Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi[1]

Giovedì 15 Novembre 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Compass Search "debole"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $\tilde{x} \leftarrow x$

  for $i = 1, 2, \dots, n$

    if $f(\tilde{x} + \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} + \Delta e_i$, **break**

    else if $f(\tilde{x} - \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} - \Delta e_i$, **break**

    end if

  end for

  if $f(\tilde{x}) = f(x)$ **then** $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  else $x \leftarrow \tilde{x}$

  end if

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Compass Search "debole"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k+1$, $\tilde{x} \leftarrow x$

  for $i = 1, 2, \dots, n$

    if $f(\tilde{x} + \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} + \Delta e_i$

    else if $f(\tilde{x} - \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} - \Delta e_i$

    end if

  end for

  if $f(\tilde{x}) = f(x)$ **then** $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  else $x \leftarrow \tilde{x}$

  end if

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$ `maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$\quad k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

> $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
>
> **for each** $d \in D$
>
>   **if** $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
>
> **end for**

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$\quad k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

$\quad$ **for each** $d \in D$

$\quad\quad$ **if** $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

$\quad$ **end for**

$\quad$ **if** $f(y) < f(x)$ **then**

$\quad\quad x \leftarrow y$

$\quad$ **else** $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
  for each $d \in D$
    if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
  end for
  if $f(y) < f(x)$ **then**
    $x \leftarrow y$
  else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
  for each $d \in D$
    if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
  end for
  if $f(y) < f(x)$ **then**
    $x \leftarrow y$
  else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$ $\texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
for each $d \in D$
if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
end for
if $f(y) < f(x)$ **then**
$x \leftarrow y$
else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$\quad k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

> $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
>
> **for each** $d \in D$ (*exploratory moves from x*)
>
> > **if** $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
>
> **end for**

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

  for each $d \in D$ (*exploratory moves from x*)

    if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

  end for

  if $f(y) < f(x)$ **then**

  else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

  for each $d \in D$ (*exploratory moves from x*)

    if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

  end for

  if $f(y) < f(x)$ **then** (*pattern move along $y - x$*)

    $z \leftarrow y + (y - x)$

  else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

  for each $d \in D$ (*exploratory moves from x*)

    if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

  end for

  if $f(y) < f(x)$ **then** (*pattern move along* $y - x$)

    $z \leftarrow y + (y - x)$

    for each $d \in D$ (*exploratory moves from z*)

      if $f(z + \Delta d) < f(z)$ **then** $z \leftarrow z + \Delta d$

    end for

    if $f(z) < f(y)$ **then** $x \leftarrow z$ **else** $x \leftarrow y$

  else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
for each $d \in D$ (*exploratory moves from x*)
if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
end for
if $f(y) < f(x)$ **then** (*pattern move along $y - x$*)
$z \leftarrow y + (y - x)$
for each $d \in D$ (*exploratory moves from z*)
if $f(z + \Delta d) < f(z)$ **then** $z \leftarrow z + \Delta d$
end for
if $f(z) < f(y)$ **then** $x \leftarrow z$ **else** $x \leftarrow y$
else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

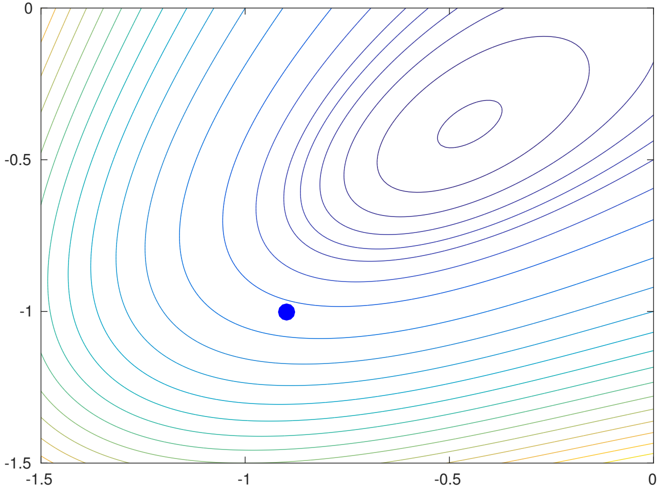
while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
  for each $d \in D$ (*exploratory moves from x*)
    if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
  end for
  if $f(y) < f(x)$ **then** (*pattern move along $y - x$*)
    $z \leftarrow y + (y - x)$
    for each $d \in D$ (*exploratory moves from z*)
      if $f(z + \Delta d) < f(z)$ **then** $z \leftarrow z + \Delta d$
    end for
    if $f(z) < f(y)$ **then** $x \leftarrow z$ **else** $x \leftarrow y$
  else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

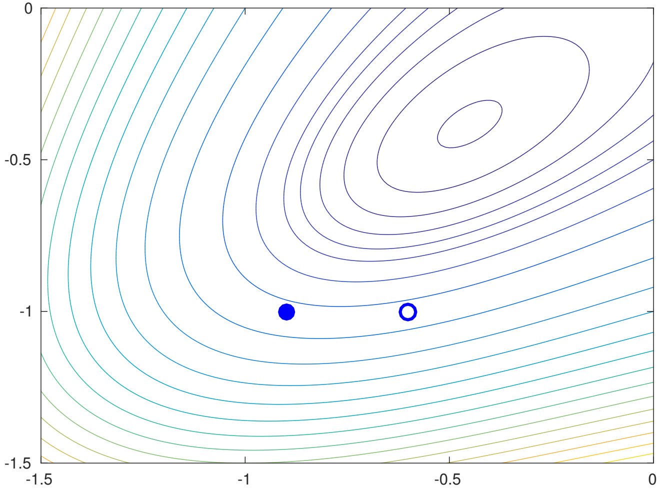
end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

