proposizione 5.4.2** *Siano  $\mathcal{D}^{h_0}$ ,  $\mathcal{D}^{h_j}$ ,  $\mathcal{D}^{h_{j+m}}$ ,  $j \in J$ , i sottointervalli generati dalla partizione dell'intervallo  $\mathcal{D}^h$  al Passo 4 dell'Algoritmo Direct, allora l'Assunzione 5.1.1 è soddisfatta.*

**Prova.** Le istruzioni della Procedura di Partizione implicano che la norma delle diagonali dei sottoinsiemi generati  $\mathcal{D}^{\tilde{h}}$ ,  $\tilde{h} \in \cup_{j \in J} \{h_j, h_{j+m}\} \cup \{h_0\}$ , soddisfano

$$\begin{aligned} \|u^{\tilde{h}} - l^{\tilde{h}}\|^2 &= \sum_{i=1}^n (u^{\tilde{h}} - l^{\tilde{h}})_i^2 \geq \frac{1}{9} \sum_{i=1}^n (u^h - l^h)_i^2 \\ &= \frac{1}{9} \|u^h - l^h\|^2 \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \|u^{\tilde{h}} - l^{\tilde{h}}\|^2 &\leq \sum_{i \neq j} (u^h - l^h)_i^2 + \frac{(u^h - l^h)_j^2}{9} \\ &= \sum_{i=1}^n (u^h - l^h)_i^2 - \frac{8}{9} (u^h - l^h)_j^2 \end{aligned} \quad (5.95)$$

dove  $j \in J$  (l'insieme  $J$  è definito al Passo 3 dell'Algoritmo Direct). Inoltre si ha che la norma della diagonale di  $\mathcal{D}^h$  soddisfa la seguente relazione

$$\|u^h - l^h\|^2 = \sum_{i=1}^n (u^h - l^h)_i^2 \leq n (u^h - l^h)_j^2,$$

da cui segue

$$\|u^{\tilde{h}} - l^{\tilde{h}}\|^2 \leq \left(1 - \frac{8}{9n}\right) \|u^h - l^h\|^2. \quad (5.96)$$

Dalla (5.94), dalla (5.96) e dalle istruzioni della procedura di partizione segue che l'Assunzione 5.1.1 è soddisfatta con  $\varepsilon_1 = 1/3$ ,  $\varepsilon_2 = \sqrt{1 - 8/(9n)}$  e  $\varepsilon_3 = 1/3$ .  $\square$

La seconda proposizione mette in evidenza è il fatto che, in ogni iterazione, un particolare sottoinsieme con ampiezza massima risulta sempre potenzialmente ottimo e che quindi l'Assunzione 5.1.2 è soddisfatta.

**Proposizione 5.4.3** *Se  $\{I_k^*\}$  è la sequenze degli insiemi di indici identificati dall'Algoritmo Direct allora l'Assunzione 5.1.2 è soddisfatta.*

**Prova.** Sia  $\mathcal{D}^\ell$ ,  $\ell \in I_k$ , un sottoinsieme tale che  $\ell \in I_k^{max}$  (con  $I_k^{max}$  dato dalla (5.28)) e  $f(x^\ell) \leq f(x^i)$ , per ogni  $i \in I_k^{max}$ , allora il sottoinsieme  $\mathcal{D}^\ell$  è potenzialmente ottimo. La dimostrazione segue facilmente notando che ogni costante  $\bar{L}^\ell > 0$  tale che:

$$\bar{L}^\ell > 2 \max \left\{ \frac{f(x^\ell) - f_{min} + \varepsilon |f_{min}|}{d^\ell}, \max_{j \in I_k \setminus I_k^{max}} \frac{f(x^\ell) - f(x^j)}{d^\ell - d^j} \right\},$$

soddisfa alle richieste (5.92) e (5.93).  $\square$

Utilizzando la Proposizione 5.4.2, la Proposizione 5.4.3, la Proposizione 5.1.8 e la Proposizione 5.1.9 si può concludere con la seguente proposizione.

**Proposizione 5.4.4** *Tutte le sequenze di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  generate dall'Algoritmo Direct sono strettamente annidate. Inoltre, per ogni  $\tilde{x} \in \mathcal{D}$ , l'algoritmo genera una sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  strettamente annidata tale che*

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\tilde{x}\}.$$

Dalla precedente proposizione segue che l'Algoritmo Direct genera un insieme di punti che, al crescere delle iterazioni, tende a diventare un insieme denso su  $\mathcal{D}$ . Tuttavia, computazionalmente, l'Algoritmo Direct sembra mostrare una buona capacità di visitare prima le regioni più interessanti dal punto della localizzazione dei minimi globali.

**(La Sezione 5.5 non fa parte del programma dell'esame di Metodi di Ottimizzazione Globale (5cfu), mentre fa parte di quello dell'esame di Ottimizzazione Globale (6cfu))**

## 5.5 Metodi che utilizzano strategia miste

Nelle due precedenti sezioni si sono descritte due strategie completamente diverse per definire dei metodi di ottimizzazione globale. Nella prima si ipotizza di avere delle informazioni globali sulla funzione obiettivo e si costruisce un algoritmo che cerchi di sfruttare efficientemente queste conoscenze. La seconda strategia, invece, è caratterizzata dal fatto di definire un algoritmo che sia in grado di affrontare un problema di ottimizzazione globale senza richiedere nessuna informazione globale. Una terza possibilità è quella di adottare una strategia mista, nel senso di definire un algoritmo senza ipotizzare inizialmente di avere informazioni globali sul problema e di cercare di utilizzare dopo delle eventuali stime di tali informazioni per migliorarne le proprietà teoriche e l'efficienza. In questa maniera, il comportamento dell'algoritmo risultante dovrebbe essere meno sensibile al grado di esattezza delle stime utilizzate.

In questa sezione, come esempio di un metodo che usa una strategia mista, si considera una possibile variazione dell'Algoritmo di Direct nel caso in cui si ha a disposizione una sovrastima della costante di Lipschitz. Il punto di partenza del nuovo algoritmo è la seguente definizione di sottointervallo fortemente potenzialmente ottimo.

**Definizione 5.5.1** *Data una costante  $\bar{L} > 0$  ed una partizione  $\{\mathcal{D}^i, i \in I\}$  di  $\mathcal{D}$ . Un sottointervallo  $\mathcal{D}^h$ ,  $h \in I$ , è detto fortemente potenzialmente ottimo se, scelti due parametri  $\varepsilon > 0$  e  $\tilde{\varepsilon} > 0$ , una delle seguenti condizioni è verificata:*

*i) esiste una costante a constant  $L^h \in (0, \bar{L})$  tale che:*

$$f(x^h) - \frac{L^h}{2} \|u^h - l^h\| \leq f(x^i) - \frac{L^h}{2} \|u^i - l^i\|, \text{ per tutti } i \in I_k, \quad (5.97)$$

$$f(x^h) - \frac{L^h}{2} \|u^h - l^h\| \leq f^{\min} - \varepsilon \max\{|f^{\min}|, \tilde{\varepsilon}\}, \quad (5.98)$$

*dove  $f^{\min}$  è dato nella Definizione 5.4.1;*

ii)

$$f(x^h) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^h - l^h\| \leq f(x^i) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^i - l^i\|, \text{ per tutti } i \in I_k. \quad (5.99)$$

Utilizzando la precedente definizione si può definire un nuovo algoritmo che coincide con quello di Direct a meno della scelta dei sottointervalli da partizionare. Infatti, ad ogni iterazione, invece di selezionare quelli potenzialmente ottimi vengono scelti i sottointervalli fortemente potenzialmente ottimi. Grazie a questa variazione, il nuovo algoritmo presenta delle proprietà teoriche più forti, come è descritto dal seguente risultato.

**Proposizione 5.5.2** *Sia  $\bar{L}$  la costante che compare nella definizione di sottoinsieme strettamente potenzialmente ottimo. Si consideri la variazione dell'Algoritmo di Direct in cui l'insieme  $I_k^*$  è costituito dagli indici dei sottoinsiemi fortemente potenzialmente ottimi. Allora*

- i) *l'algoritmo produce almeno una sequenze di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  strettamente annidata;*  
 ii) *se in corrispondenza ad un minimo globale  $x^* \in X^*$  esiste un indice  $\bar{k}$  tale che, se  $\mathcal{D}^{j_k}$ ,  $j_k \in I_k$ , è l'insieme per cui  $x^* \in \mathcal{D}^{j_k}$ , si ha per ogni  $k \geq \bar{k}$ ,*

$$f(x^{j_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{j_k} - l^{j_k}\| \leq f(x^*),$$

*allora ogni sequenze di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  strettamente annidata prodotta dall'algoritmo è tale che:*

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} \subseteq X^*;$$

- iii) *se per ogni minimo globale  $x^* \in X^*$  esistono una costante  $\delta > 0$  ed un indice  $\bar{k}$  tali che, se  $\mathcal{D}^{j_k}$ ,  $j_k \in I_k$ , è l'insieme per cui  $x^* \in \mathcal{D}^{j_k}$ , si ha per ogni  $k \geq \bar{k}$ ,*

$$f(x^{j_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{j_k} - l^{j_k}\| < f(x^*) - \delta \|u^{j_k} - l^{j_k}\|,$$

*allora, per ogni  $x^* \in X^*$ , l'algoritmo produce una sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  strettamente annidata tale che*

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{x^*\}.$$

**Prova.** Il punto i) segue direttamente dalle proprietà della tecnica di partizione dell'Algoritmo Direct che continua a rimanere immutata nel nuovo algoritmo.

Punto ii). Si procede assumendo, per assurdo, che l'algoritmo produca una sequenza strettamente annidata di insiemi per cui si abbia:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\},$$

con

$$f(\bar{x}) > f(x^*). \quad (5.100)$$

Sia  $K \subseteq \{1, 2, \dots\}$  il sottoinsieme degli indici delle iterazioni dell'algoritmo in cui l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  viene suddiviso. Dalle istruzioni dell'algoritmo si avrebbe che, per ogni  $k \in K$ , l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  avrebbe soddisfatto la Definizione 5.5.1 di fortemente potenzialmente ottimo e, quindi, una delle due condizioni della definizione sarebbe stata soddisfatta. Se fosse soddisfatta la condizione i) della Definizione 5.5.1 dovrebbe esistere una costante  $L^{i_k} \in (0, \bar{L})$  tale che:

$$L^{i_k} \geq 2 \left( \frac{f(x^{i_k}) - f^{min} + \varepsilon \max\{|f^{min}|, \tilde{\varepsilon}\}}{\|u^{i_k} - l^{i_k}\|} \right). \quad (5.101)$$

Poichè la sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  è strettamente annidata, la Proposizione 5.1.3 assicurerebbe che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| = 0. \quad (5.102)$$

Le due precedenti relazioni (5.101) e (5.102) implicherebbero che per valori sufficientemente grandi di  $k$  si avrebbe:

$$L^{i_k} \geq \bar{L}.$$

Perciò esisterebbe un  $\tilde{k}$  tale che per ogni  $k \in K$  e  $k \geq \tilde{k}$  dovrebbe essere soddisfatta la condizione ii) della Definizione 5.5.1. Quindi, per ogni  $k \in K$  e  $k \geq \tilde{k}$ , si avrebbe che:

$$f(x^{i_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| \leq f(x^{j_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{j_k} - l^{j_k}\|. \quad (5.103)$$

Da cui, utilizzando l'ipotesi fatta nel punto ii) della proposizione, si avrebbe che per ogni  $k \in K$  e  $k \geq \max\{\bar{k}, \tilde{k}\}$  si otterrebbe:

$$f(x^{i_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| \leq f(x^*). \quad (5.104)$$

Ricordando che la sequenza  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  è strettamente annidata si avrebbe che vale la (5.102). Quindi facendo il limite per  $k$  tendente all'infinito dei due termini della (5.104) si otterrebbe:

$$f(\bar{x}) \leq f(x^*),$$

che porterebbe ad un assurdo con la (5.100).

