Ottimizzazione Non Lineare

A.A. 2018-19 – 30 Gennaio 2019

prova d'esame (II parte)

1. (**16 punti**) Dato il problema

$$\begin{array}{lll} \min & x - y & \\ s.t. & y - (x-2)^3 \leq 0 & (\lambda_1) \\ & y \geq 0 & (\lambda_2) \end{array}$$

   (a) (**6 punti**) Rappresentare graficamente la regione ammissibile ed almeno due curve di livello della funzione obiettivo.

   (b) (**6 punti**) Determinare analiticamente tutti i punti di Fritz-John del problema.

   (c) (**4 punti**) Scrivere l'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata e del suo gradiente rispetto alle variabili primali (x, y) e duali (λ_1, λ_2).

2. (**16 punti**) Si consideri il problema

$$\begin{array}{ll} \min & \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 3x - y \\ s.t. & y - x - 2 \leq 0 \\ & y + x - 4 \leq 0 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0. \end{array}$$

   Sia $z_k = (1,\ 2)^\top$ la k-esima iterata.

   (a) (**8 punti**) Determinare in z_k la direzione di Frank-Wolfe d_{FW}.

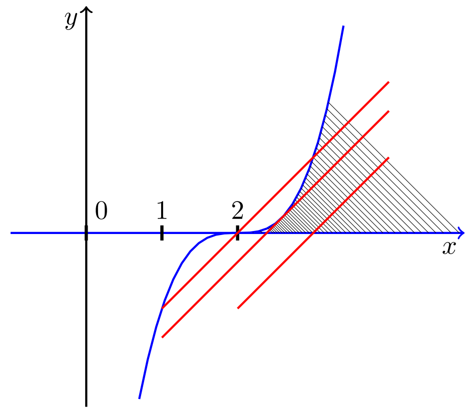
   (b) (**2 punti**) Scrivere l'espressione della funzione obiettivo ristretta al segmento $[z_k, z_k + d_{FW}]$.

   (c) (**6 punti**) Mediante una ricerca di linea di tipo Armijo con passo iniziale $\alpha = 1$ e parametri $\delta = 0.5$, $\gamma = 10^{-2}$, determinare il nuovo punto z_{k+1}.

1. (**16 punti**) Dato il problema

$$\begin{array}{ll} \min\ x-y & \\ s.t.\ y-(x-2)^3 \le 0 & (\lambda_1) \\ \quad\ y \ge 0 & (\lambda_2) \end{array}$$

(a) (**6 punti**) Rappresentare graficamente la regione ammissibile ed almeno due curve di livello della funzione obiettivo.



(b) (**6 punti**) Determinare analiticamente tutti i punti di Fritz-John del problema. Assumiamo che siano $g_1(x,y) = y-(x-2)^3$ e $g_2(x,y) = -y$.

Procediamo supponendo che $\boxed{I_0 = \emptyset}$. In questo caso, le condizioni di complementarità impongono $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Quindi, la condizione di stazionarietà diviene

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che implica $\lambda_0 = 0$. Abbiamo, dunque, ottenuto valore nullo per tutti e tre i moltiplicatori. Quindi, nell'ipotesi fatta non risulta alcun punto di F-J.

Supponiamo ora che risulti $\boxed{I_0 = \{1\}}$, cioè è attivo il solo vincolo g_1. Le condizioni di complementarità impongono, questa volta, $\lambda_2 = 0$. Quindi, la condizione di stazionarietà diviene

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -3(x-2)^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo subito che il moltiplicatore λ_0 non può assumere valore nullo, perchè in questo caso si avrebbe anche $\lambda_1 = 0$ e torneremmo ad avere valore 0 per tutti e tre i moltiplicatori. Quindi, poniamo $\lambda_0 = 1$. In questo caso, dalla seconda equazione del sistema otteniamo subito $\lambda_1 = 1$ e, riscrivendo la prima equazione del sistema,

$$1 - 3(x-2)^2 = 0.$$

Questa equazione ha soluzioni $x = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ a cui corrispondono i punti $A = (2+\sqrt{3}/3,\ (\sqrt{3}/3)^3)^\top$ e $B = (2-\sqrt{3}/3,\ -(\sqrt{3}/3)^3)^\top$. Il secondo di tali punti non è ammissibile per il problema, quindi, sotto l'ipotesi $I_0 = \{1\}$, abbiamo determinato il punto A è un punto di F-J con moltiplicatori $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$, ovvero un punto di KKT per il problema.

Supponiamo ora che risulti $\boxed{I_0 = \{2\}}$, cioè è attivo il solo vincolo g_2. Le condizioni di complementarità impongono, questa volta, $\lambda_1 = 0$. Quindi, la condizione di stazionarietà diviene

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema di sopra ammette come unica soluzione $\lambda_0 = \lambda_2 = 0$. Abbiamo, dunque, ottenuto valore nullo per tutti e tre i moltiplicatori. Quindi, nell'ipotesi fatta non risulta alcun punto di F-J.