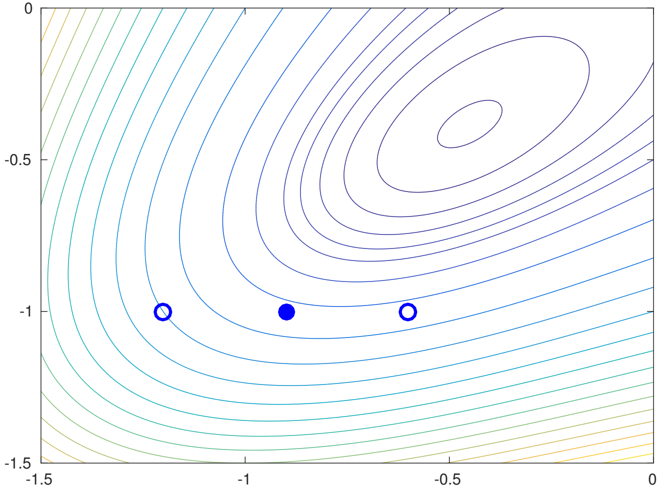
Esempio su Funzione di Broyden



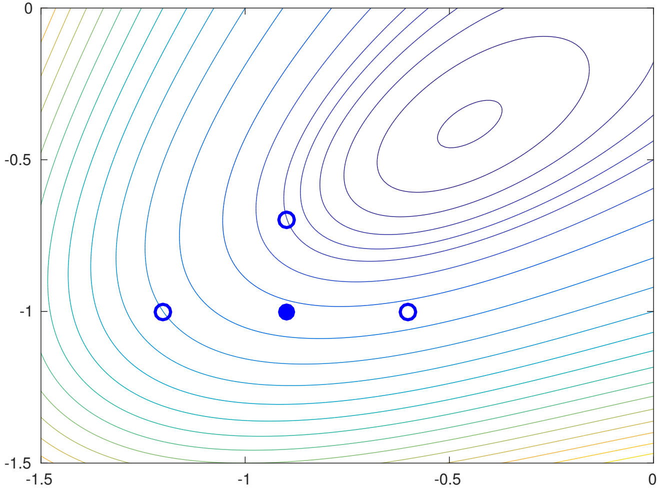
Esempio su Funzione di Broyden



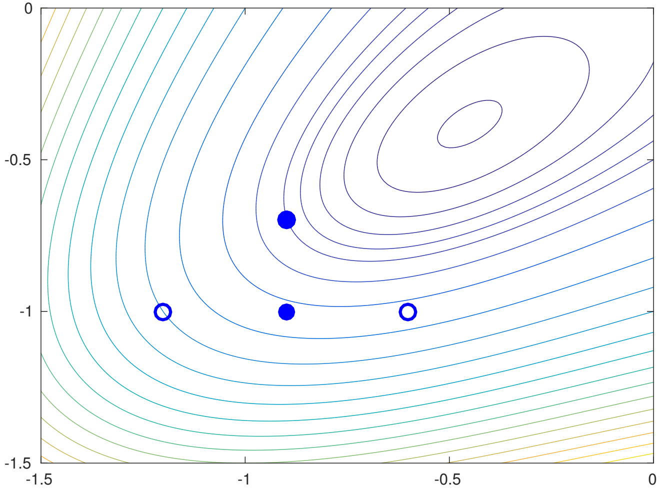
Esempio su Funzione di Broyden



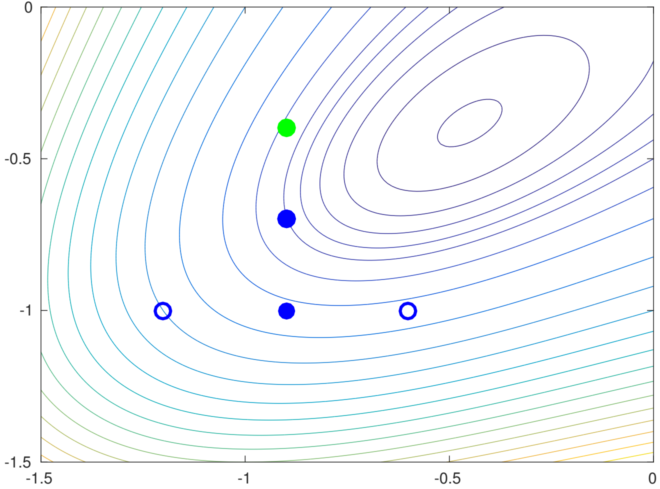
Esempio su Funzione di Broyden



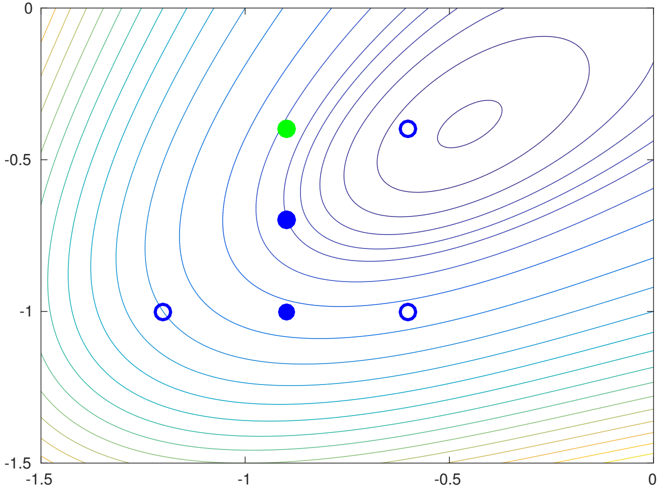
Esempio su Funzione di Broyden



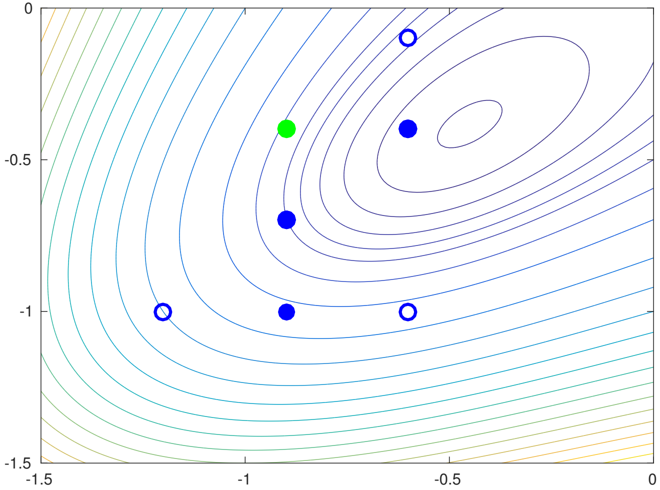
Esempio su Funzione di Broyden



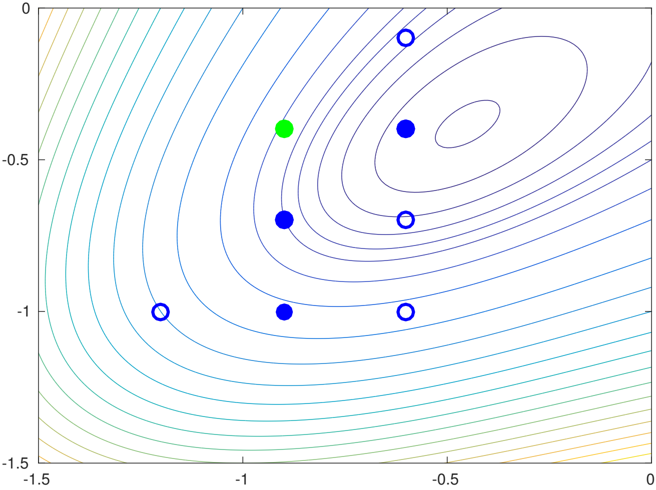
Esempio su Funzione di Broyden



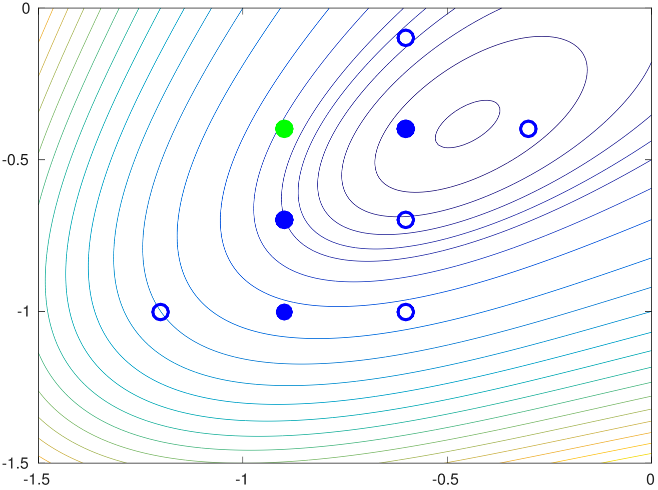
Esempio su Funzione di Broyden



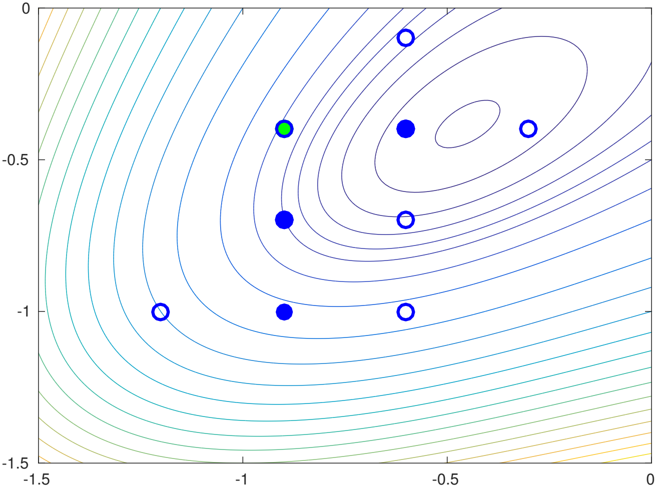
Esempio su Funzione di Broyden



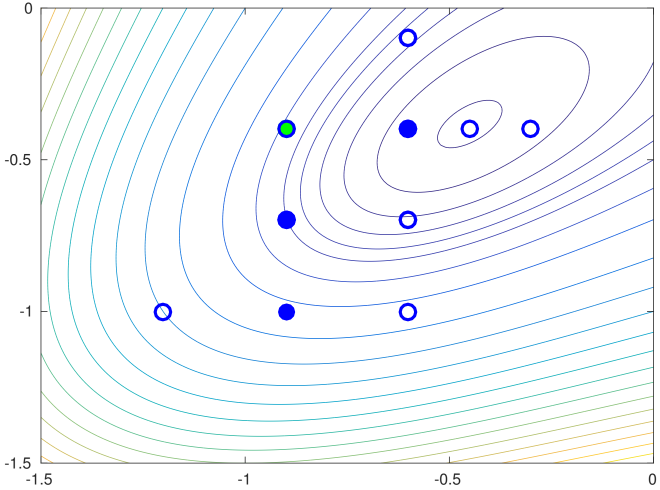
Esempio su Funzione di Broyden



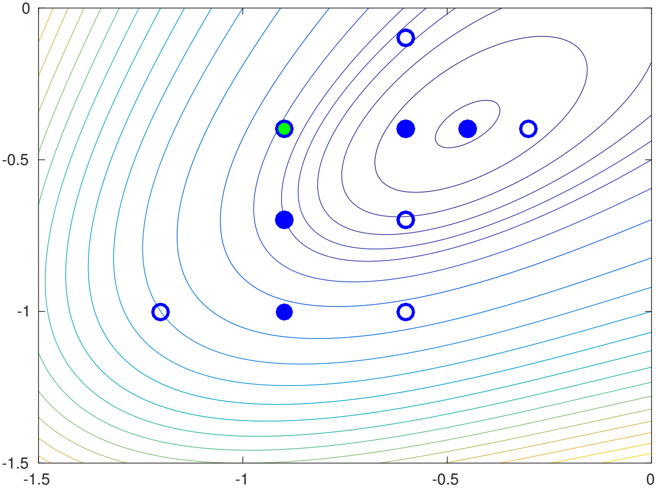
Esempio su Funzione di Broyden



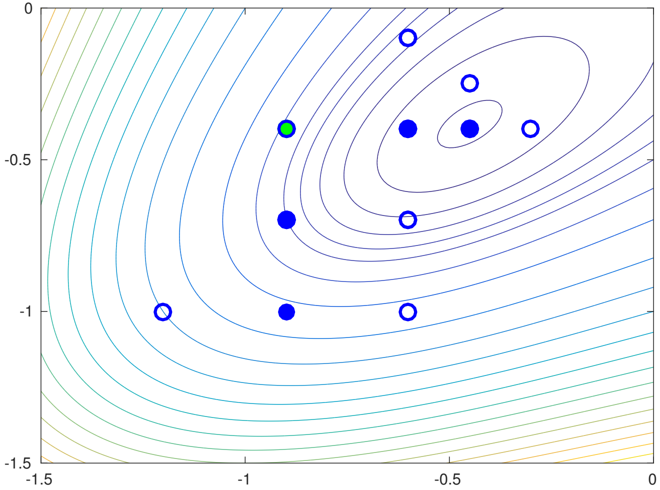
Esempio su Funzione di Broyden



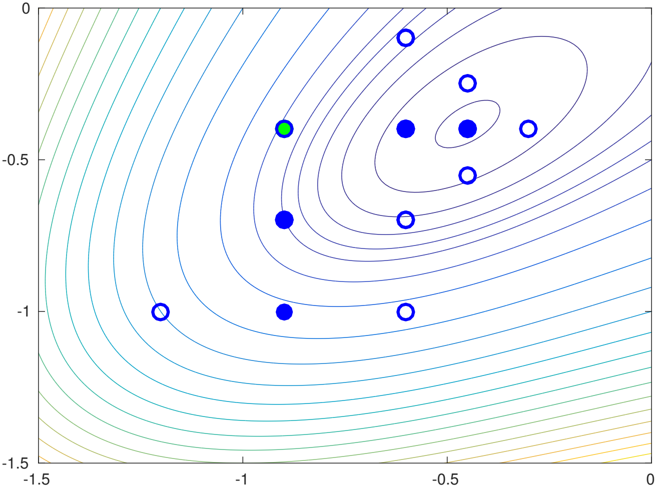
Esempio su Funzione di Broyden



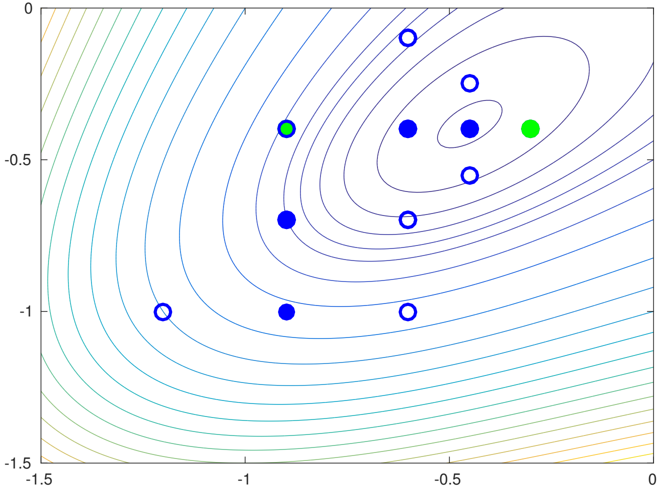
Esempio su Funzione di Broyden



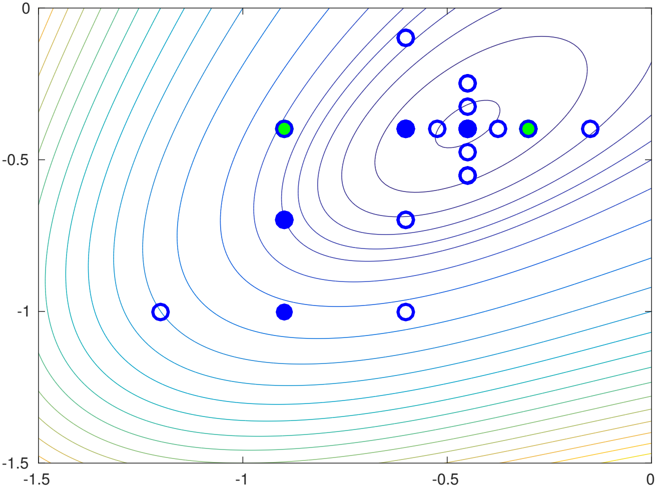
Esempio su Funzione di Broyden



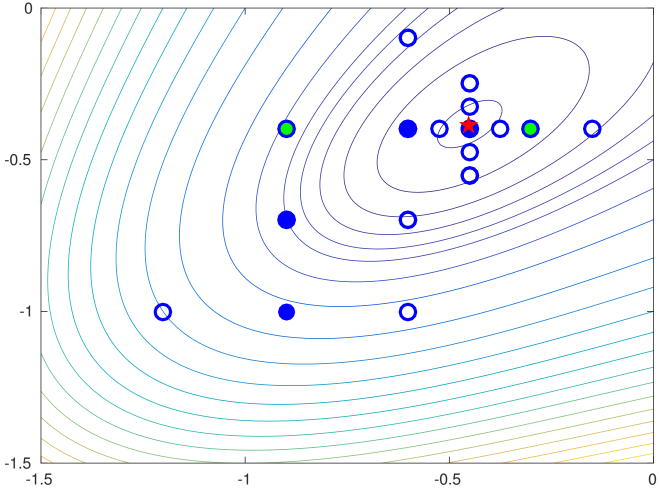
Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Convergenza di Hooke&Jeeves

Nota bene: Come per i metodi precedenti, nel metodo di H&J

- il passo è ridotto solo quando il punto corrente non cambia
- le iterate, se il passo rimane costante, appartengono ad una griglia

Non stupisce che H&J abbia le medesime proprietà teoriche e cioè

- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$
- almeno un punto limite è stazionario
  - $\nabla f(\bar{x}) = 0$
  - $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$

Convergenza di Hooke&Jeeves

Nota bene: Come per i metodi precedenti, nel metodo di H&J

- il passo è ridotto solo quando il punto corrente non cambia
- le iterate, se il passo rimane costante, appartengono ad una griglia

Non stupisce che H&J abbia le medesime proprietà teoriche e cioè

- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$
- almeno un punto limite è stazionario
  - $\nabla f(\bar{x}) = 0$
  - $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$

Convergenza di Hooke&Jeeves

Nota bene: Come per i metodi precedenti, nel metodo di H&J

- il passo è ridotto solo quando il punto corrente non cambia
- le iterate, se il passo rimane costante, appartengono ad una griglia

Non stupisce che H&J abbia le medesime proprietà teoriche e cioè

- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$
- almeno un punto limite è stazionario
  - $\nabla f(\bar{x}) = 0$
  - $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$

Testo d'esame

Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y} \; f(x,y),$$

con $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\}$.

Siano $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$, il punto ed il passo iniziali del metodo **Compass Search**.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Siano ora $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 0.5$.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Testo d'esame

Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y} \; f(x,y),$$

con $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\}$.

Siano $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$, il punto ed il passo iniziali del metodo **Compass Search**.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Siano ora $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 0.5$.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Testo d'esame

Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y} \; f(x,y),$$

con $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\}$.