Punto iii). Si assuma, per assurdo, che esista un minimo globale  $x^* \in X^*$  per cui, se  $\{\mathcal{D}^{j_k}\}$  è la sequenza di insiemi tali che

$$x^* \in \mathcal{D}^{j_k},$$

per ogni  $k$ , allora la sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{j_k}\}$  non sia strettamente annidata. Quindi la Proposizione 5.1.3 assicurerebbe l'esistenza di uno scalare  $\varepsilon > 0$  e di un indice  $\bar{k}$  tali che per  $k \geq \bar{k}$  si avrebbe

$$\|u^{j_k} - l^{j_k}\| \geq \varepsilon. \quad (5.105)$$



Sia  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  una sequenza strettamente annidata di insiemi prodotta dall'algoritmo con

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\bar{x}\},$$

(ovviamente  $\bar{x} \neq x^*$ ) e sia  $K \subseteq \{1, 2, \dots\}$  il sottoinsieme degli indici delle iterazioni dell'algoritmo in cui l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  sarebbe suddiviso, cioè  $i_k \in I_k^*$ , per ogni  $k \in K$ . Quindi, per ogni  $k \in K$ , si avrebbe che l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  avrebbe soddisfatto una delle condizioni della Definizione 5.5.1. Per quanto detto nella dimostrazione del punto i) della proposizione esisterebbe un  $\tilde{k}$  tale che per ogni  $k \in K$  e  $k \geq \tilde{k}$  l'insieme  $\mathcal{D}^{i_k}$  avrebbe soddisfatto la condizione ii) della Definizione 5.5.1. Perciò, per ogni  $k \in K$  e  $k \geq \tilde{k}$ , si avrebbe che:

$$f(x^{i_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{i_k} - l^{i_k}\| \leq f(x^{j_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{j_k} - l^{j_k}\|. \quad (5.106)$$

Utilizzando l'assunzione fatta al punto ii) della proposizione, la (5.105), la (5.102) e facendo il limite per  $k$  tendente all'infinito, della precedente relazione si otterrebbe il seguente assurdo

$$f(\bar{x}) \leq f(x^*) - \delta\varepsilon.$$

□

Per questa nuova versione dell'Algoritmo di Direct è possibile definire un criterio di arresto come è indicato dal seguente risultato .

**Proposizione 5.5.3** *Sia  $\bar{L}$  la costante che compare nella definizione di sottoinsieme strettamente potenzialmente ottimo. Si consideri l'Algoritmo di Direct in cui l'insieme  $I_k^*$  è costituito dagli indici dei sottoinsiemi fortemente potenzialmente ottimi.*

*Se in corrispondenza ad un minimo globale  $x^* \in X^*$  esiste un indice  $\bar{k}$  tale che, se  $\mathcal{D}^{j_k}$ ,  $j_k \in I_k$ , è l'insieme per cui  $x^* \in \mathcal{D}^{j_k}$ , si ha per ogni  $k \geq \bar{k}$ ,*

$$f(x^{j_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{j_k} - l^{j_k}\| \leq f(x^*),$$

*allora, per  $k \geq \bar{k}$ , si ha:*

$$f(x^{h_k}) - f(x^*) \leq \frac{\bar{L}}{2} \|u^{h_k} - l^{h_k}\|,$$

*dove l'indice  $h_k$  è dato da:*

$$f(x^{h_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{h_k} - l^{h_k}\| = \min_{i \in I_k} \left\{ f(x^i) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^i - l^i\| \right\}.$$

**Prova.** Dalla assunzione della proposizione e dalla definizione dell'indice  $h_k$  si ha che, per  $k \geq \bar{k}$ ,

$$f(x^*) \geq f(x^{j_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{j_k} - l^{j_k}\| \geq f(x^{h_k}) - \frac{\bar{L}}{2} \|u^{h_k} - l^{h_k}\|,$$

da cui segue il risultato. □

## Capitolo 6

# Metodi che utilizzano Perturbazioni della Funzione Obiettivo

In questo capitolo vengono descritti alcuni esempi di classi di metodi di ottimizzazione globale che alternano minimizzazioni locali della funzione obiettivo del problema di ottimo da risolvere con minimizzazioni locali di particolari funzioni “ausiliarie” che derivano da perturbazioni della funzione obiettivo di partenza.

Per semplificare la trattazione, in questo capitolo ci si limiterà a considerare problemi di ottimizzazione globale completamente non vincolati, cioè problemi del tipo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x \in R^n. \end{aligned} \tag{6.1}$$

### 6.1 Metodi di tunneling

Le classi di metodi considerate in questo capitolo traggono ispirazione dagli algoritmi detti di *tunneling*.

Gli algoritmi di tunneling hanno la caratteristica comune che ogni loro iterazione è composta da due fasi:

*una fase di minimizzazione:* in cui la funzione obiettivo viene diminuita attraverso una minimizzazione locale;

*una fase di tunneling:* in cui si cerca di ottenere un “buon” punto di partenza per una successiva fase di minimizzazione locale.

Più formalmente un algoritmo di tunneling può essere descritto dal seguente schema

**Algoritmo di Tunneling.**

*Passo 0:* sia dato un punto  $x_0 \in R^n$ ; si pone  $k = 0$ ;

*Passo 1:* partendo da  $x_k$  si applica un algoritmo di ottimizzazione locale ottenendo un punto  $x_k^* \in R^n$ ;

*Passo 2:* si determina un punto  $x_{k+1} \neq x_k^*$  tale che

$$f(x_{k+1}) = f(x_k^*);$$

*Passo 3:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 1.

La figura 6.1 descrive graficamente le iterazioni di un metodo di tunneling.

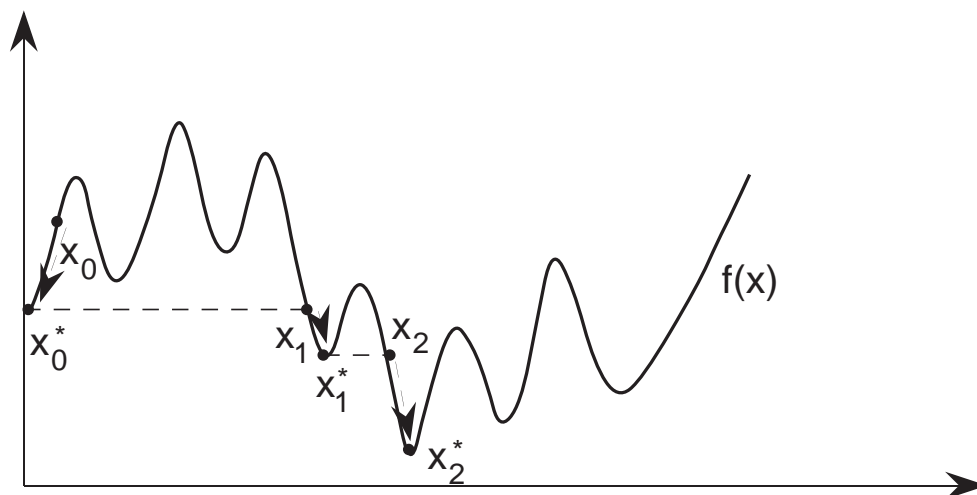


Figura 6.1: Metodo di tunneling.

In teoria i metodi di tunneling producono una sequenza di punti  $\{x_k^*\}$  tali che

$$f(x_k^*) \geq f(x_{k+1}^*)$$

e che, naturalmente, dovrebbero convergere ad un minimo globale del problema. Il punto essenziale di tali metodi è la generazione dei punti  $x_k$  che dovrebbero avvicinarsi ad un minimo globale di  $f(x)$  in maniera tale da “passare sotto” ai minimi locali meno significativi (senza tener conto di quanti sono e di dove sono). Quest’ultima proprietà è naturalmente molto significativa per problemi con molti minimi locali.

Il punto debole degli algoritmi di tunneling è costituito proprio dalla difficoltà di determinare questi punti  $x_k$ . Infatti, in questi algoritmi, per cercare di determinare un

punto  $x$  tale che  $f(x) = f(x_k^*)$  e  $x \neq x_k^*$ , si cerca di calcolare uno zero della seguente funzione:

$$T(x, x_k^*) = \frac{f(x) - f(x_k^*)}{\|x - x_k^*\|^{2\lambda}}$$

dove il parametro  $\lambda$  è scelto iterativamente in modo tale che il polo in  $x_k^*$  introdotto in  $T(x, x_k^*)$  annulli il suo zero in  $f(x) - f(x_k^*)$ , in modo da evitare che accada  $x = x_k^*$ .

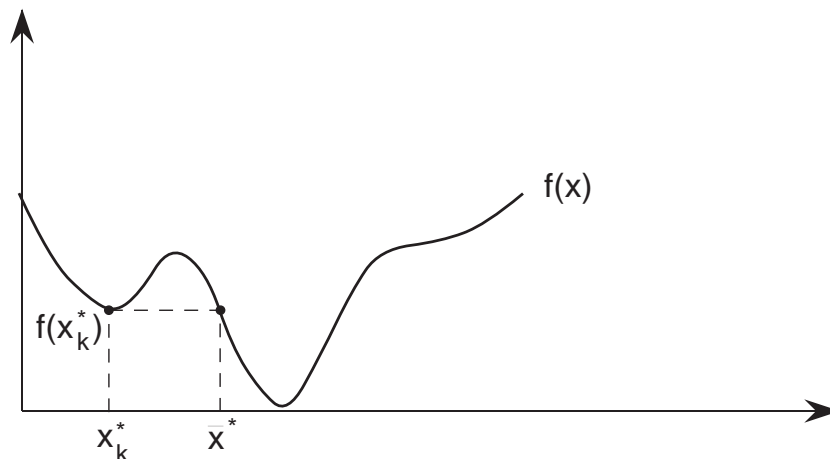


Figura 6.2: Andamento di  $f(x)$ .

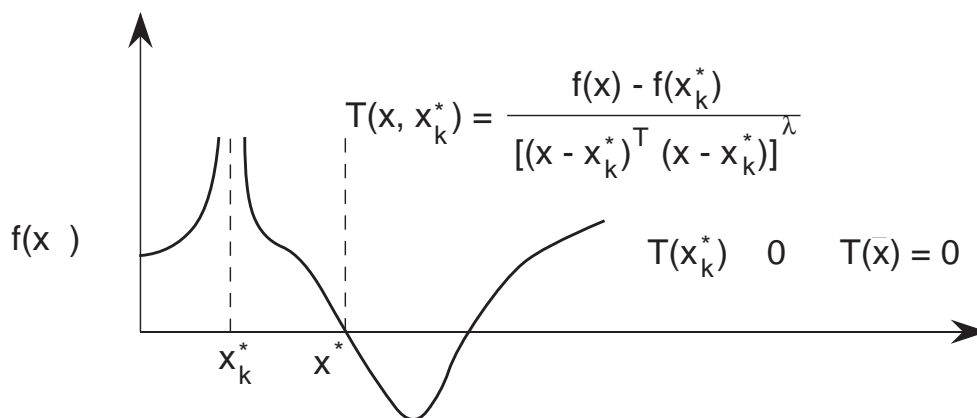


Figura 6.3: Andamento di  $T(x, x_k^*)$ .

Tuttavia, il problema di trovare uno zero di  $T(x, x_k^*)$  equivale praticamente (escluso casi particolari) ad un problema di ottimizzazione globale ( $\min |T(x, x_k^*)|^2$ ). Inoltre, nel caso in cui esistono più minimi locali  $x_i^*$ ,  $i = 1, \dots, r$ , con lo stesso valore della funzione obiettivo, la funzione  $T(x, x_k^*)$ , deve essere modificata nella seguente maniera:

$$\tilde{T}(x, x_k^*) = \frac{f(x) - f(x_k^*)}{\prod_{i=1}^r \|x - x_i^*\|^{2\lambda}}$$

in cui si sono introdotti dei nuovi poli per evitare di riottenere i punti  $x_j^*$ ,  $j = 1, \dots, r$ .

## 6.2 Funzioni di tipo “Filled”

Analogamente alle funzioni  $T(x, x_k^*)$  del precedente algoritmo, le funzioni filled sono state introdotte allo scopo di cercare di uscire dalle zone di attrazione dei minimi locali e di riuscire, attraverso minimizzazioni locali, a determinare dei nuovi punti stazionari a cui corrispondono valori della funzione obiettivo più bassi.

Un algoritmo che utilizza le funzioni filled può essere rappresentato dal seguente schema.

### Algoritmo che usa una funzione filled.

*Passo 0:* sia dato un punto  $x_0 \in R^n$ ; si pone  $k = 0$ ;

*Passo 1:* partendo da  $x_k$  si applica un algoritmo di ottimizzazione locale ottenendo un punto  $x_k^* \in R^n$ ;

*Passo 2:* utilizzando  $x_k^*$  si definisce una funzione filled e si applica un algoritmo di ottimizzazione locale a questa nuova funzione  $U_k(x)$  arrestandolo appena si ottiene un punto  $x_{k+1} \neq x_k^*$  tale che

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k^*);$$

*Passo 3:* si pone  $k = k + 1$  e si ritorna al Passo 1.

Determinato, ad una certa iterazione  $k$ , un minimo locale o, più in generale, un punto stazionario  $x_k^*$ , la Proposizione 3.3.2 indica la possibilità teorica di perturbare localmente la funzione obiettivo in maniera da ottenere una nuova funzione in cui  $x_k^*$  sia un massimo locale stretto ed in cui, invece, gli altri punti stazionari rimangano inalterati. Purtroppo l'applicazione diretta della Proposizione 3.3.2 è particolarmente difficile per la necessità di evitare che i termini di perturbazione introducano dei nuovi punti stazionari o nascondano i minimi globali della funzione obiettivo di partenza.