Supponiamo, per finire, che risulti $\boxed{I_0 = \{1,2\}}$, cioè sono attivi entrambi i vincoli g_1 e g_2. Ovvero, deve valere

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = (x-2)^3 \end{cases}$$

Il sistema di sopra ammette come unica soluzione il punto $P = (2,\ 0)^\top$. La condizione di stazionarietà diviene, questa volta

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Questo sistema ammette infinite soluzioni per le quali si deve avere $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 = \lambda_2$. Quindi il punto P con moltiplicatori $\lambda_0 = 0$ e, ad esempio, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ è un punto di F-J del problema.

Avendo esaurito tutte le ipotesi riguardo alla composizione dell'insieme I_0 possiamo dire di aver determinato tutti i punti di F-J del problema in esame.

(c) (**4 punti**) Scrivere l'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata e del suo gradiente rispetto alle variabili primali (x, y) e duali (λ_1, λ_2).

$$\begin{aligned}
L_a(x, y, \lambda_1, \lambda_2; \epsilon) &= x - y + \lambda_1 \max\{y - (x-2)^3, -\epsilon\lambda_1/2\} + \lambda_2 \max\{-y, -\epsilon\lambda_2/2\} \\
&+ \frac{1}{\epsilon}\max\{y - (x-2)^3, -\epsilon\lambda_1/2\}^2 + \frac{1}{\epsilon}\max\{-y, -\epsilon\lambda_2/2\}^2 \\
\nabla_{x,y} L_a &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3(x-2)^2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\lambda_1 + \frac{2}{\epsilon}\max\{y - (x-2)^3, -\epsilon\lambda_1/2\}\right) \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \left(\lambda_2 + \frac{2}{\epsilon}\max\{-y, -\epsilon\lambda_2/2\}\right) \\
\nabla_{\lambda_1,\lambda_2} L_a &= \begin{pmatrix} \max\{y - (x-2)^3, -\epsilon\lambda_1/2\} \\ \max\{-y, -\epsilon\lambda_2/2\} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

2. (**16 punti**) Si consideri il problema

$$\begin{aligned}
\min\ & \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}y^2 - 3x - y \\
s.t.\ & y - x - 2 \le 0 \\
& y + x - 4 \le 0 \\
& x \ge 0,\ y \ge 0.
\end{aligned}$$

Sia $z_k = (1,\ 2)^\top$ la k-esima iterata.

(a) (**8 punti**) Determinare in z_k la direzione di Frank-Wolfe d_{FW}.

Il gradiente di f calcolato in z_k è il vettore $\nabla f_k = (-2,\ 1)^\top$. Quindi, la funzione obiettivo del sottoproblema di F-W è

$$f_{FW} = (-2,\ 1)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = -2x + y$$

ed il sottoproblema di F-W è

$$\begin{aligned}
\min\ & -2x + y \\
s.t.\ & y - x - 2 \le 0 \\
& y + x - 4 \le 0 \\
& x \ge 0,\ y \ge 0.
\end{aligned}$$

La soluzione ottima del problema di F-W è il punto $\tilde{z} = (4,\ 0)^\top$ a cui corrisponde la direzione $d_{FW} = (3,\ -2)^\top$.

(b) (**2 punti**) Scrivere l'espressione della funzione obiettivo ristretta al segmento $[z_k, z_k + d_{FW}]$.

I punti del segmento $[z_k, z_k + d_{FW}]$ sono

$$z(\alpha) = z_k + \alpha d_{FW} = \begin{pmatrix} 1 + 3\alpha \\ 2 - 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in [0, 1].$$

La funzione obiettivo ristretta al segmento è dunque

$$f(z(\alpha)) = \psi(\alpha) = \frac{13}{2}\alpha^2 - 8\alpha - \frac{5}{2}$$

(c) (**6 punti**) Mediante una ricerca di linea di tipo Armijo con passo iniziale $\alpha = 1$ e parametri $\delta = 0.5$, $\gamma = 10^{-2}$, determinare il nuovo punto z_{k+1}.

Nella ricerca di linea di tipo Armijo, il valore di riferimento è $\psi(0) = f(z_k) = f_k = -5/2$. Quando il passo è $\alpha = 1$, bisogna confrontare tra loro i valori

$$\psi(1) = -4, \quad \text{e} \quad \psi(0) + \gamma \nabla f_k^\top d_{FW} = -\frac{5}{2} - 8 \cdot 10^{-2}.$$

Siccome risulta $-4 < -\frac{5}{2} - 8 \cdot 10^{-2}$, il punto z_{k+1} è $z_k + d_{FW} = (4,\ 0)^\top$.