Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi[1]

Venerdì 23 Novembre 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Shubert-Mladineo

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &s.t. \ x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Un metodo per problemi con $n = 1$ e funzione obiettivo Lipschitz continua modulo L.

$$\begin{aligned} &\min \ f(x) \\ &s.t. \ a \leq x \leq b \end{aligned}$$

Richiede la conoscenza di una *sovrastima* $\tilde{L} \geq L$

Shubert-Mladineo

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\ x \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

Un metodo per problemi con $n = 1$ e funzione obiettivo Lipschitz continua modulo L.

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &s.t.\ a \le x \le b \end{aligned}$$

Richiede la conoscenza di una *sovrastima* $\tilde{L} \ge L$

Shubert-Mladineo

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \ x \in \mathcal{D}$$

Un metodo per problemi con $n = 1$ e funzione obiettivo Lipschitz continua modulo L.

$$\min \ f(x)$$
$$s.t. \ a \leq x \leq b$$

Richiede la conoscenza di una *sovrastima* $\tilde{L} \geq L$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima $\tilde{L}$ di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$\begin{array}{lcll} f(x) & \geq & f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), & x \geq \tilde{x} \\ f(x) & \geq & f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), & x < \tilde{x} \end{array}$$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima $\tilde{L}$ di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), \qquad && x \geq \tilde{x} \\ f(x) &\geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), \qquad && x < \tilde{x} \end{aligned}$$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima $\tilde{L}$ di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$\begin{array}{lll} f(x) & \geq & f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), \qquad x \geq \tilde{x} \\ f(x) & \geq & f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), \qquad x < \tilde{x} \end{array}$$

L'idea

Se abbiamo una sovrastima $\tilde{L}$ di L ed un punto $\tilde{x} \in [a, b]$, sappiamo che:

$$|f(x) - f(\tilde{x})| \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

ovvero

$$-\tilde{L}|x - \tilde{x}| \leq f(x) - f(\tilde{x}) \leq \tilde{L}|x - \tilde{x}|, \qquad \text{per ogni } x \in [a, b]$$

quindi, in particolare,

$$f(x) \geq f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

$$\begin{array}{rcll} f(x) & \geq & f(\tilde{x}) - \tilde{L}(x - \tilde{x}), & \quad x \geq \tilde{x} \\ f(x) & \geq & f(\tilde{x}) - \tilde{L}(\tilde{x} - x), & \quad x < \tilde{x} \end{array}$$

L'idea

Pertanto, il minimo globale del problema

$$\begin{array}{l} \min \ f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}| \\ s.t.\ a \leq x \leq b \end{array}$$

è una **sottostima** del minimo globale di f. Cioè, se indichiamo

$$\ell(x) = f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

e con $\tilde{x}^*$ il punto di minimo globale di $\ell(x)$, risulta:

$$f(x^*) \geq \ell(\tilde{x}^*)$$

L'idea

Pertanto, il minimo globale del problema

$$\begin{array}{l} \min \ f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}| \\ s.t. \ a \le x \le b \end{array}$$

è una **sottostima** del minimo globale di f. Cioè, se indichiamo

$$\ell(x) = f(\tilde{x}) - \tilde{L}|x - \tilde{x}|$$

e con $\tilde{x}^*$ il punto di minimo globale di $\ell(x)$, risulta:

$$f(x^*) \ge \ell(\tilde{x}^*)$$

Andiamo oltre

Consideriamo ora 2 punti e precisamente: $\tilde{x}^1 = a, \tilde{x}^2 = b$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(a) - \tilde{L}|x-a| \\ f(x) &\geq f(b) - \tilde{L}|x-b| \end{aligned}$$

Quindi

$$f(x) \geq \ell(x) = \max\{f(a) - \tilde{L}|x-a|, f(b) - \tilde{L}|x-b|\}$$

Il punto di minimo globale di $\ell(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ è

$$\begin{aligned} \tilde{x}^* &= \frac{a+b}{2} + \frac{f(a)-f(b)}{2\tilde{L}} \\ \ell(\tilde{x}^*) &= \frac{f(a)+f(b)}{2} + \tilde{L}\frac{a-b}{2} \end{aligned}$$

Ancora oltre

Consideriamo ora m punti e precisamente:

$$a = \tilde{x}^1 < \tilde{x}^2 \cdots < \tilde{x}^m = b$$

$$f(x) \geq f(\tilde{x}^i) - \tilde{L}|x - \tilde{x}^i| \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, m$$

Quindi

$$f(x) \geq \ell(x) = \max_{i=1,\ldots,m} \{f(\tilde{x}^i) - \tilde{L}|x - \tilde{x}^i|\}$$

Il punto di minimo globale di $\ell(x)$ sull'intervallo $[a, b]$ è dal punto a cui corrisponde il valore più basso tra i punti di minimo della funzione $\ell(x)$ sui sotto intervalli $[\tilde{x}^1, \tilde{x}^2], [\tilde{x}^2, \tilde{x}^3], \ldots, [\tilde{x}^{m-1}, \tilde{x}^m]$

Ancora oltre (2)