Le funzioni filled, pur traendo ispirazione dalla Proposizione 3.3.2, rinunciano ad introdurre dei termini di perturbazione locale che lasciano invariata la funzione obiettivo al di fuori di un fissato intorno. Infatti esse modificano la funzione obiettivo in maniera più complessa ed accettano il fatto che la funzione obiettivo sia perturbata su tutto l'insieme di definizione.

Le prime funzioni filled risalgono alle fine degli anni ottanta. Recentemente si è avuto un crescente interesse verso queste funzioni che ha portato alla definizione di molte nuove funzioni filled. La caratteristica comune di tutte le funzioni filled proposte è il fatto di essere composte da due termini  $\eta_k(x)$  ed  $\phi_k(x)$ . A seconda di come sono combinati questi termini si hanno le seguenti due classi di funzioni filled:

- *funzioni filled moltiplicative*

$$U_k(x) = \phi_k(x)\eta_k(x),$$

- *funzioni filled additive*

$$U_k(x) = \phi_k(x) + \eta_k(x),$$

Nel seguito ci si limiterà a considerare solamente le funzioni filled additive che sono state introdotte recentemente e che hanno mostrato di essere più efficienti dal punto di vista computazionale.

I due termini  $\eta_k(x)$  ed  $\phi_k(x)$ , al di là delle particolari espressioni, giocano sempre ruoli simili:

- la funzione del termine  $\phi_k(x)$  è quello di eliminare i punti stazionari della funzione obiettivo che corrispondono a valori della funzione più grandi di  $f(x_k^*)$ ;
- la funzione del termine  $\eta_k(x)$  è quello di permettere che il punto  $x_k^*$  possa essere utilizzato come punto di partenza di una minimizzazione locale della funzione filled.

Il termine  $\phi_k(x)$  può dipendere da uno o più parametri e, come detto, cerca di eliminare i punti stazionari della funzione  $f(x)$  che hanno valore della funzione obiettivo più alto o uguale di  $f(x_k^*)$ . Questo fatto, se unito alla garanzia che la funzione filled ha un minimo globale, assicura che un algoritmo di minimizzazione locale è in grado di determinare un punto stazionario della funzione filled in cui il valore della funzione obiettivo è più basso di  $f(x_k^*)$ .

Una scelta molto semplice e, relativamente intuitiva, è la seguente:

$$\phi_k(x) = \tau \min\{0, f(x) - f(x_k^*) + \varrho\}^3, \quad (6.2)$$

dove  $\varrho > 0$  e  $\tau > 0$  sono parametri da scegliere. Tale termine è nullo in tutti i punti  $x$  in cui  $f(x) \geq f(x_k^*) - \varrho$ , mentre negli altri punti assume valori decrescenti all'aumentare del valore del parametro  $\tau$ . Nella figura (6.4) è riportato un esempio di una funzione obiettivo e della corrispondente funzione  $\phi_k(x)$ .

Un'altra scelta proposta per il termine  $\phi_k(x)$  è la seguente:

$$\phi_k(x) = 1 - \exp(-\tau(f(x) - f(x_k^*) + \varrho)), \quad (6.3)$$

dove, di nuovo,  $\varrho > 0$  e  $\tau > 0$  sono parametri da scegliere. Al crescere del valore del parametro  $\tau$  questo termine tende ad assumere valori pari ad uno in punti in cui  $f(x) \geq f(x_k^*) - \varrho$  mentre tende ad assumere valori sempre più decrescenti in punti in cui  $f(x) < f(x_k^*) - \varrho$ .

L'altro termine  $\eta_k(x)$ , che compare nella struttura di una funzione filled, ha il ruolo di assicurare che il vettore  $x_k^*$  non sia un punto stazionario della funzione filled oppure sia un massimo locale stretto in modo da poter utilizzare un algoritmo di minimizzazione locale per ottenere un punto stazionario in cui la funzione filled assume un valore più basso rispetto a quello che aveva in  $x_k^*$ .

Questa proprietà può essere garantita adottando due differenti strategie per scegliere la struttura della funzione  $\eta_k(x)$ . Queste due strategie danno luogo a due differenti classi di funzioni filled:

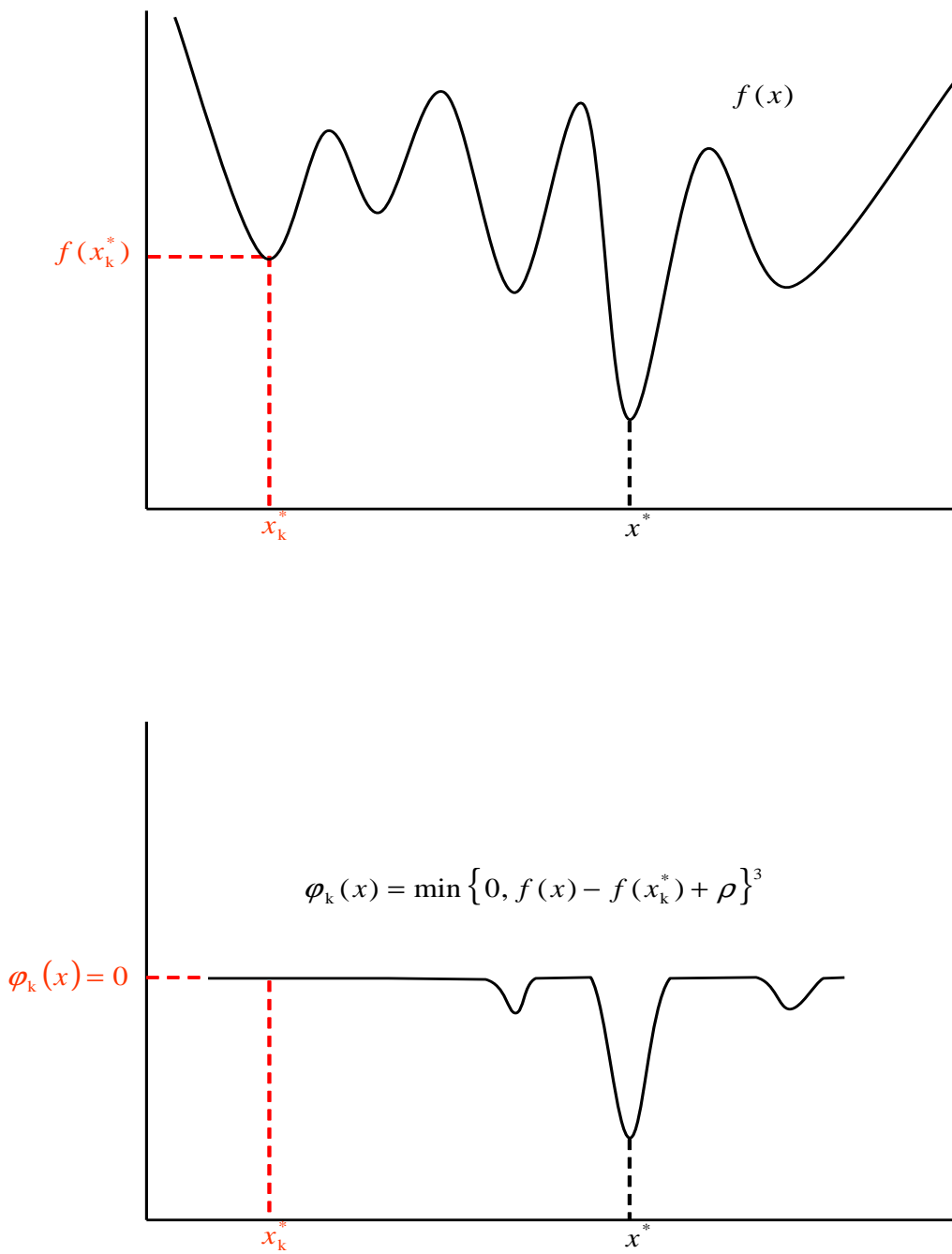


Figura 6.4: Esempio di una funzione obiettivo e della corrispondente funzione  $\phi_k(x) = \min\{0, \tau(f(x) - f(x_k^*) + \varrho)\}^3$ .

- le funzioni filled di tipo 1, in cui il termine  $\eta_k(x)$  cerca di garantire che, attraverso una minimizzazione locale, si possa ottenere un significativo spostamento dal punto  $x_k^*$ ;
- le funzioni filled di tipo 2, in cui il termine  $\eta_k(x)$  cerca di assicurare una “buona struttura” alla funzione filled.

### 6.2.1 Funzioni filled di tipo 1

La maggior parte delle funzioni filled che appartengono a questa classe utilizzano un termine  $\eta_k(x)$  che trasforma il punto stazionario  $x_k^*$  in un massimo locale della funzione filled stessa. Una scelta molto utilizzata per la funzione  $\eta_k(x)$  è la seguente:

$$\eta_k(x) = \exp\left(-\frac{\|x - x_k^*\|^2}{\gamma^2}\right), \quad (6.4)$$

dove  $\gamma > 0$  è una fissata costante.

Utilizzando come  $\phi_k(x)$  e  $\eta_k(x)$  le espressioni date da (6.2) e (da 6.4) si ottiene la seguente funzione filled additiva:

$$Q(x; \tau, \varrho) = \exp\left(-\frac{\|x - x_k\|^2}{\gamma^2}\right) + \min\{0, \tau(f(x) - f(x_k^*) + \varrho)\}^3. \quad (6.5)$$

In figura (6.5) è descritto un esempio di una funzione obiettivo e della corrispondente funzione  $Q_k(x)$ .

La prossima proposizione descrive le proprietà teoriche di una classe di funzioni filled di tipo 1 che hanno in comune il fatto di utilizzare come termine  $\eta(x)$  la funzione (6.4). Le particolari funzioni filled di questa classe si differenziano nella scelta del termine  $\phi_k(x)$  ed la proposizione seguente identifica le proprietà generali che questo termine deve soddisfare per garantire interessanti proprietà teoriche alla risultante funzione filled (nella proposizione si usa la seguente notazione  $\dot{\phi}(t) = d\phi(t)/dt$ ).

**Proposizione 6.2.1** *Sia la funzione  $f$  due volte continuamente differenziabile su  $R^n$  e sia dato un punto  $x_0 \in R^n$  tale che l'insieme*

$$\mathcal{L}_f(x_0) = \{x \in R^n : f(x) \leq f(x_0)\}$$

*sia compatto. Sia  $\phi : R \rightarrow R$  una funzione due volte continuamente differenziabile e tale che:*

- $\phi(t) \geq 0$ , per ogni  $t > 0$ ;
- $|\dot{\phi}(t)|$  è monotonicamente decrescente per valori positivi di  $t$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} t|\dot{\phi}(t)| = 0$ ;
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = -\infty$ .



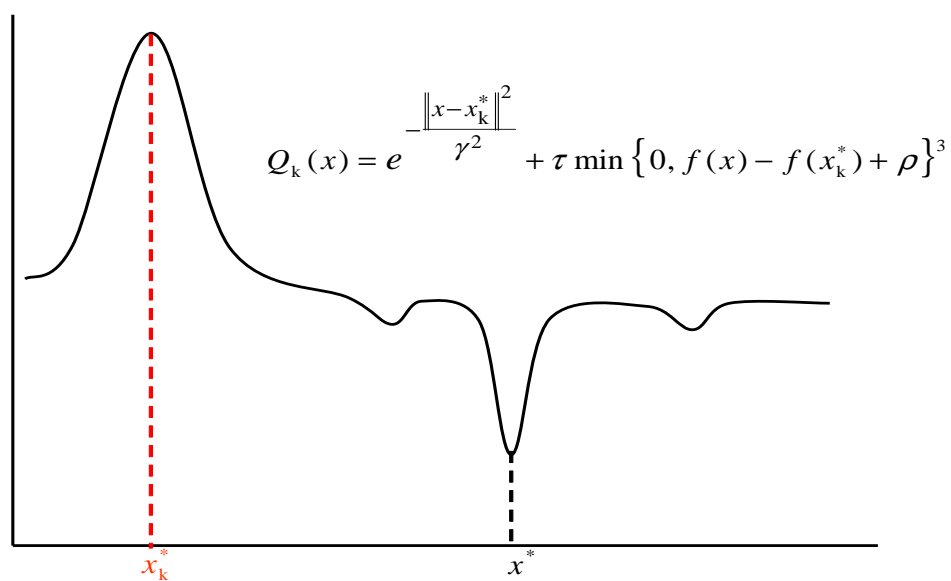
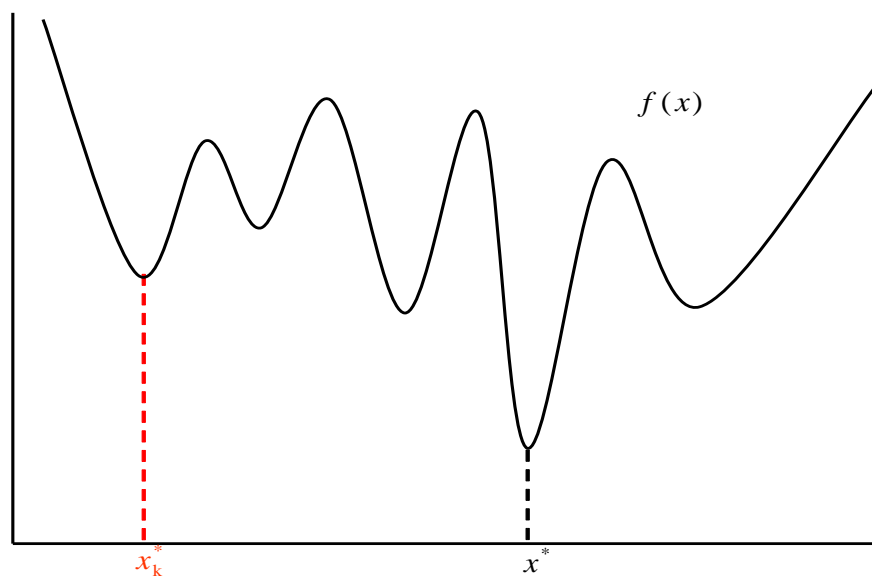


Figura 6.5: Esempio di una funzione obiettivo e della corrispondente funzione  $Q_k(x)$ .