Siano $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$, il punto ed il passo iniziali del metodo **Compass Search**.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Siano ora $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 0.5$.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Un metodo generale

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

if $\boxed{\exists\ y_k \text{ s.t. } f(y_k) \leq f(x_k) - \gamma\Delta_k}$ **then**

$\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

elseif $\boxed{\exists\ \bar{d} \in D \text{ s.t. } f(x_k + \Delta_k \bar{d}) \leq f(x_k) - \gamma\Delta_k^2}$ **then**

$y_k \leftarrow x_k + \Delta_k \bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

else

$y_k \leftarrow x_k$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$

endif

$\boxed{\text{Find } x_{k+1} \text{ s.t. } f(x_{k+1}) \leq f(y_k)}$

$k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: $\{x_k\}, \{\Delta_k\}$ successioni di punti e passi

Convergenza

- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$
- $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$

Un metodo generale

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

if $\boxed{\exists\ y_k \text{ s.t. } f(y_k) \leq f(x_k) - \gamma\Delta_k}$ **then**

$\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

elseif $\boxed{\exists\ \bar{d} \in D \text{ e } \alpha \geq \Delta_k \text{ s.t. } f(x_k + \alpha\bar{d}) \leq f(x_k) - \gamma\alpha^2}$

then

$y_k \leftarrow x_k + \alpha\bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \alpha$

else

$y_k \leftarrow x_k$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$

endif

$\boxed{\text{Find } x_{k+1} \text{ s.t. } f(x_{k+1}) \leq f(y_k)}$

$k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: $\{x_k\}, \{\Delta_k\}$ successioni di punti e passi

Convergenza

- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$
- $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Dato un parametro μ, definiamo

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_{n+1})$$

Il metodo usa: $-1 < \mu_{ic} < 0 < \mu_{oc} < \mu_r < \mu_e$ e

$$\begin{array}{llllll}
\text{(inner contraction)} & x^{ic} & = & x(\mu_{ic}), & f^{ic} & = & f(x^{ic}) \\
\text{(outer contraction)} & x^{oc} & = & x(\mu_{oc}), & f^{oc} & = & f(x^{oc}) \\
\text{(reflect)} & x^{r} & = & x(\mu_{r}), & f^{r} & = & f(x^{r}) \\
\text{(expand)} & x^{e} & = & x(\mu_{e}), & f^{e} & = & f(x^{e})
\end{array}$$

Il metodo di Nelder-Mead

Dato un parametro μ, definiamo

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_{n+1})$$

Il metodo usa: $-1 < \mu_{ic} < 0 < \mu_{oc} < \mu_r < \mu_e$ e

$$\begin{array}{llllll}
\text{(inner contraction)} & x^{ic} & = & x(\mu_{ic}), & f^{ic} & = & f(x^{ic}) \\
\text{(outer contraction)} & x^{oc} & = & x(\mu_{oc}), & f^{oc} & = & f(x^{oc}) \\
\text{(reflect)} & x^{r} & = & x(\mu_{r}), & f^{r} & = & f(x^{r}) \\
\text{(expand)} & x^{e} & = & x(\mu_{e}), & f^{e} & = & f(x^{e})
\end{array}$$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0,1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \le f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \le f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \le f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \le f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0,1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0,1)$

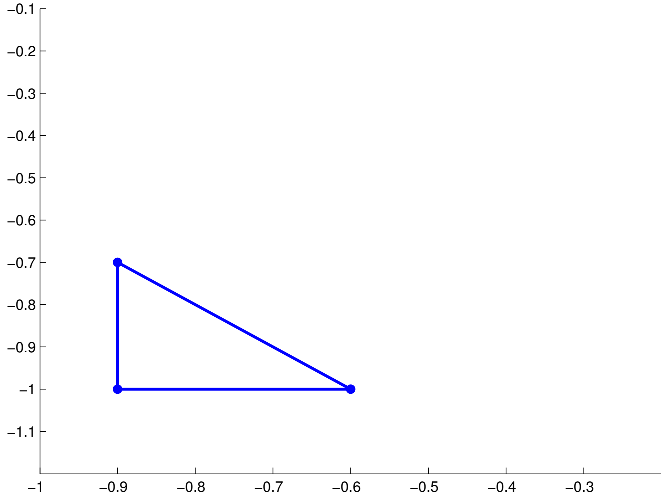
Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0,1)$

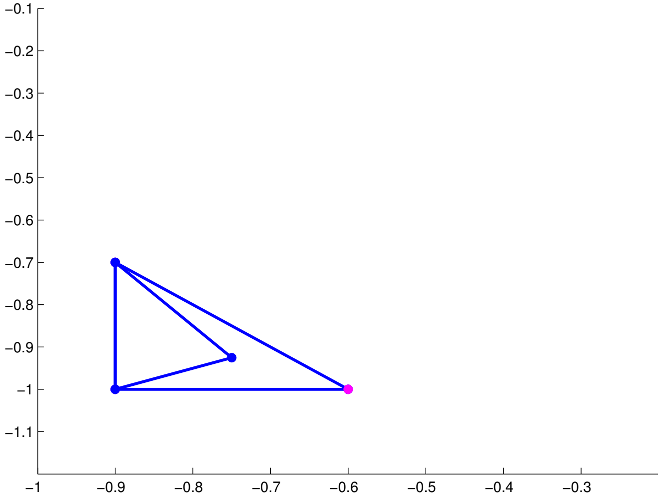
Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \le f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \le f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \le f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \le f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