Allora, per ogni punto stazionario  $x_k^*$  di  $f(x)$  in  $\mathcal{L}_f(x_0)$  e per ogni  $\varrho > 0$ , esiste un valore  $\bar{\tau} > 0$  tale che, per ogni  $\tau \geq \bar{\tau}$ , la funzione filled definita da

$$Q_k(x; \tau, \varrho) = \exp\left(-\frac{\|x - x_k^*\|^2}{\gamma^2}\right) + \phi(\tau(f(x) - f(x_k^*) + \varrho)), \quad (6.6)$$

dove  $\gamma > 0$  è una costante, ha le seguenti proprietà:

- (i) il punto  $x_k^*$  è un massimo locale isolato della funzione filled  $Q_k(x; \tau, \varrho)$ ;
- (ii)  $Q_k(x; \tau, \varrho)$  non ha punti stazionari non vincolati in  $\{x \in \mathcal{L}_f(x_0) : f(x) \geq f(x_k^*)\}$  eccetto  $x_k^*$ ;
- (iii) se  $x_k^*$  non è un minimo globale di  $f(x)$  e  $\varrho$  soddisfa la condizione

$$0 < \varrho < f(x_k^*) - f^*, \quad (6.7)$$

dove  $f^*$  è il valore ottimo di  $f(x)$ , allora tutti i minimi globali  $\tilde{x}$  della funzione filled  $Q_k(x; \tau, \varrho)$  su  $\mathcal{L}_f(x_0)$  sono punti stazionari non vincolati ed appartengono alla regione  $\{x \in \mathcal{L}_f(x_0) : f(x) < f(x_k^*)\}$ .

**Prova.** Prima di tutto si può notare che il gradiente di  $Q_k(x; \tau, \varrho)$  ha la seguente espressione:

$$\nabla Q_k(x; \tau, \varrho) = -2\frac{(x - x_k^*)}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{\|x - x_k^*\|^2}{\gamma^2}\right) + \tau \nabla f(x) \dot{\phi}(\tau(f(x) - f(x_k^*) + \varrho)). \quad (6.8)$$

Punto (i). Poichè il punto  $x_k^*$  è un punto stazionario di  $f(x)$  la (6.8) implica che

$$\nabla Q_k(x_k^*, \tau, \varrho) = 0,$$

e quindi  $x_k^*$  è un punto stazionario di  $Q_k(x; \tau, \varrho)$ . Inoltre, si ha

$$\nabla^2 Q_k(x_k^*, \tau, \varrho) = -\frac{2}{\gamma^2} I + \tau \nabla^2 f(x_k^*) \dot{\phi}(\tau \varrho)$$

da cui segue che per ogni  $y \in \mathbb{R}^n$

$$y^T \nabla^2 Q_k(x_k^*, \tau, \varrho) y = y^T \left( -\frac{2}{\gamma^2} I + \tau \nabla^2 f(x_k^*) \dot{\phi}(\tau \varrho) \right) y \leq \left( -\frac{2}{\gamma^2} + \tau \lambda_{\max} |\dot{\phi}(\tau \varrho)| \right) \|y\|^2,$$

dove  $\lambda_{\max} = \max_{x \in \mathcal{L}_f(x_k^*)} \lambda(\nabla^2 f(x_k^*))$ , che implica, insieme alla proprietà (b), l'esistenza di un valore  $\tau_1 > 0$  tale che, per tutti  $\tau \geq \tau_1$ , la matrice Hessiana  $\nabla^2 Q_k(x_k^*, \tau, \varrho)$  è definita negativa. Perciò il punto  $x_k^*$  è un massimo locale isolato di  $Q_k(x; \tau, \varrho)$  per tutti  $\tau \geq \tau_1$ .

Punto (ii). Si supponga, per assurdo, che esista un punto stazionario nonvincolato  $\hat{x} \in \mathcal{L}_f(x_0)$  di  $Q_k(x; \tau, \varrho)$  tale che  $\hat{x} \neq x_k^*$  e  $f(\hat{x}) \geq f(x_k^*)$ . Ricordando l'espressione (6.8) del gradiente di  $Q_k(x; \tau, \varrho)$ , in tale punto dovrebbe essere soddisfatta la seguente uguaglianza:

$$2\frac{\|\hat{x} - x_k^*\|}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{\|\hat{x} - x_k^*\|^2}{\gamma^2}\right) = \tau \|\nabla f(\hat{x})\| |\dot{\phi}(\tau(f(\hat{x}) - f(x_k^*) + \varrho))|. \quad (6.9)$$

Il punto (i) implica l'esistenza di un  $\epsilon > 0$  tale che  $\|\hat{x} - x_k^*\| > \epsilon$ . Dalla compattezza di  $\mathcal{L}_f(x_0)$  segue che esistono due costanti positive  $\sigma_1$  ed  $\sigma_2$  tali che  $\|x - x_k^*\| \leq \sigma_1$  e  $\|\nabla f(x)\| \leq \sigma_2$  per tutti  $x \in \mathcal{L}_f(x_0)$ . Perciò (6.9) e proprietà (b) implicherebbero

$$2\frac{\epsilon}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{\sigma_1^2}{\gamma^2}\right) \leq 2\frac{\|\hat{x} - x_k^*\|}{\gamma^2} \exp\left(-\frac{\|\hat{x} - x_k^*\|^2}{\gamma^2}\right) \quad (6.10)$$

e

$$\tau\|\nabla f(\hat{x})\| |\dot{\phi}(\tau(f(\hat{x}) - f(x_k^*) + \varrho))| \leq \tau\sigma_2|\dot{\phi}(\tau\varrho)|. \quad (6.11)$$

Quindi le (6.10),(6.11) e la proprietà (b) implicherebbero l'esistenza di un  $\tau_2 \geq \tau_1$  tale che per tutti  $\tau \geq \tau_2$  la condizione (6.9) non sarebbe vera.

Punto (iii). La compattezza di  $\mathcal{L}_f(x_0)$  implica l'esistenza di un minimo globale  $\tilde{x} \in \mathcal{L}_f(x_0)$  di  $Q_k(x; \tau, \varrho)$ . Per ogni  $\hat{x} \in \partial\mathcal{L}_f(x_0)$  si ha che  $f(\hat{x}) \geq f(x_0) \geq f(x_k^*)$ . Allora dalla proprietà (a) si ottiene che

$$Q_k(\hat{x}, \tau, \varrho) = \exp\left(-\frac{\|\hat{x} - x_k^*\|^2}{\gamma^2}\right) + \phi(\tau(f(\hat{x}) - f(x_k^*) + \varrho)) > 0.$$

Sia  $x^*$  un minimo globale di  $f(x)$ . Allora la (6.7) e la proprietà (c) implicano che esiste un  $\tau_3$  tale che, per tutti  $\tau \geq \tau_3$ , si ha:

$$Q_k(x^*, \tau, \varrho) < 0$$

da cui si ottiene:

$$Q_k(\tilde{x}, \tau, \varrho) \leq Q_k(x^*, \tau, \varrho) < 0, \quad (6.12)$$

che implica che  $\tilde{x}$  è strettamente interno a  $\mathcal{L}_f(x_0)$ .  $\square$

Come detto, nella precedente proposizione non viene specificata una struttura particolare per la funzione  $\phi(t)$ , invece si caratterizzano delle proprietà generali che una tale funzione deve soddisfare per garantire la tesi della proposizione. Si può notare che le scelte (6.2) e (6.3) (cioè  $\phi(t) = \min\{0, t\}^3$  e  $\phi(t) = 1 - e^{-t}$ ) soddisfano le proprietà (a)-(c).

Il precedente risultato mostra che, per valori opportuni dei parametri  $\tau$  e  $\varrho$ , le funzioni filled (6.6) presentano l'interessante caratteristica di avere come unico punto stazionario nell'insieme  $\{x \in \mathcal{L}_f(x_0) : f(x) \geq f(x_k^*)\}$  il punto  $x_k^*$  che è un massimo locale isolato e che, quindi, non è un "punto di attrazione" di un algoritmo di minimizzazione locale. Mentre, se  $x_k^*$  non è un minimo globale di  $f(x)$ , gli altri punti stazionari della funzione filled appartenenti a  $\mathcal{L}_f(x_0)$  hanno valore della funzione minore di  $f(x_k^*)$ .

Dal punto di vista applicativo le funzioni filled appartenenti a questa classe presentano alcuni difetti. Il primo è costituito dall'impossibilità di dimostrare che non abbiano punti stazionari al di fuori dell'insieme  $\mathcal{L}_f(x_0)$  e che, quindi, un algoritmo di minimizzazione locale applicato a queste funzioni filled non possa essere attratto da questi punti stazionari che possono avere valori della funzione obiettivo più alti di  $f(x_k^*)$  (per esempio, nella figura (6.6) si indentifica l'insieme  $\mathcal{L}_f(x_0)$  e nella figura (6.7) si indica, con le frecce, le zone in cui una minimizzazione locale potrebbe essere attratta). L'altro

pesante difetto è costituito dal fatto che hanno insiemi di livello che non sono compatti (si può osservare il comportamento della funzione filled (6.5)) e questo inficia le proprietà teoriche e computazionali degli algoritmi di minimizzazione locale da utilizzare per minimizzarle.

### 6.2.2 Funzioni filled di tipo 2.

Le funzioni filled appartenenti a questa classe si differenziano dalle precedenti nella scelta della funzione  $\eta_k(x)$ . Infatti, come già accennato, le funzioni  $\eta_k(x)$  utilizzate in queste funzioni filled hanno anche il ruolo di garantire che le funzioni filled abbiano delle strutture che possono essere facilmente minimizzate attraverso algoritmi locali. La proprietà più importante da garantire è il fatto che le funzioni filled abbiano insiemi di livello compatti. Per riuscire ad ottenere questa proprietà si deve rinunciare al fatto che il punto  $x_k^*$  sia trasformato in un massimo, ma ci si deve accontentare di trasformarlo in un punto non stazionario della funzione filled.

Una scelta molto semplice utilizzata in questa classe di funzioni filled è la seguente:

$$\eta_k(x) = \|x - \tilde{x}\|^2, \quad (6.13)$$

dove  $\tilde{x}$  è un qualsiasi punto su  $R^n$ .

Il ruolo del termine  $\phi_k(x)$  per queste funzioni filled è lo stesso delle funzioni filled considerate precedentemente. In particolare una funzione filled additiva appartenente a questa classe è la seguente

$$V_k(x; \tau, \varrho) = \|x - \tilde{x}\|^2 + \min\{0, \tau(f(x) - f(x_k^*) + \varrho)\}^3. \quad (6.14)$$

Nella figura (6.8) è descritto un esempio di costruzione della precedente funzione filled a partire da una data funzione obiettivo.

La prossima proposizione descrive le proprietà teoriche di una funzioni filled di tipo 2 che utilizzano come termine  $\eta_k(x)$  la (6.13) (nuovamente si usa la notazione  $\dot{\phi}(t) = d\phi(t)/dt$ ).

**Proposizione 6.2.2** *Sia la funzione obiettivo due volte continuamente differenziabile su  $R^n$  e sia tale che*

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = \infty. \quad (6.15)$$

*Sia  $\phi : R \rightarrow R$  una funzione una volta continuamente differenziabile e tale che:*

- (a)  $\phi(t) < 0$  per ogni  $t < 0$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(t) \geq 0$  per ogni  $t \geq 0$ ;
- (b)  $|\dot{\phi}(t)|$  è monotonicamente decrescente per valori positivi di  $t$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} t|\dot{\phi}(t)| = 0$ ;
- (c)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = B \geq 0$ ;

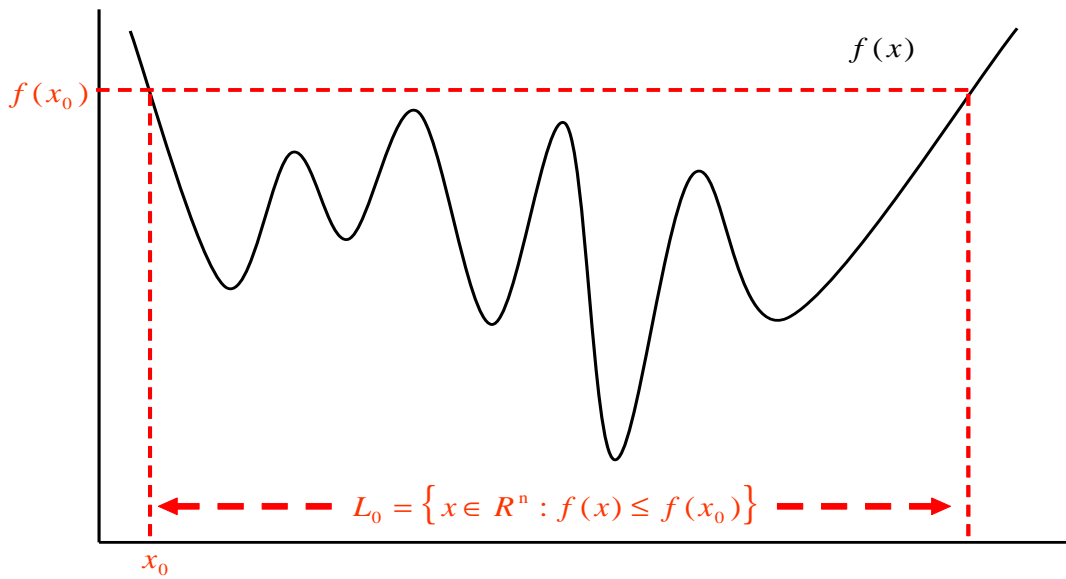


Figura 6.6: Esempio di un insieme  $\mathcal{L}_f(x_0) = \{x \in R^n : f(x) \leq f(x_0)\}$ .

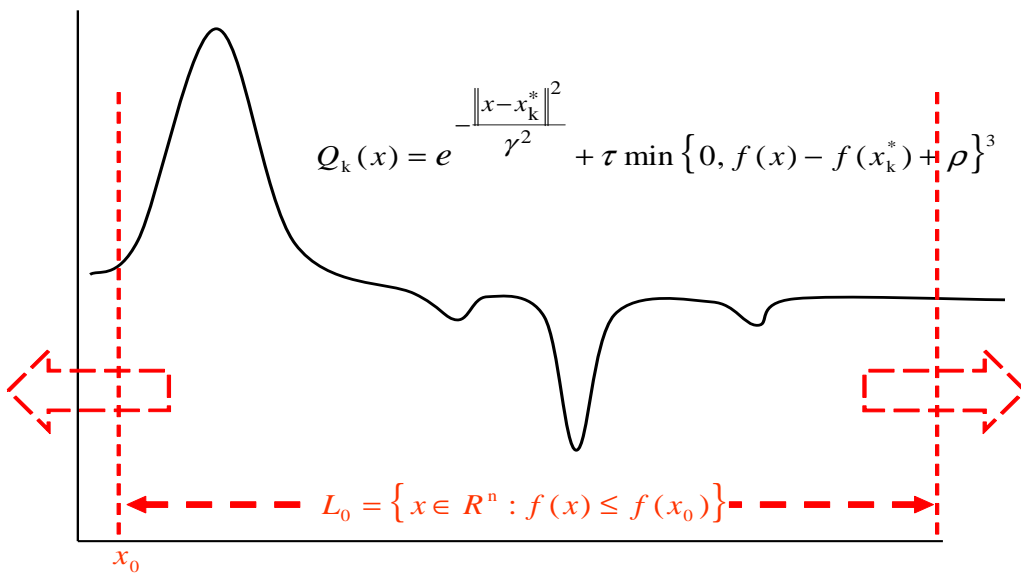


Figura 6.7: l'insieme  $\mathcal{L}_f(x_0) = \{x \in R^n : f(x) \leq f(x_0)\}$  riferito alla funzione filled  $Q_k$ .

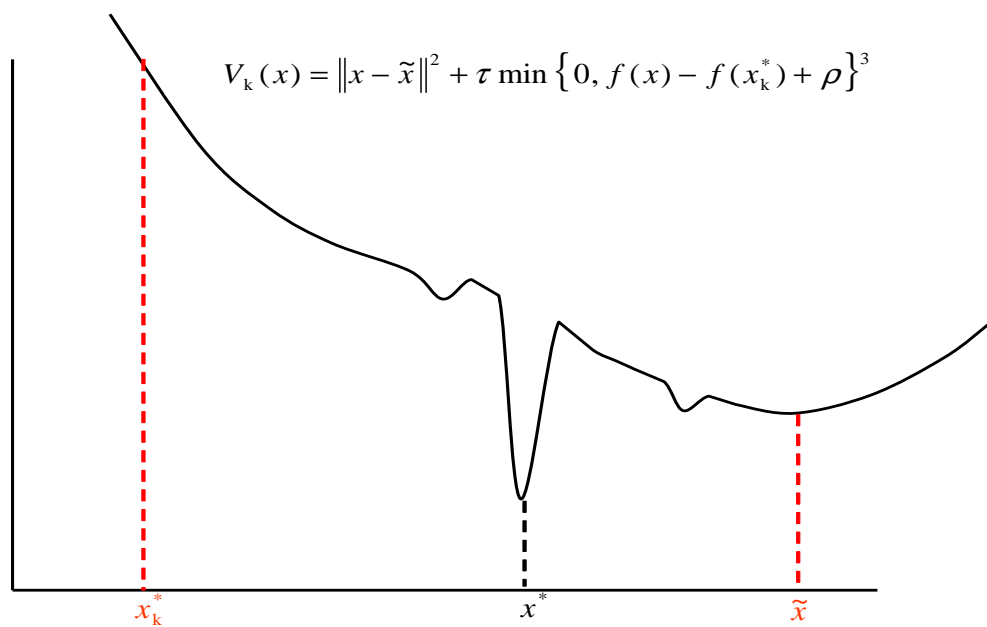
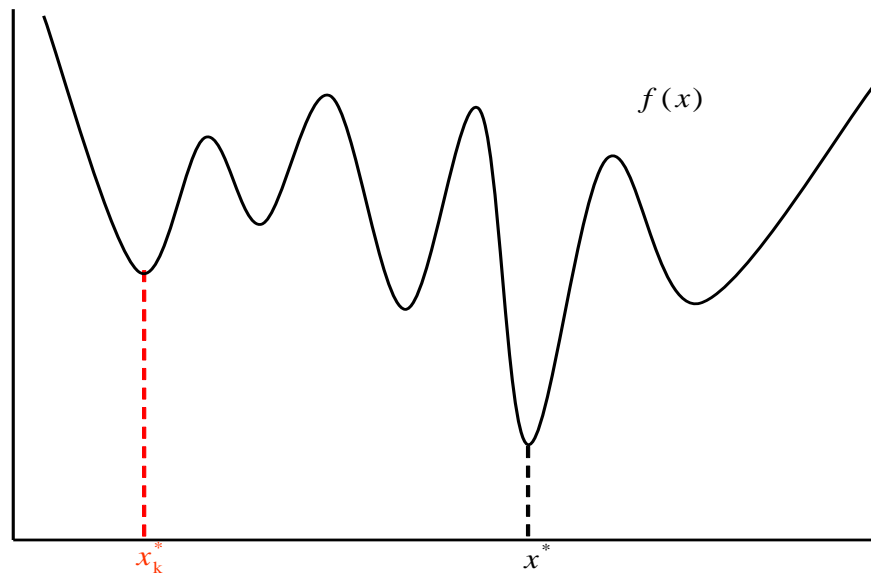


Figura 6.8: Esempio di una funzione obiettivo e della corrispondente funzione  $V_k(x)$ .

(d)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi(t) = -\infty$ .

Allora la seguente la funzione filled:

$$V_k(x; \tau, \varrho) = \|x - \tilde{x}\|^2 + \phi(\tau(f(x) - f(x_k^*) + \varrho)) \quad (6.16)$$

ha le seguenti proprietà:

(i) per ogni punto stazionario  $x_k^*$ , per ogni  $\varrho > 0$  e per ogni  $\tau > 0$  esiste un insieme compatto  $\Delta$  tale che:

$$\mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \varrho) = \{x \in R^n : V_k(x, \tau, \varrho) \leq V_k(x_0, \tau, \varrho)\} \subseteq \Delta. \quad (6.17)$$

Per ogni punto stazionario  $x_k^*$  di  $f(x)$ , per ogni  $\varrho > 0$  ed ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un valore  $\bar{\tau} > 0$  tale che, per ogni  $\tau \geq \bar{\tau}$ , si ha:

(ii) la funzione  $V_k(x; \tau, \varrho)$  non ha punti stazionari in  $\{x \in \mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \varrho) : f(x) \geq f(x_k^*)\}$  eccetto in un intorno  $\mathcal{B}(\tilde{x}; \varepsilon)$  di  $\tilde{x}$ , dove può esserci un minimo locale isolato.

(iii) se  $x_k^*$  non è un minimo globale di  $f(x)$  e  $\varrho$  soddisfa la condizione

$$0 < \varrho < f(x_k^*) - f^*, \quad (6.18)$$

dove  $f^*$  è il valore ottimo di  $f(x)$ , allora tutti i minimi globali  $\tilde{x}$  della funzione filled  $V_k(x; \tau, \varrho)$  appartengono alla regione  $\{x \in \mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \varrho) : f(x) < f(x_k^*)\}$ .

Punto i). Le proprietà (a) and (c) della funzione  $\phi$  implicano che  $\phi(t) \leq B$  per tutti  $t$  e, quindi, si ha:

$$V_k(x; \tau, \varrho) = \|x - \tilde{x}\|^2 + \phi(\tau[f(x) - f(x_k^*) + \varrho]) \leq \|x - \tilde{x}\|^2 + B. \quad (6.19)$$

Usando la (6.19), si ottiene:

$$\mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \varrho) \subseteq \{x \in R^n : \|x - \tilde{x}\|^2 + \phi(\tau[f(x) - f(x_k^*) + \varrho]) \leq \delta\} \quad (6.20)$$

where  $\delta = \|x_0 - \tilde{x}\|^2 + B$ .

Dalla definizione di  $\mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \varrho)$  si ha:

$$\mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \varrho) \subseteq \Delta_1 \cup \Delta_2 \quad (6.21)$$

dove

$$\Delta_1 = \{x \in R^n : \|x - \tilde{x}\|^2 + \phi(\tau[f(x) - f(x_k^*) + \varrho]) \leq \delta, \\ \phi(\tau[f(x) - f(x_k^*) + \varrho]) < 0\}$$

e

$$\Delta_2 = \{x \in R^n : \|x - \tilde{x}\|^2 + \phi(\tau[f(x) - f(x_k^*) + \varrho]) \leq \delta, \\ \phi(\tau[f(x) - f(x_k^*) + \varrho]) \geq 0\}.$$

Dalla proprietà (a) si ha che  $\phi(t) < 0$  implica che  $t < 0$  e, perciò

$$\Delta_1 \subseteq \{x \in R^n : f(x) \leq f(x_k^*) - \varrho\} \quad (6.22)$$

dove l'insieme  $\{x \in R^n : f(x) \leq f(x_k^*) - \varrho\}$  è compatto per l'assunzione (6.15).

Riguardo  $\Delta_2$  si può notare che

$$\Delta_2 \subseteq \{x \in R^n : \|x - \tilde{x}\|^2 \leq \delta\} \quad (6.23)$$

dove l'insieme del lato destro dell'inclusione è ovviamente compatto.