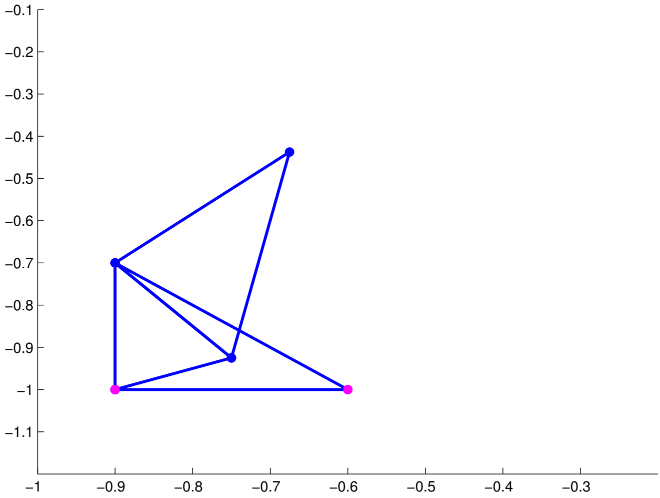
Esempio su Funzione di Broyden



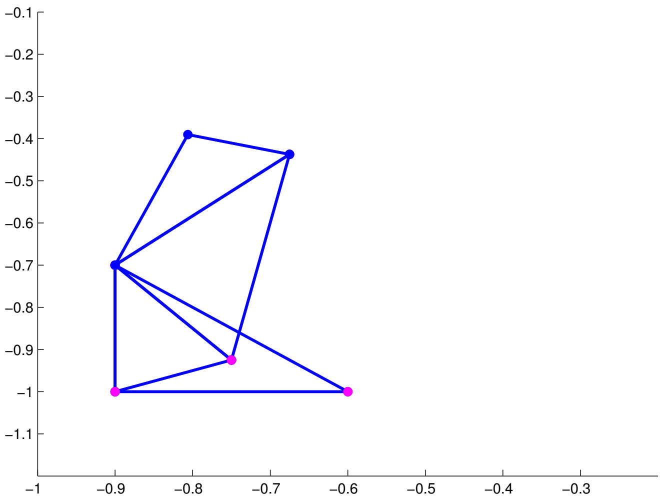
Esempio su Funzione di Broyden



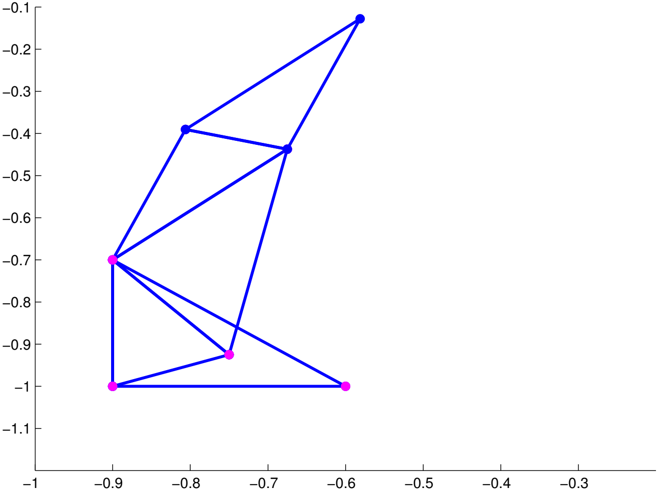
Esempio su Funzione di Broyden



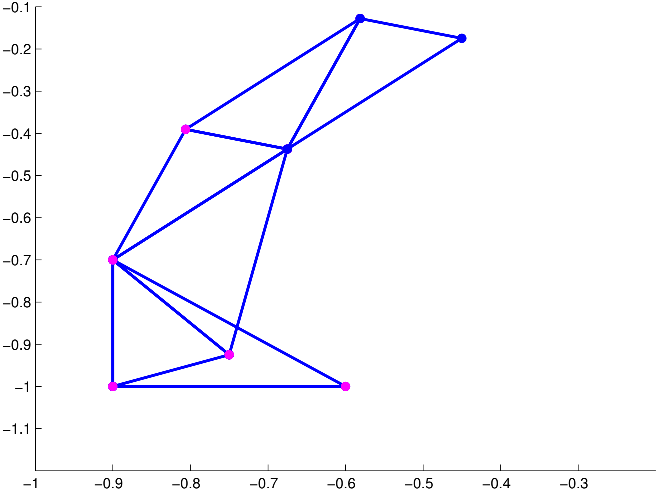
Esempio su Funzione di Broyden



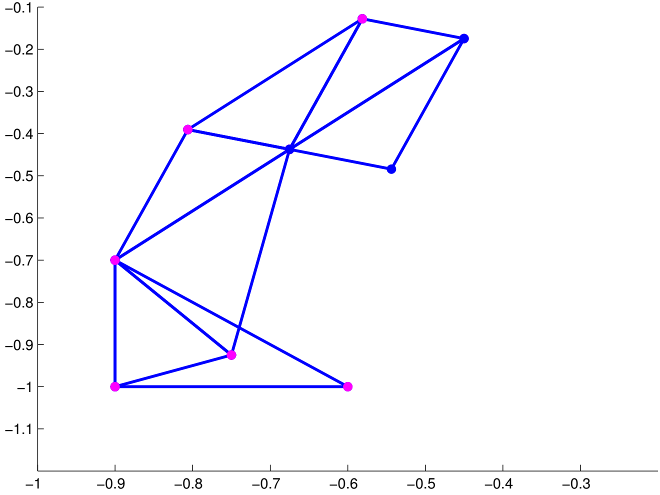
Esempio su Funzione di Broyden



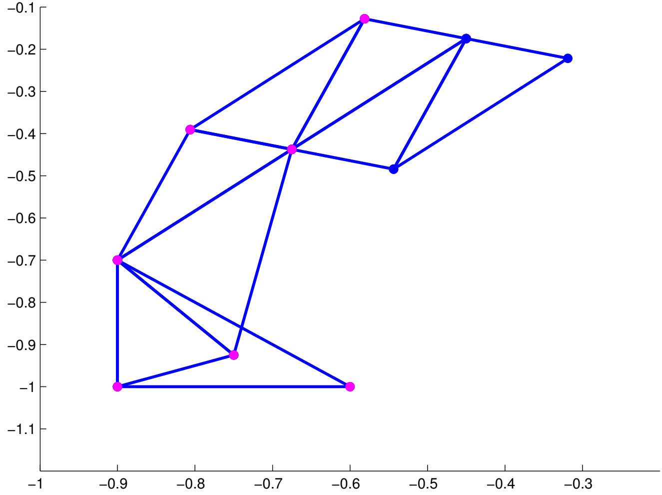
Esempio su Funzione di Broyden



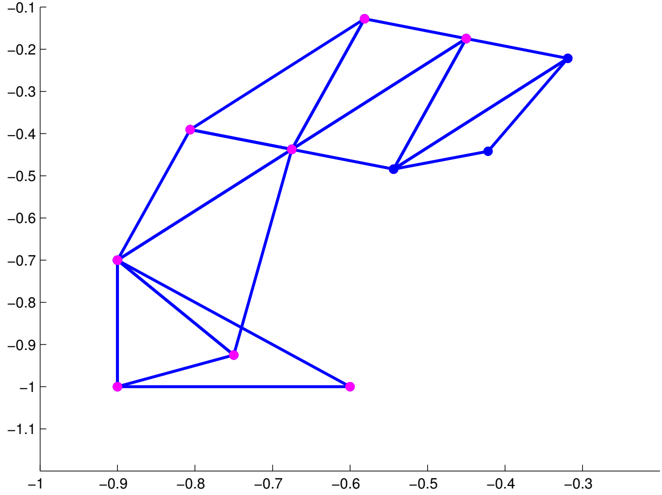
Esempio su Funzione di Broyden



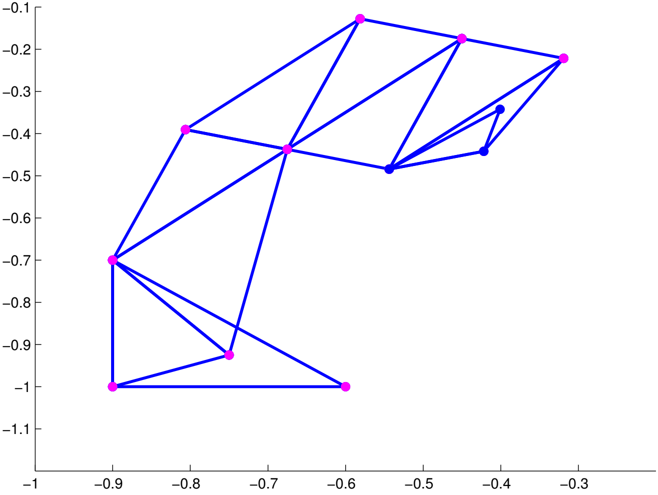
Esempio su Funzione di Broyden



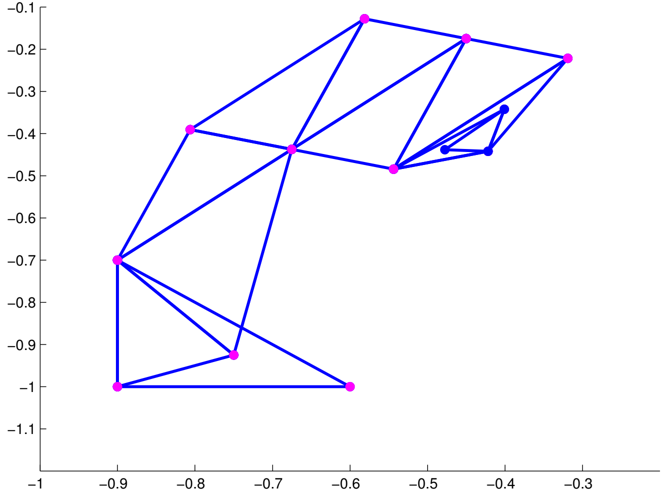
Esempio su Funzione di Broyden



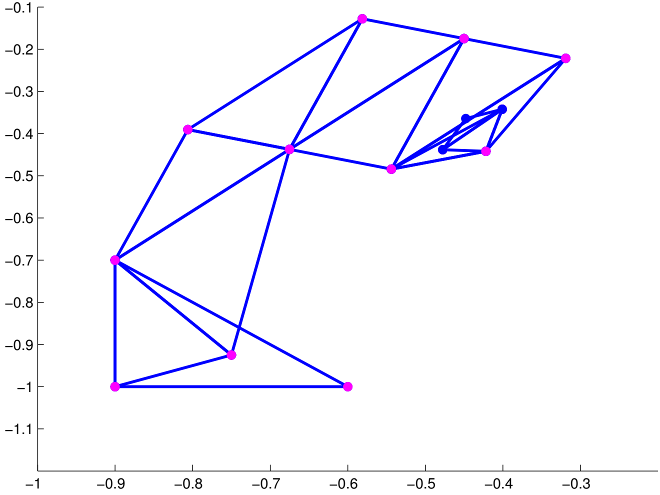
Esempio su Funzione di Broyden



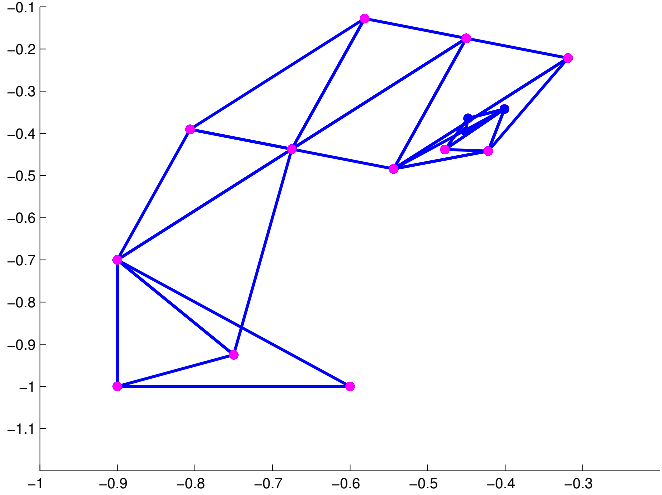
Esempio su Funzione di Broyden



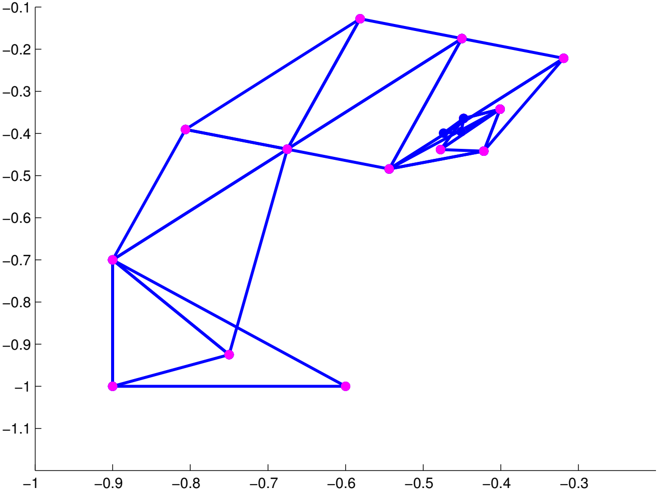
Esempio su Funzione di Broyden



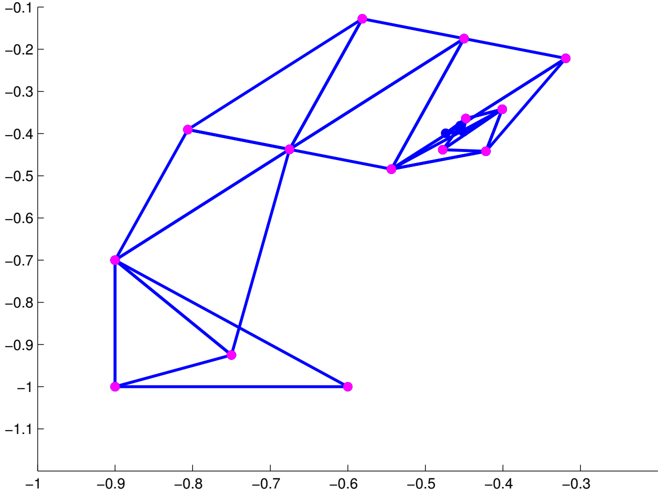
Esempio su Funzione di Broyden



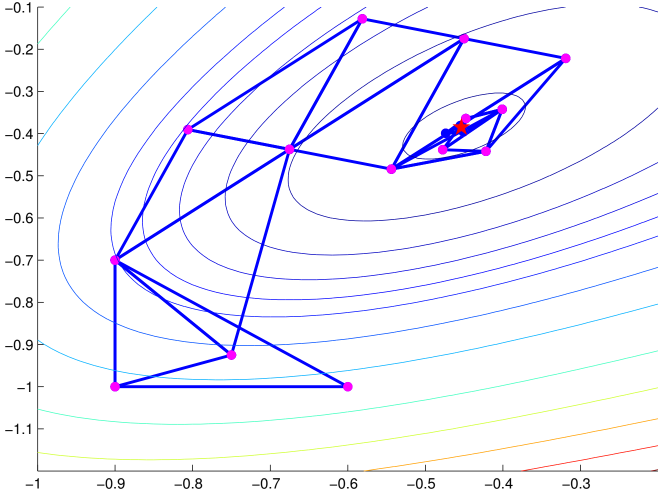
Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Esercizio

Sia

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
F &= \{ \quad 3, \qquad 7, \qquad 1, \quad \}
\end{aligned}
$$

Il centroide $\bar{x}$ di x_1 e x_2 (dopo il riordino) è

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Il metodo considera i punti

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu d = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_3)$$

per valori $\mu = 1,\ 2,\ 1/2,\ -1/2$

Esercizio

Sia

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
F &= \{ \quad 1, \quad\quad 3, \quad\quad 7, \quad \}
\end{aligned}
$$

Il centroide $\bar{x}$ di x_1 e x_2 (dopo il riordino) è

$$
\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}
$$

Il metodo considera i punti

$$
x(\mu) = \bar{x} + \mu d = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_3)
$$

per valori $\mu = 1,\ 2,\ 1/2,\ -1/2$

Esercizio

Sia

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