Per finire la (6.17) segue dalle (6.20), (6.21), (6.22), (6.23) ponendo

$$\Delta = \{x \in R^n : f(x) \leq f(x_k^*) - \varrho\} \cup \{x \in R^n : \|x - \tilde{x}\|^2 \leq \delta\}.$$

Punto ii). L'espressione del gradiente di  $V(x, \tau, \rho)$  è data da:

$$\nabla V(x, \tau, \rho) = 2(x - \tilde{x}) + \tau \nabla f(x) \dot{\phi}(\tau(f(x) - f(x_k^*) + \rho)). \quad (6.24)$$

Sia  $x_\tau$  un punto stazionario di  $V(x, \tau, \rho)$  che appartiene all'insieme

$$\{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}_\parallel}(x_0, \tau, \rho) : f(x) \geq f(x_k^*)\}.$$

Quindi il punto  $x_\tau$ , essendo un punto stazionario, soddisfa la relazione

$$2\|x_\tau - \tilde{x}\| = \tau \|\nabla f(x_\tau)\| |\dot{\phi}(\tau[f(x_\tau) - f(x_k^*) + \rho])|. \quad (6.25)$$

Inoltre dal fatto che  $f(x_\tau) \geq f(x_k^*)$  e dall'ipotesi b) sulla funzione  $\phi$  si ottiene:

$$\tau \|\nabla f(x_\tau)\| |\dot{\phi}(\tau[f(x_\tau) - f(x_k^*) + \rho])| \leq \tau L |\dot{\phi}(\tau\rho)| \quad (6.26)$$

dove  $L = \max_{x \in \Delta} \|\nabla f(x)\|$ .

Dalla (6.25) e dalla (6.26) si ottiene

$$\|x_\tau - \tilde{x}\| \leq \frac{\tau L |\dot{\phi}(\tau\rho)|}{2} \quad (6.27)$$

La precedente disuguaglianza e l'ipotesi b) sulla funzione  $\phi(t)$  implicano che, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste un  $\hat{\tau}$  tale che, per tutti  $\tau \geq \hat{\tau}$ , si ha

$$x_\tau \in B(\tilde{x}, \epsilon).$$

Punto iii) Sia  $x^*$  un minimo globale di  $f(x)$ . Usando la (6.18), si ha

$$f(x^*) < f(x_k^*) - \varrho.$$

Dalla ipotesi a) si ha che

$$\phi(\tau[f(x^*) - f(x_k^*) + \varrho]) < 0.$$



Dalla ipotesi d) su  $\phi(t)$  (cioè  $\phi(t) \rightarrow -\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$ ) segue che esiste un valore  $\bar{\tau} \geq \hat{\tau}$  tale che, per tutti  $\tau \geq \bar{\tau}$ , si ha

$$V(x^*, \tau, \rho) < 0.$$

Poichè  $V(x, \tau, \rho)$  è una funzione sull'insieme compatto  $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}(x_0, \tau, \rho)$ , ha un minimo globale  $\bar{x}$ , che soddisfa

$$V(\bar{x}, \tau, \rho) \leq V(x^*, \tau, \rho) < 0.$$

per tutti  $\tau \geq \bar{\tau}$ . Da questo segue che  $\varphi(\tau[f(\bar{x}) - f(x_1^*) + \rho]) < 0$  da cui, utilizzando nuovamente l'ipotesi a) fatta su  $\phi$ , si ottiene che  $f(\bar{x}) < f(x_k^*)$ , cioè che  $\bar{x}$  appartiene all'insieme.

$$\{x \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}}(x_0, \tau, \rho) : f(x) < f(x_k^*), \} \quad (6.28)$$

□

Anche in questa proposizione non è specificata l'espressione della funzione  $\phi(t)$ , in modo da caratterizzare scelte diverse per la funzione  $\phi_k$  (tra quelle che sono accettabili ci sono, di nuovo, sia  $\phi(t) = \min\{0, t\}^3$  e  $\phi(t) = 1 - e^{-t}$ ).

Si noti che il precedente risultato mostra che queste funzioni filled hanno insiemi di livello compatti. Inoltre i punti stazionari di interesse di  $V_k(x; \tau, \rho)$  appartengono all'insieme  $\mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \rho)$ . Perciò, ogni algoritmo che minimizza localmente la  $V_k(x; \tau, \rho)$  e che usa come punto di partenza un punto appartenente all'insieme  $\mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \rho)$ , non può essere attratto da punti stazionari che sono al di fuori di  $\mathcal{L}_{V_k}(x_0, \tau, \rho)$ . Quindi queste nuove funzioni filled superano molti dei problemi delle precedenti funzioni filled. Tuttavia, come mostra il punto (ii) della precedente proposizione, queste funzioni filled presentano il difetto di avere un punto di minimo locale in cui il valore della funzione obiettivo può essere più grande o uguale al valore  $f(x_k^*)$ . Sebbene si sappia dove sia questo punto stazionario "spurio" ("arbitrariamente" vicino al punto  $\bar{x}$ ) non si può evitare che "attragga" un algoritmo di minimizzazione locale. Nella figura (6.9) è descritto un esempio in cui una minimizzazione locale di  $V_k$  produce un punto stazionario in cui si ha un miglioramento della funzione obiettivo. Nella figura (6.10) è invece riportato un esempio in cui una minimizzazione locale di  $V_k$  produce un punto stazionario spurio.

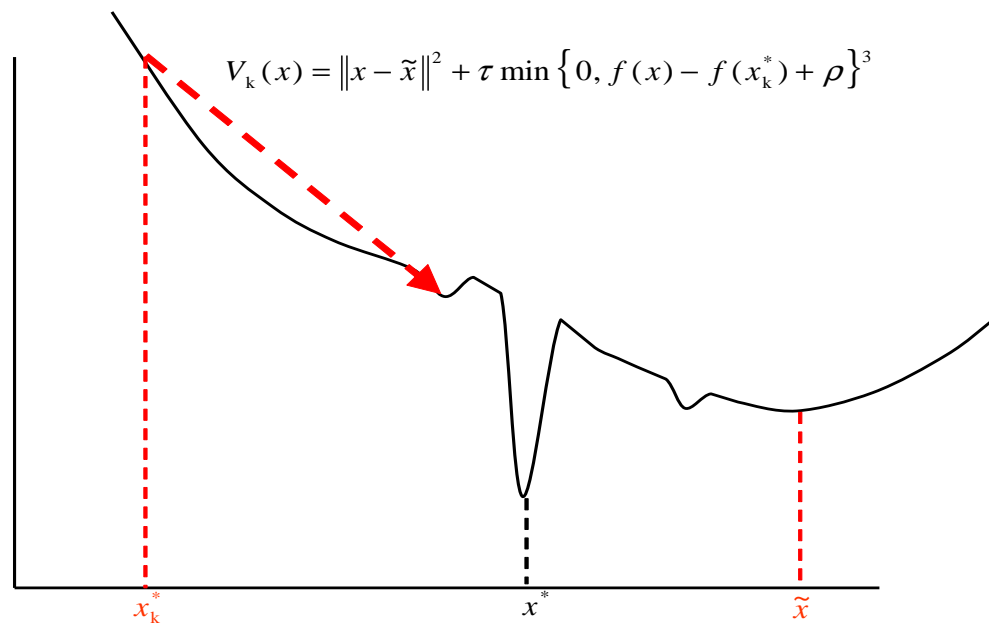


Figura 6.9: Esempio in cui una minimizzazione locale di  $V_k$  produce un punto stazionario in cui si ha un miglioramento della funzione obiettivo.

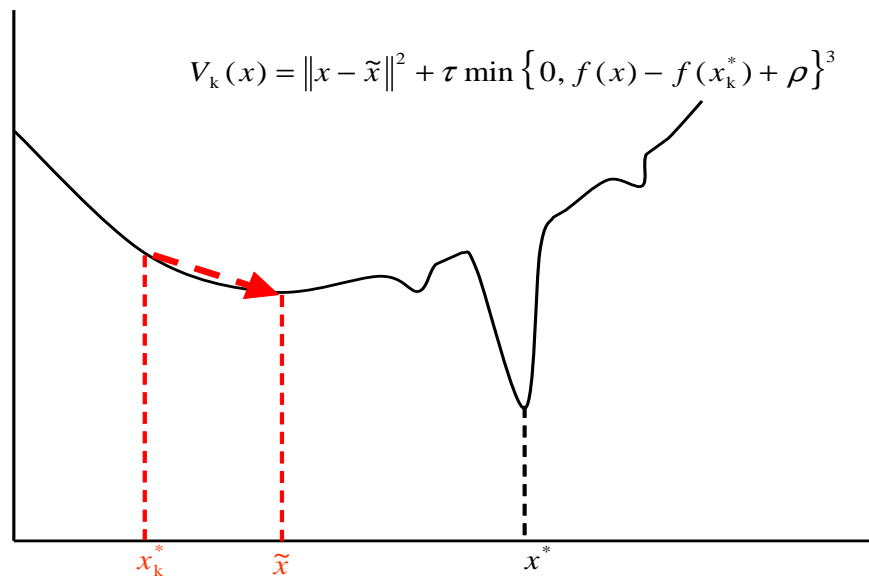


Figura 6.10: Esempio in cui una minimizzazione locale di  $V_k$  produce un punto stazionario spurio.

## Capitolo 7

# Cenni sui Metodi per Problemi di Ottimizzazione Globale Vincolata

(Il Capitolo 7 non fa parte del programma dell'esame)

In questo capitolo si considera molto brevemente ai metodi per affrontare problemi di ottimizzazione globale vincolate. Data l'estrema difficoltà di questo argomento la trattazione si limita ad accennare, in maniera molto generale, ai due approcci seguiti dalla attività di ricerca svolta in questo campo.

### 7.1 Introduzione

In questo capitolo si considera il seguente problema di ottimizzazione:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0. \end{aligned} \tag{7.1}$$

dove  $g : R^n \rightarrow R^m$  e  $h : R^n \rightarrow R^p$ .

Risolvere un problema di ottimizzazione vincolata presenta un ordine di difficoltà maggiore del risolvere un problema di ottimizzazione non vincolato. Infatti, in generale, un problema vincolato può essere visto come la somma di due sottoproblemi alquanto difficili:

- quello di determinare dei punti ammissibili;
- quello di minimizzare la funzione obiettivo.

Perciò un generico algoritmo di ottimizzazione vincolata deve essere in grado di risolvere contemporaneamente i due precedenti sottoproblemi. In pratica, ad ogni iterazione, deve riuscire a bilanciare l'esigenza di far migliorare il valore della funzione obiettivo con quella di controllare la violazione dei vincoli. Come visto precedentemente, trovare

un punto che soddisfa determinati vincoli è equivalente ad un problema di ottimizzazione globale, cioè è equivalente al problema di minimizzare una funzione che pesa la violazione dei vincoli.

Sulla base delle considerazioni precedenti, lo studio di metodi per risolvere problemi di ottimizzazione globale vincolata viene affrontato seguendo due approcci distinti:

- cercare di utilizzare i metodi e gli algoritmi proposti per problemi di ottimizzazione globale nonvincolata, questo viene fatto *trasformando* il problema originale vincolato in una *sequenza* di problemi *non vincolati* oppure in un *singolo* problema *non vincolato*;
- cercare di definire dei nuovi algoritmi che cerchino di affrontare *la caratteristica* di un problema vincolato di essere *la somma di due problemi globali*.

Nella prossima Sezione 7.2 si considera molto brevemente il primo dei due approcci, richiamando le varie tecniche penalizzazione proposte in letteratura e le loro possibili utilizzazioni nel campo dell'ottimizzazione globale vincolata.

Nella sezione 7.3 si descrive un recente esempio di un algoritmo di ottimizzazione globale vincolata che segue il secondo approccio indicato.

## 7.2 Tecniche di Penalizzazione per Problemi di Ottimizzazione Globale Vincolata.

Un modo per affrontare un problema di ottimizzazione vincolata è quello di cercare di trasformarlo nella *minimizzazione non vincolata* di una particolare funzione detta normalmente *funzione di penalità* o *funzione di merito*. In generale le funzioni di penalità vengono costruite aggiungendo alla funzione obiettivo un termine che *penalizza* la violazione dei vincoli. In letteratura sono state proposte numerose funzioni di merito che si differenziano tra di loro nel modo di penalizzare la violazione dei vincoli. Tali differenze si riflettono nelle proprietà teoriche che le varie funzioni di penalità presentano.

Nel seguito si descriveranno brevemente alcune funzioni di penalità che non richiedono la conoscenza di un punto strettamente interno all'insieme ammissibile o la possibilità di sfruttare qualche particolarità della sua struttura.

### Funzioni di penalità sequenziali esterne

Queste funzioni sono del tipo:

$$P_S(x; \varepsilon) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^p + \sum_{j=1}^q h_j(x)^p \right),$$

con  $p > 1$  e dove  $\varepsilon$  è un scalare positivo detto *parametro di penalità* o *coefficiente di penalità*.

Queste funzioni di penalità hanno il pregio di essere *molto semplici*. Dal punto di vista teorico si può dimostrare che, se  $x_\varepsilon$  è il minimo di  $P_S(x; \varepsilon)$ , allora per valori di  $\varepsilon$  che tendono a zero si ha che i punti  $x_\varepsilon$  tendono ad una soluzione del problema vincolato. Un difetto di questa classe di funzioni di penalità è quello di essere *non esatte*, cioè non esiste nessun valore di  $\varepsilon$  per cui è possibile dimostrare che il problema vincolato di partenza è equivalente a minimizzare in maniera non vincolata una di queste funzioni  $P_S(x)$ .

### Funzioni di penalità esatte non differenziabili

Queste funzioni di merito hanno una struttura del tipo:

$$P_N(x; \varepsilon) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{j=1}^q |h_j(x)| \right).$$

Le funzioni di penalità non differenziabili sono *esatte*, in quanto, sotto opportune ipotesi, è possibile dimostrare che, per valori sufficientemente piccoli del parametro di penalità  $\varepsilon$ , ogni minimo globale (locale) del problema vincolato è un minimo globale (locale) non vincolato di  $P_N(x; \varepsilon)$  e viceversa. Inoltre, una relazione analoga vale anche tra i punti di Kuhn-Tucker del problema originale ed i punti critici della funzione non differenziabile  $P_N(x; \varepsilon)$ .

Naturamente la limitazione principale nell'utilizzazione di questa classe di funzioni di penalità risiede nella loro non differenziabilità che le rende alquanto *difficili da minimizzare*.

### Funzioni Lagrangiane aumentate

A differenza delle funzioni di merito viste precedentemente, in questa classe di funzioni l'idea è quella di trasformare un problema di minimizzazione vincolato su  $R^n$  in uno di minimizzazione non vincolato su  $R^{n+m+q}$ . In particolare la funzione di merito da minimizzare assume la struttura:

$$L_A(x, \lambda, \mu; \varepsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \max\left\{g_i(x), \frac{-\varepsilon\lambda_i}{2}\right\} + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^m \max\left\{g_i(x), \frac{-\varepsilon\lambda_i}{2}\right\}^2 + \sum_{j=1}^q h_j(x)^2 \right).$$

Sotto opportune ipotesi e per valori sufficientemente piccoli del parametro di penalità  $\varepsilon$ , si ha anche che ogni minimo globale (locale)  $x^*$  del problema vincolato è un minimo globale (locale) non vincolato della funzione  $L_A(x, \lambda^*, \mu^*; \varepsilon)$ , dove  $\lambda^*$  e  $\mu^*$  sono dei moltiplicatori di Kuhn-Tucker associati al punto  $x^*$ . Purtroppo quest'ultimo risultato non può essere applicato direttamente per trasformare il problema vincolato originale in uno vincolato perché richiederebbe la conoscenza dei moltiplicatori di Kuhn-Tucker  $\lambda^*$  e  $\mu^*$ . Tuttavia la precedente proprietà delle funzioni Lagrangiane aumentate hanno ispirato la definizione di una classe di algoritmi, detti *metodi dei moltiplicatori*, che si

basano su una sequenza di minimizzazioni, rispetto alla variabile  $x$ , di funzioni del tipo  $L_A(x, \lambda_k, \mu_k; \varepsilon_k)$ , dove le stime dei moltiplicatori  $(\lambda_k, \mu_k)$  e il parametro di penalità  $\varepsilon_k$  vengono aggiornati iterativamente secondo opportune regole.

### Funzioni di penalità esatte continuamente differenziabili

L'idea base su cui si fondano funzioni di penalità esatte continuamente differenziabili è quella di *approssimare* in una funzione Lagrangiana aumentata i moltiplicatori di Kuhn-Tucker  $(\lambda^*, \mu^*)$  attraverso delle funzioni della sola variabile  $x$ . Più precisamente la struttura base di una funzione di penalità di questo tipo è la seguente:

$$P_E(x; \varepsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \max\left\{g_i(x), \frac{-\varepsilon \lambda_i(x)}{2}\right\} + \sum_{j=1}^q \mu_j(x) h_j(x) + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^m \max\left\{g_i(x), \frac{-\varepsilon \lambda_i(x)}{2}\right\}^2 + \sum_{j=1}^q h_j(x)^2 \right).$$

dove il termine di penalità è lo stesso di quello utilizzato nella funzione Lagrangiana aumentata vista precedentemente, mentre  $\lambda(x)$  e  $\mu(x)$  sono delle particolari funzioni tali che:

- i)  $\lambda(\cdot) : R^n \rightarrow R^m$  e  $\mu(\cdot) : R^n \rightarrow R^q$ ;
- ii) se  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  è una tripla di Kuhn-Tucker allora  $\lambda(x^*) = \lambda^*$  e  $\mu(x^*) = \mu^*$ ;
- iii)  $\lambda(\cdot)$  e  $\mu(\cdot)$  sono funzioni *continuamente differenziabili*.

In letteratura tutte le funzioni che godono delle precedenti proprietà vengono dette *funzioni moltiplicatrici*.

Grazie alle proprietà delle funzioni  $\lambda(x)$  e  $\mu(x)$ , le funzioni di penalità di questa classe presentano delle buone proprietà di esattezza. Infatti, sotto opportune ipotesi e per valori sufficientemente piccoli di  $\varepsilon$ , è possibile stabilire una *corrispondenza biunivoca* tra i minimi globali (locali) e punti di Kuhn-Tucker del problema vincolato originario e i minimi globali (locali) e i punti stazionari della funzione *continuamente differenziabile*  $P_E(x; \varepsilon)$ .

### Funzioni Lagrangiane aumentate esatte

Le funzioni di penalità esatte continuamente differenziabili si basano fortemente sull'utilizzazione delle funzioni moltiplicatrici  $\lambda(x)$  e  $\mu(x)$ . Purtroppo il calcolo di tali funzioni può essere *troppo oneroso* se il numero di vincoli del problema è *grande*. Le funzioni Lagrangiane aumentate esatte permettono di trasformare un problema vincolato in uno non vincolato evitando l'utilizzazione di funzioni moltiplicatrici. Il prezzo da pagare è che il problema non vincolato da risolvere è un problema sullo *spazio esteso*  $R^{n+m+q}$ . Analogamente alle funzioni di penalità esatte continuamente differenziabili, le funzioni Lagrangiane aumentate esatte traggono ispirazione dalle funzioni Lagrangiane aumentate descritte. Infatti la forma originale di una funzione di merito di questa classe è la

seguinte:

$$\begin{aligned}
 L_E(x, \lambda, \mu; \varepsilon) = & f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \max\{g_i(x), \frac{-\varepsilon \lambda_i}{2}\} + \sum_{j=1}^q \mu_j h_j(x) \\
 & + \frac{1}{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^m \max\{g_i(x), \frac{-\varepsilon \lambda_i}{2}\}^2 + \sum_{j=1}^q h_j(x)^2 \right) \\
 & + \phi_L(x, \lambda, \mu),
 \end{aligned}$$

dove, il termine nuovo  $\phi_L$  ha le seguenti caratteristiche:

- i)  $\phi_L(x, \lambda, \mu)$  è una funzione *continuamente differenziabile* nella tripla  $(x, \lambda, \mu)$ ;
- ii) se  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  è una tripla di Kuhn-Tucker del Problema (7.1) allora

$$\phi_L(x^*, \lambda, \mu) = 0$$

*se e solamente se  $\lambda = \lambda^*$  e  $\mu = \mu^*$ .*

Quindi a differenza delle funzioni Lagrangiane aumentate, quelle esatte hanno un termine  $\phi_L$  la cui minimizzazione forza le variabili  $\lambda$  e  $\mu$  a coincidere con i moltiplicatori di Kuhn-Tucker del problema vincolato.

Le funzioni Lagrangiane esatte si possono stabilire le stesse proprietà di esattezza delle funzioni di penalità esatte continuamente differenziabili.

### Utilizzazione delle funzioni di penalità nell'ottimizzazione globale vincolata

Un approccio abbastanza diffuso per affrontare problemi di ottimizzazione globale vincolata è quello di sostituire il Problema (7.1) con la minimizzazione non vincolata di una funzione di penalità sequenziale  $P_S(x; \varepsilon)$  (con un valore del parametro di penalità sufficientemente piccolo) e di applicare un qualche algoritmo di ottimizzazione globale non vincolato a quest'ultimo problema. Come detto precedentemente i punti trovati con questa strategia possono essere solamente delle approssimazioni di minimi globali del Problema (7.1).

Dal punto di vista teorico, la determinazione dei punti di ottimo del Problema (7.1) richiede la soluzione di una sequenza di minimizzazioni globali della penalità sequenziale al diminuire del valore del parametro di penalità.

I limiti delle funzioni di penalità sequenziali possono essere superati utilizzando le funzioni di penalità esatte o le funzioni Lagrangiane aumentate esatte. Infatti, per valori sufficientemente piccoli del parametro di penalità, ogni minimo globale del Problema (7.1) coincide con un minimo globale di queste funzioni di merito e viceversa. Tuttavia una loro utilizzazione nel campo della ottimizzazione globale vincolata richiede lo studio di tecniche di aggiornamento del parametro di penalità che garantiscano che, dopo un numero finito di passi, siano in grado di trovare i valori giusti del parametro di penalità.

### 7.3 Algoritmo di Direct per Problemi di Ottimizzazione Globale Vincolata.

Come detto nella Sezione 7.1, una alternativa all'uso di tecniche di penalizzazione è quello di cercare di estendere qualche metodologia proposta per i problemi di ottimizzazione globale nonvincolata a caso dei problemi vincolati.

In sezione, come esempio di questo secondo approccio per definire metodi di ottimizzazione globale vincolata, viene descritto come l'approccio su cui si basa L'Algoritmo di Direct può essere facilmente adattato al caso dei problemi vincolati.

Si considera nuovamente il seguente insieme:

$$D = \{x \in R^n : l \leq x \leq u\}.$$

Analogamente a quanto fatto precedentemente, si ipotizza che l'insieme  $\mathcal{D}$  sia sufficientemente grande da contenere al suo interno dei minimi globali del Problema 7.1.

Sotto questa ipotesi, il problema vincolato originario è equivalente ad un problema bilivello costituito da

- i) trovare tutti i minimi globali del seguente problema:

$$\min_{x \in \mathcal{D}} w(x) = \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\}^{p_1} + \sum_{j=1}^q h_j(x)^{p_2} \quad (7.2)$$

con  $p_1 > 0$  e  $p_2 > 0$ ;

- ii) determinare tra i precedenti trovati quello che minimizza la funzione  $f(x)$ .

Quindi la strategia seguita dall'Algoritmo di Direct si adatta semplicemente a questa impostazione. In una generica iterazione  $k$ -esima, data una partizione  $\{\mathcal{D}^i, i \in I_k\}$  dell'insieme  $\mathcal{D}$ , si determinano prima i sottointervalli potenzialmente ottimi per la funzione  $w(x)$  e, tra questi, si selezionano poi quelli potenzialmente ottimi per funzione  $f(x)$ .

Quindi un possibile Algoritmo di Direct per il Problema 7.1 può avere la stessa struttura di quello descritto in Sezione 5.4 per problemi non vincolati e di differenziarsi solamente nella definizione dell'insieme  $I_k^*$  degli indici degli insiemi da partizionare alla generica iterazione  $k$ -esima.

Per definire formalmente l'insieme  $I_k^*$ , si introduce l'insieme degli indici dei sottoinsiemi potenzialmente ottimi per la funzione  $w(x)$ . Cioè, data una partizione  $\{\mathcal{D}^i, i \in I_k\}$  dell'insieme  $\mathcal{D}$  e dato un parametro  $\varepsilon > 0$ , si definisce il seguente insieme di indici:

$$I_k^w = \left\{ h \in I_k : \begin{array}{l} \text{esiste } \tilde{L}^h > 0 \text{ che soddisfa:} \\ w(x^h) - \frac{\tilde{L}^h}{2} \|u^h - l^h\| \leq w(x^i) - \frac{\tilde{L}^h}{2} \|u^i - l^i\|, \text{ per tutti } i \in I_k, \\ w(x^h) - \frac{\tilde{L}^h}{2} \|u^h - l^h\| \leq w_{min} - \varepsilon |w_{min}|, \end{array} \right\} \quad (7.3)$$



Utilizzando il precedente insieme di indici si può definire il nuovo insieme  $I_k^*$ :

$$I_k^* = \left\{ h \in I_k^w : \text{esiste } \bar{L}^h > 0 \text{ che soddisfa:} \right. \\ \left. \begin{aligned} f(x^h) - \frac{\bar{L}^h}{2} \|u^h - l^h\| &\leq f(x^i) - \frac{\bar{L}^h}{2} \|u^i - l^i\|, \text{ per tutti } i \in I_k^w, \\ f(x^h) - \frac{\bar{L}^h}{2} \|u^h - l^h\| &\leq f_{min} - \varepsilon |f_{min}|, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Questa versione dell'Algoritmo di Direct per problemi vincolati ha le stesse proprietà della versione originale. Infatti, come detto, utilizza la stessa tecnica di partizione dei sotto intervalli. Riguardo la nuova definizione dell'insieme  $I_k^*$ , La seguente proposizione mostra che, in ogni iterazione, un particolare sottoinsieme con ampiezza massima risulta sempre potenzialmente ottimo e che quindi l'Assunzione 5.1.2 è soddisfatta.