F &= \{ \quad 1, \qquad 3, \qquad 7, \quad \}
\end{aligned}
$$

Il centroide $\bar{x}$ di x_1 e x_2 (dopo il riordino) è

$$
\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}
$$

Il metodo considera i punti

$$
x(\mu) = \bar{x} + \mu d = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_3)
$$

per valori $\mu = 1,\ 2,\ 1/2,\ -1/2$

Esercizio

Sia

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
F &= \{ \quad 1, \qquad 3, \qquad 7, \quad \}
\end{aligned}
$$

Il centroide $\bar{x}$ di x_1 e x_2 (dopo il riordino) è

$$
\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}
$$

Il metodo considera i punti

$$
x(\mu) = \bar{x} + \mu d = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_3)
$$

per valori $\mu = 1,\ 2,\ 1/2,\ -1/2$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Nelder&Mead

In $\mathbb{R}^2$ siano dati i seguenti punti:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

a cui corrispondono: $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 3$, $f(x_3) = 5$.

Determinare i punti x_r, x_e, x_{oc} e x_{ic} utilizzati nel metodo di Nelder&Mead

Nelder&Mead

In $\mathbb{R}^2$ siano dati i seguenti punti:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

a cui corrispondono: $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 3$, $f(x_3) = 5$.

Determinare i punti x_r, x_e, x_{oc} e x_{ic} utilizzati nel metodo di Nelder&Mead

È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \le 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \le 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

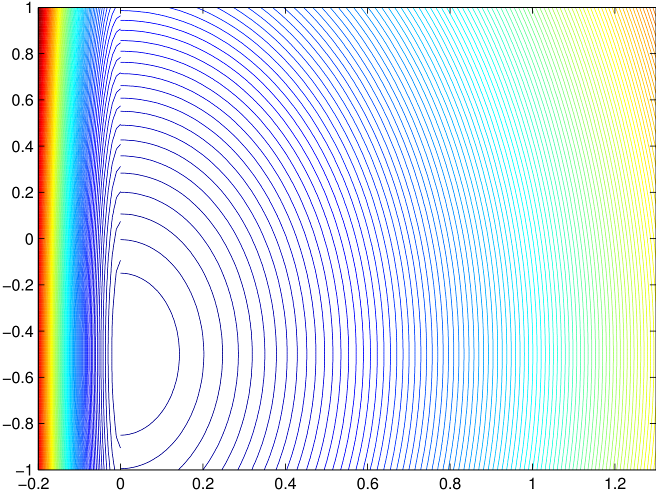
La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \le 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

La funzione di McKinnon

Per $\tau = 2$, $\theta = 6$, $\phi = 60$, la funzione è

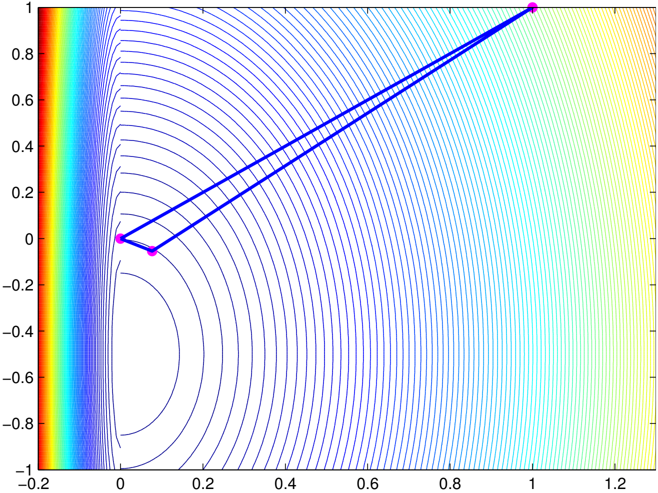


La funzione di McKinnon

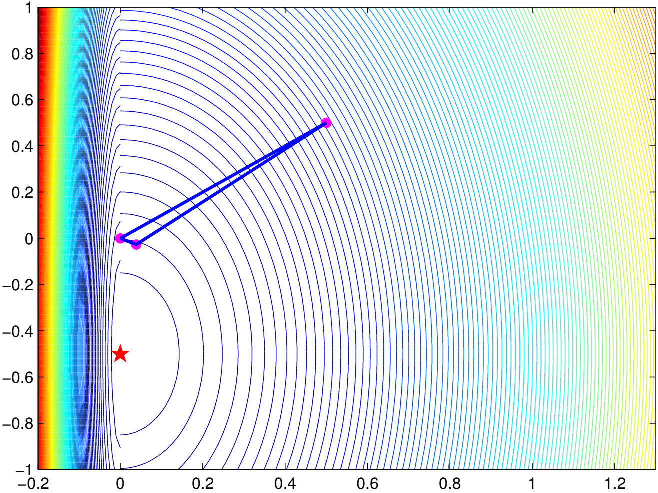
Se inizializziamo il metodo di Nelder-Mead con il simplesso