**Proposizione 7.3.1** *Se  $\{I_k^*\}$  è la sequenze degli insiemi di indici dati dalla (7.4) allora l'Assunzione 5.1.2 è soddisfatta.*

**Prova.** Dato  $I_k^{max}$  dalla (5.28), si definisce il seguente insieme di indici:

$$\hat{I}_k^{max} = \{h \in I_k^{max} : w(x^h) = \min_{i \in I_k^{max}} w(x^i)\}.$$

Comunque scelto  $h \in \hat{I}_k^{max}$  basta scegliere scegliere  $\tilde{L}^h > 0$  tale che:

$$\tilde{L}^h = 2 \max \left\{ \frac{w(x^h) - w_{min} + \varepsilon |w_{min}|}{d^h}, \max_{j \in I_k \setminus \hat{I}_k^{max}} \frac{w(x^h) - w(x^j)}{d^h - d^j} \right\},$$

per ottenere che  $h \in I_k^w$  (con  $I_k^w$  dato dalla (7.3)). Dalla precedente relazione segue che:

$$I_k^w \cap I_k^{max} = \hat{I}_k^{max} \neq \emptyset.$$

Sia  $\ell \in \hat{I}_k^{max}$  e tale che  $f(x^\ell) \leq f(x^i)$ , per ogni  $i \in \hat{I}_k^{max}$ . Scegliendo  $\bar{L}^\ell > 0$  tale che:

$$\bar{L}^\ell > 2 \max \left\{ \frac{f(x^\ell) - f_{min} + \varepsilon |f_{min}|}{d^\ell}, \max_{j \in I_k^w \setminus \hat{I}_k^{max}} \frac{f(x^\ell) - f(x^j)}{d^\ell - d^j} \right\},$$

segue che  $\ell \in I_k^*$ , da cui si ha:

$$I_k^* \cap I_k^{max} \neq \emptyset.$$

□

Analogamente al caso non vincolato si può concludere con la seguente proposizione.

**Proposizione 7.3.2** *Tutte le sequenze di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  generate dall'Algoritmo Direct per problemi vincolati sono strettamente annidate. Inoltre, per ogni  $\tilde{x} \in \mathcal{D}$ , l'algoritmo genera una sequenza di insiemi  $\{\mathcal{D}^{i_k}\}$  strettamente annidata tale che*

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}^{i_k} = \{\tilde{x}\}.$$

## Capitolo 8

# Bibliografia

In questo capitolo è riportata un breve bibliografia riguardante l'ottimizzazione globale. Su questo argomento sono stati prodotti moltissimi lavori interessanti e la bibliografia riportata non ha la minima pretesa di essere esaustiva. Infatti, nel seguito, sono riportati solamente alcuni lavori in cui sono stati proposti originariamente o trattati più ampiamente alcuni risultati e metodi descritti nei capitoli precedenti. Sono anche indicati alcuni libri o lavori a carattere generale utili per integrare e/o approfondire ulteriormente l'ottimizzazione globale.

Alla fine di ogni riferimento, tra parentesi, è indicato se il lavoro citato è d'interesse generale o specifico. Nel secondo caso viene riportato in quale parte dei capitoli precedenti si trovano gli argomenti trattati dal lavoro considerato.

1. B. Addis, M. Locatelli, and F. Schoen: *Local optima smoothing for global optimization*. Optimization Methods and Software, Vol. 20, 4-5: pag. 417-437, 2005 (sottosezione 1.2.2 e capitolo 6).
2. M.M. Ali, A. Torn: *Population set-based global optimization algorithms: some modifications and numerical studies*. Computer & Operations Research, Vol. 31, pag. 1703-1725, 2004 (sottosezioni 4.3.2 e 4.3.3).
3. C. G. E. Boender, H. E. Romeijn: *Stochastic Methods*. In R. Horts, P. Pardalos (edit.): "Handbook of Global Optimization", Academic Publishers, 1995 (capitolo 4).
4. P. Brachetti, G. Di Pillo, M. De Felice Ciccoli, S. Lucidi: *A New Version of the Price's Algorithm for Global Optimization*. Journal of Global Optimization, Vol. 10, pag. 165-184, 1997 (sottosezione 4.3.1).
5. E.F. Campana, G. Liuzzi, S. Lucidi, D. Peri, V. Piccialli, A. Pinto: *New Global Optimization methods for Ship design problems*, Rapporto Tecnico INSEAN n. 2005-1, 2005 (sottosezione 6.2.1).
6. L. Cirio, S. Lucidi, F. Parasiliti, M. Villani: *Global Optimization Approach for the Synchronous Motors Design By Finite Element Analysis*. International Journal of

- Applied Electromagnetics and Mechanics, Vol. 16, pp. 13-27, 2002 (sottosezione 4.3.1).
7. L.C.W. Dixon, G.P. Szego (edit.): *Towards Global Optimization, Vol.2*. North-Holland, Amsterdam, 1978 (generale).
  8. D.M. Gay: *Computing optimal locally constrained steps*. SIAM Journal on Scientific Statistical Computations, Vol. 2, pag. 186-197, 1981 (sezione 2.3).
  9. R. Ge: *A filled function method for finding a global minimizer of a function of several variables*. Mathematical Programming, Vol.46, pag. 191-204, 1990 (sottosezione 6.2.1).
  10. A. Grosso, M. Locatelli, F. Schoen: *A population based approach for hard global optimization problems based on dissimilarity measures*. Mathematical Programming, pag. 1-24, 2006 (sottosezione 1.2.2 e sezione 4.3).
  11. J.-B. Hiriart-Urruty: *When is a point satisfying  $\nabla f(x) = 0$  a global minimum of  $f$ ?* Amer. Math. Monthly, Vol.93, pag. 556-558, 1986 (sottosezione 3.2.1).
  12. J.-B. Hiriart-Urruty: *Conditions for Global Optimality*. In R. Horts, P. Pardalos (edit.): "Handbook of Global Optimization", Academic Publishers, 1995 (sottosezione 3.2.1).
  13. J.-B. Hiriart-Urruty: *Conditions for Global Optimality 2*. Journal of Global Optimization, Vol.13, pag. 349-367, 1998 (sottosezione 3.2.1).
  14. R. Horst, P.M. Pardalos, N.V. Thoai: *Introduction to Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000 (generale)
  15. R. Horst, H. Tuy: *Global Optimization: Deterministic Approaches*. Springer-Verlag, 1990 (generale).
  16. H. X. Huang, P. M. Pardalos, Z. Xu, C. Xu: *Filled functions for unconstrained global optimization*. Journal of Global Optimization, Vol. 20, pag. 49-65, 2001 (sottosezione 6.2.2).
  17. D.R. Jones: *The DIRECT global optimization algorithm*. In C. Floudas, P. Pardalos (edit.): "Encyclopedia of Optimization", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pag. 431-440, 2001 (sezione 5.4).
  18. D.R. Jones, C.D. Perttunen, B.E. Stuckman: *Lipschitzian optimization without the lipschitz constant*. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 79, n. 1, pag. 157-181, 1993 (sezione 5.4).
  19. D.E. Kvasov, C. Pizzuti, Y.D. Sergeyev: *Local tuning and partition strategies for diagonal GO methods*. Numer. Math., Vol. 94, pag. 93-106, 2003 (sottosezione 5.3.2).

20. A. L. Levy and A. Montalvo: *The tunneling algorithm for the global minimization of functions*. SIAM Journal on Scientific Statistical Computations, Vol. 6, pag. 15-29, 1988 (sezione 6.1).
21. M. Locatelli: *Simulated annealing algorithms for continuous global optimization*. In P. Pardalos, E.H. Romeijn (ed.): "Handbook of Global Optimization, Vol. 2", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pag. 179-230, 2002 (capitolo 4).
22. M. Locatelli, F. Schoen: *Fast global optimization of Lennard-Jones clusters*. Computational Optimization and Applications, Vol. 21, pag. 55-70, 2002 (sottosezione 1.2.2).
23. S. Lucidi: *On the Role of Continuously Differentiable Exact Penalty Functions in Constrained Global Optimization*. Journal of Global Optimization, Vol. 5, pag. 49-68, 1994 (sezione 3.4).
24. S. Lucidi, V. Piccialli: *New classes of globally convexized filled functions for global optimization*. Journal of Global Optimization, Vol. 24, pag. 219-236, 2002 (sottosezione 6.2.1).
25. S. Lucidi, M. Piccioni: *Random Tunneling by Means of Acceptance-Rejection Sampling for Global Optimization*. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 62, n. 2, pag.255-279, 1989 (sezione 4.2).
26. S. Lucidi, L. Palagi, M. Roma: *On some properties of Quadratic Programs with a Convex Quadratic Constraint*. SIAM Journal on Optimization, Vol. 8, pag. 105-122, 1998 (sezione 2.3).
27. R.H. Mladineo: *An algorithm for finding the global maximum of a multimodal multivariate function*. Mathematical Programming, Vol.34, pag. 188–200, 1986 (sottosezione 5.2.1).
28. A. Molinaro, C. Pizzuti, Y.D. Sergeyev: *Acceleration Tools for Diagonal Information Global Optimization Algorithms*. Computational Optimization and Applications, Vol. 18, pag. 5-26, 2001 (sottosezione 5.3.2).
29. M. Pincus: *A close form solution of certain programming problems*. Operations Research, Vol.16, pag. 690–694, 1968 (sottosezione 3.2.2).
30. J. D. Pinter: *Global Optimization in Action. Continuous and Lipschitz Optimization: Algorithms, Implementations and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996 (generale e sezione 5.3).
31. R.Y. Rubinstein: *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley & Sons, New York, 1981 (sezioni 4.1 e 4.2).
32. F. Schoen: *Stochastic global optimization: Stopping rules*. In C. Floudas, P. Pardalos (edit.): "Encyclopedia of Optimization", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pag. 297-301, 2001 (capitolo 4).

33. F. Schoen: *Stochastic global optimization: Two-phases methods*. In C. Floudas, P. Pardalos (edit.): “Encyclopedia of Optimization”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pag. 301-305, 2001 (capitolo 4).
34. F. Schoen: *Two-phases methods for global optimization*. In P. Pardalos, E.H. Romeijn (ed.): “Handbook of Global Optimization, Vol. 2”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pag. 151-178, 2002 (capitolo 4).
35. F. Schoen: *Metodi di Ottimizzazione Globale*. In A. Agnetis, G. Di Pillo (ed.): “Modelli e Algoritmi per L’Ottimizzazione di Sistemi Complessi”, Pitagora Editrice Bologna, pag. 393-440, 2003 (generale, capitolo 2 e capitolo 4).
36. Y.D. Sergeyev: *On convergence of Divide the Best global optimization algorithms*. Optimization, Vol. 44, pag. 303-325, 1999 (sottosezione 5.3.2).
37. Y.D. Sergeyev, D. Kvasov : *Global Search Based on Efficient Diagonal Partitions and a Set of Lipschitz Constants*. SIAM Journal on Optimization, Vol. 16, 3, pag. 910-937, 2006 (sezione 5.4).
38. B. Shubert: *A sequential method seeking the global maximum of a function*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 9, pag. 379-388, 1972.(sottosezione 5.2.1).
39. F. J. Solis, R. J-B. Wets: *Minimization by Random Search Techniques*. Mathematics of Operations Research, Vol. 6, n. 1, pag. 19-30, 1981 (sezione 4.1 e sezione 4.2).
40. D.C. Sorensen: *Newton’s method with a model trust region modification*. SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 19, pag. 409-426, 1982 (sezione 2.3).
41. C. P. Stephens, W. Baritomba: *Global Optimization Requires Global Information*. Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 96, n.3, pag. 575-588, 1998 (sezione 3.3).
42. H. Tuy: *Convex Analysis and Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, 1998 (generale e sezione 3.2).
43. S. Vavasis: *Nonlinear Optimization*. Oxford Science Press, New York, 1991 (sezione 2.3).