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{33}}{88} \\ \frac{1-\sqrt{33}}{88} \end{pmatrix}, \right\}$$

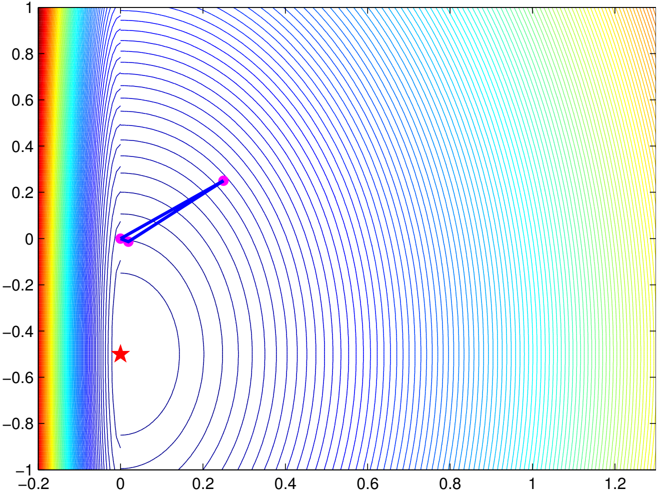
La funzione di McKinnon



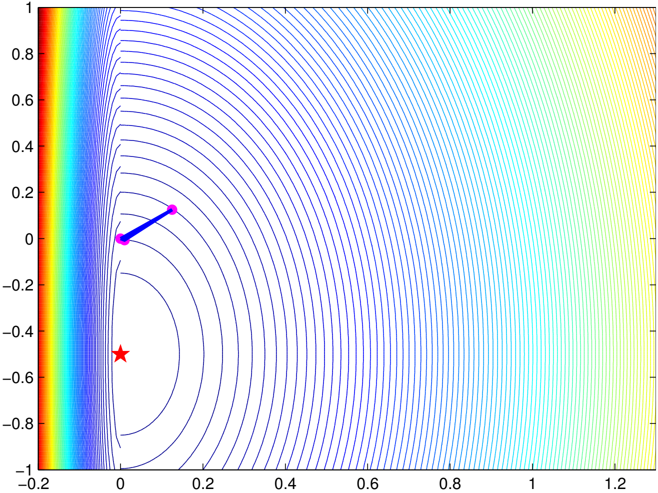
La funzione di McKinnon



La funzione di McKinnon



La funzione di McKinnon



Perchè...

- Compass Search "funziona" ?
- Hooke & Jeeves "funziona" ?
- Nelder & Mead "**non** funziona" (teoricamente) ?

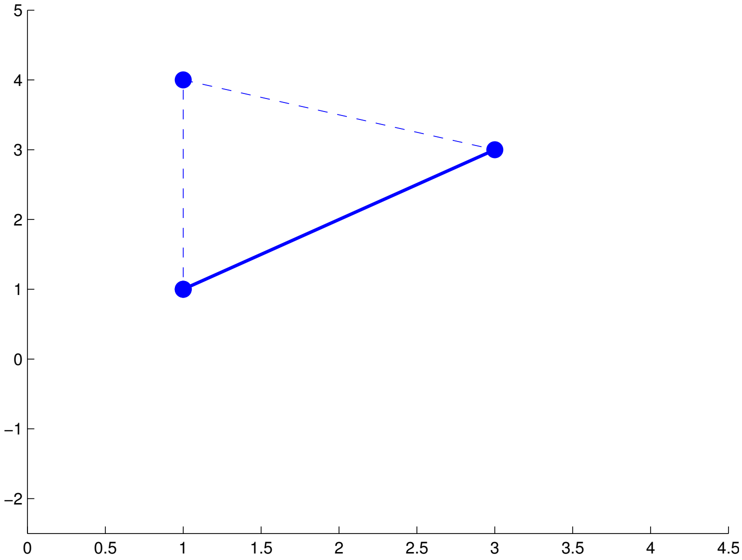
Cosa "davvero" distingue i primi due dal terzo ?

Perchè...

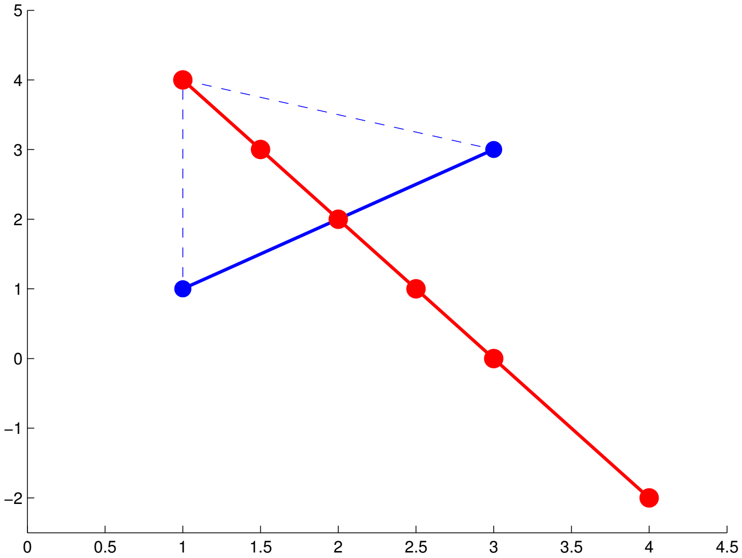
- Compass Search "funziona" ?
- Hooke & Jeeves "funziona" ?
- Nelder & Mead "**non** funziona" (teoricamente) ?

Cosa "davvero" distingue i primi due dal terzo ?

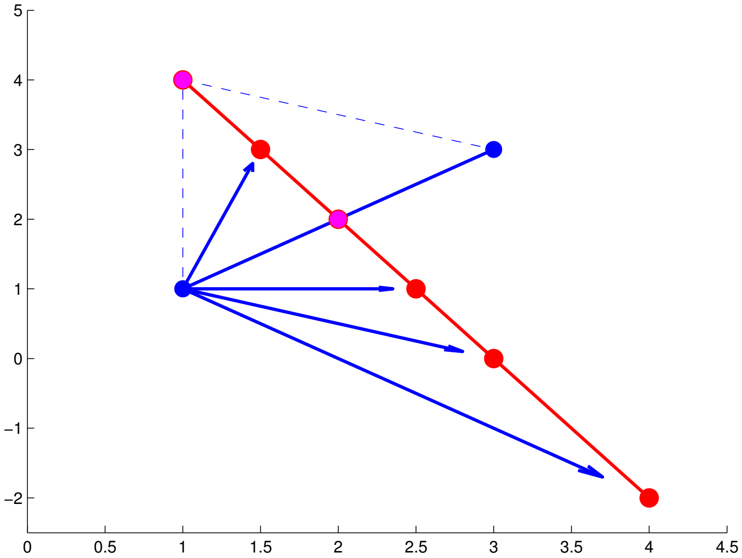
Perchè...



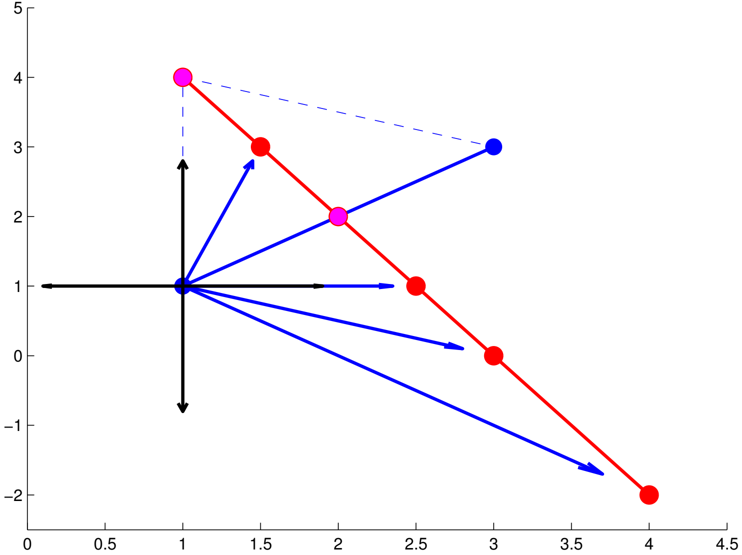
Perchè...



Perchè...



Perchè...



... e quindi ...

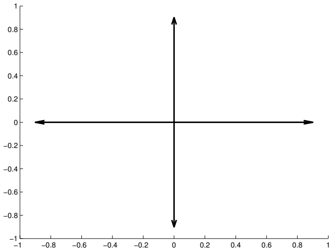
Quando $D = \{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$

$$\kappa(D) = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$

Comunque scelto un $v \in \mathbb{R}^n$, esiste $d \in D$ tale che

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \geq \kappa(D) > 0$$

Quando $v = -\nabla f(x) \neq 0$, esiste sempre una direzione $d \in D$ **di discesa**



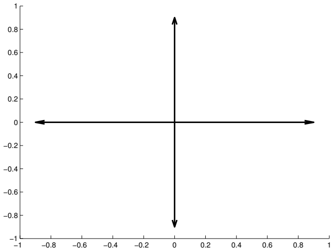
... e quindi ...

Quando $D = \{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n\}$

$$\kappa(D) = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$

Comunque scelto un $v \in \mathbb{R}^n$, esiste $d \in D$ tale che

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \geq \kappa(D) > 0$$



Quando $v = -\nabla f(x) \neq 0$, esiste sempre una direzione $d \in D$ **di discesa**

... e quindi ...

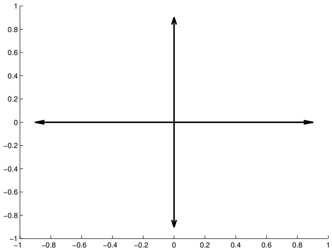
Quando $D = \{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$

$$\kappa(D) = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$

Comunque scelto un $v \in \mathbb{R}^n$, esiste $d \in D$ tale che

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \geq \kappa(D) > 0$$

Quando $v = -\nabla f(x) \neq 0$, esiste sempre una direzione $d \in D$ **di discesa**



... e quindi ...

Quando $D = \{\text{vedi figura}\}$

$$\kappa(D) \le 0$$

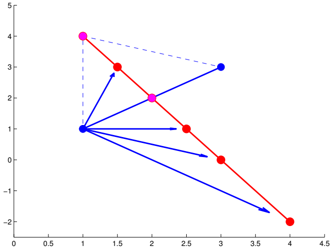
esistono $v \in \mathbb{R}^n$ tali che, per ogni $d \in D$, si ha

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \le 0$$

Potrebbe capitare che $\nabla f(x) \neq 0$, e ogni $d \in D$ è tale che

$$-\nabla f(x)^\top d \le 0$$

cioè **nessuna** dir. in D è **di discesa**



... e quindi ...

Quando $D = \{\text{vedi figura}\}$

$$\kappa(D) \leq 0$$

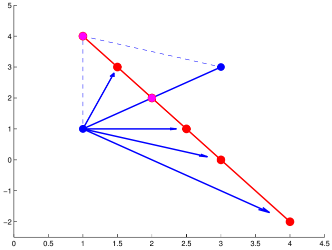
esistono $v \in \mathbb{R}^n$ tali che, per ogni $d \in D$, si ha

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \leq 0$$

Potrebbe capitare che $\nabla f(x) \neq 0$, e ogni $d \in D$ è tale che

$$-\nabla f(x)^\top d \leq 0$$

cioè **nessuna** dir. in D è **di discesa**



... e quindi ...

Quando $D = \{\text{vedi figura}\}$

$$\kappa(D) \leq 0$$

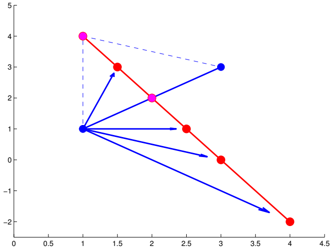
esistono $v \in \mathbb{R}^n$ tali che, per ogni $d \in D$, si ha

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \leq 0$$

Potrebbe capitare che $\nabla f(x) \neq 0$, e ogni $d \in D$ è tale che

$$-\nabla f(x)^\top d \leq 0$$

cioè **nessuna** dir. in D è **di discesa**



... e quindi ...

per il metodo **compass search** che usa

- $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$,
- $\kappa(D) = 1/\sqrt{(n)} > 0$

quando il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- esiste sempre (almeno) una direzione $d \in D$ che è **di discesa**

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

- per passi Δ sufficientemente piccoli **deve accadere**

$$f(x + \Delta d) < f(x)$$

cioè il punto x corrente (se non-stazionario) prima o dopo viene aggiornato

... e quindi ...

per il metodo **compass search** che usa

- $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$,
- $\kappa(D) = 1/\sqrt(n) > 0$

quando il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- esiste sempre (almeno) una direzione $d \in D$ che è **di discesa**

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

- per passi Δ sufficientemente piccoli **deve accadere**

$$f(x + \Delta d) < f(x)$$

cioè il punto x corrente (se non-stazionario) prima o dopo viene aggiornato

... e quindi ...

per il metodo **compass search** che usa

- $D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$,
- $\kappa(D) = 1/\sqrt(n) > 0$

quando il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- esiste sempre (almeno) una direzione $d \in D$ che è **di discesa**

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

- per passi Δ sufficientemente piccoli **deve accadere**

$$f(x + \Delta d) < f(x)$$

cioè il punto x corrente (se non-stazionario) prima o dopo viene aggiornato

... e quindi ...

per il metodo **compass search** che usa

- $D = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$,
- $\kappa(D) = 1/\sqrt(n) > 0$

quando il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- esiste sempre (almeno) una direzione $d \in D$ che è **di discesa**

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

- per passi Δ sufficientemente piccoli **deve accadere**

$$f(x + \Delta d) < f(x)$$

cioè il punto x corrente (se non-stazionario) prima o dopo viene aggiornato

... e quindi ...

per il metodo **Nelder&Mead** che usa

- D t.c. $\kappa(D) \leq 0$

anche se il punto corrente **non** è stazionario $(\nabla f(x) \neq 0)$

- le direzioni $d \in D$ potrebbero tendere a direzioni $\bar{d}$ che **non** sono di discesa

$$\nabla f(x)^\top \bar{d} \geq 0$$

- anche per spostamenti piccolissimi (i.e. punti in X vicinissimi) nessuno dei punti x_r, x_e, x_{oc}, x_{ic} migliora il valore $f(x)$

cioè il punto x corrente non-stazionario non viene **mai** aggiornato!!

... e quindi ...

per il metodo **Nelder&Mead** che usa

- D t.c. $\kappa(D) \leq 0$

anche se il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- le direzioni $d \in D$ potrebbero tendere a direzioni $\bar{d}$ che **non** sono di discesa
$$\nabla f(x)^\top \bar{d} \geq 0$$

- anche per spostamenti piccolissimi (i.e. punti in X vicinissimi) nessuno dei punti x_r, x_e, x_{oc}, x_{ic} migliora il valore $f(x)$

cioè il punto x corrente non-stazionario non viene **mai** aggiornato!!

... e quindi ...

per il metodo **Nelder&Mead** che usa

- D t.c. $\kappa(D) \leq 0$

anche se il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- le direzioni $d \in D$ potrebbero tendere a direzioni $\bar{d}$ che **non** sono di discesa
$$\nabla f(x)^\top \bar{d} \geq 0$$
- anche per spostamenti piccolissimi (i.e. punti in X vicinissimi) nessuno dei punti x_r, x_e, x_{oc}, x_{ic} migliora il valore $f(x)$

cioè il punto x corrente non-stazionario non viene **mai** aggiornato!!

... e quindi ...

per il metodo **Nelder&Mead** che usa

- D t.c. $\kappa(D) \leq 0$

anche se il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- le direzioni $d \in D$ potrebbero tendere a direzioni $\bar{d}$ che **non** sono di discesa
$$\nabla f(x)^\top \bar{d} \geq 0$$
- anche per spostamenti piccolissimi (i.e. punti in X vicinissimi) nessuno dei punti x_r, x_e, x_{oc}, x_{ic} migliora il valore $f(x)$

cioè il punto x corrente non-stazionario non viene **mai** aggiornato!!