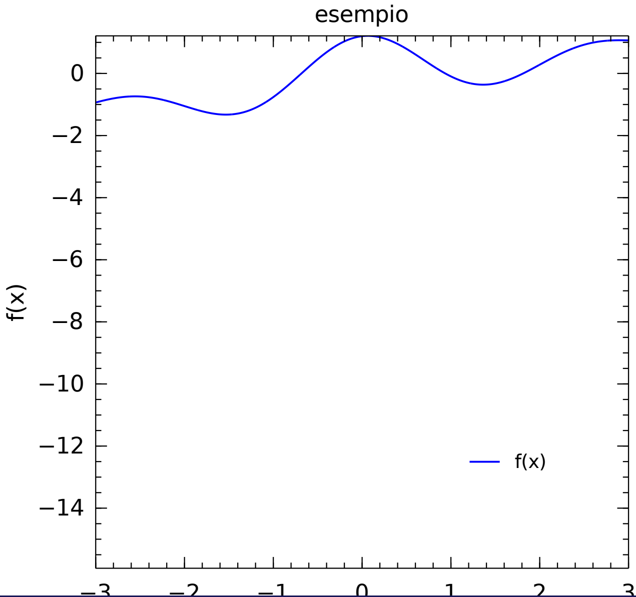
Su ciascuno dei sotto intervalli $[\tilde{x}^i, \tilde{x}^{i+1}]$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$ risulta

$$
\begin{aligned}
\tilde{x}^{*,i} &= \frac{\tilde{x}^i + \tilde{x}^{i+1}}{2} + \frac{f(\tilde{x}^i) - f(\tilde{x}^{i+1})}{2\tilde{L}} \\
\ell(\tilde{x}^{*,i}) &= \frac{f(\tilde{x}^i) + f(\tilde{x}^{i+1})}{2} + \tilde{L}\frac{\tilde{x}^i - \tilde{x}^{i+1}}{2}
\end{aligned}
$$

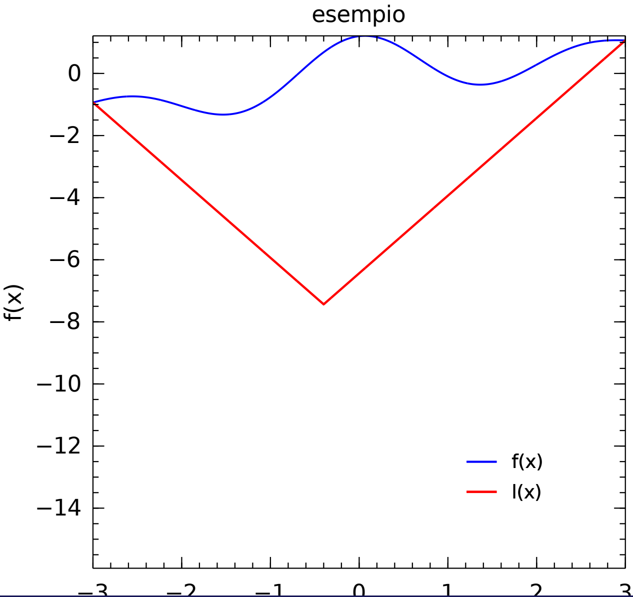
Quindi $\tilde{x}^*$ è il migliore tra tutti questi punti

$$\tilde{x}^* \in \arg \min_{i=1,\ldots,m-1} \ell(\tilde{x}^{*,i})$$

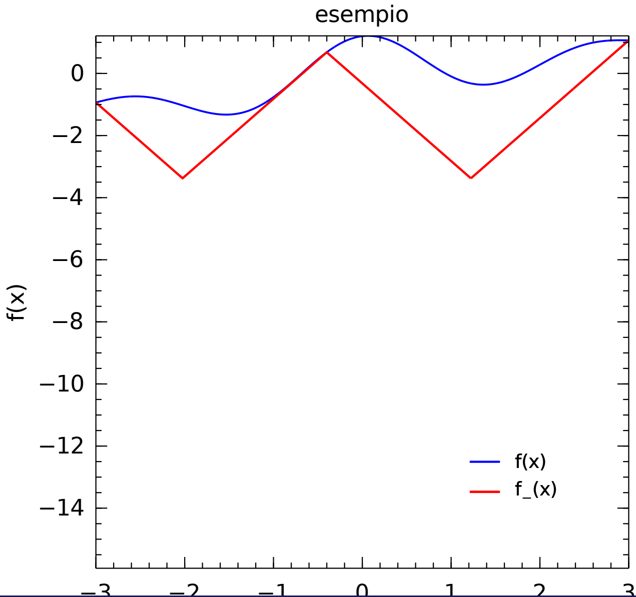
Esempio



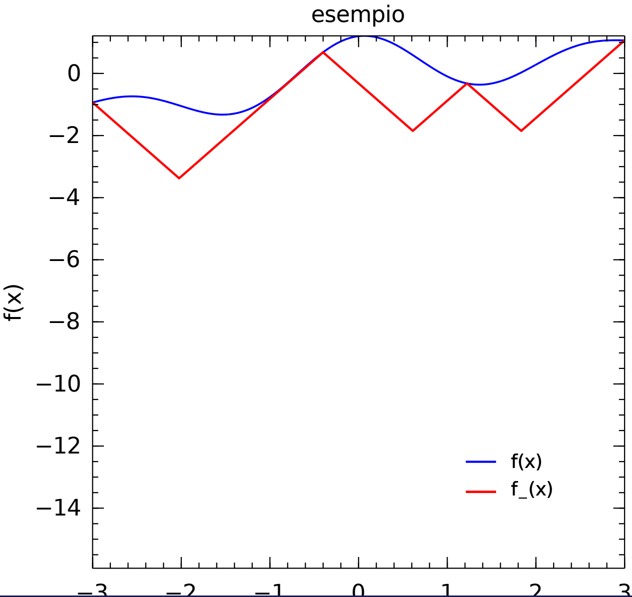
Esempio



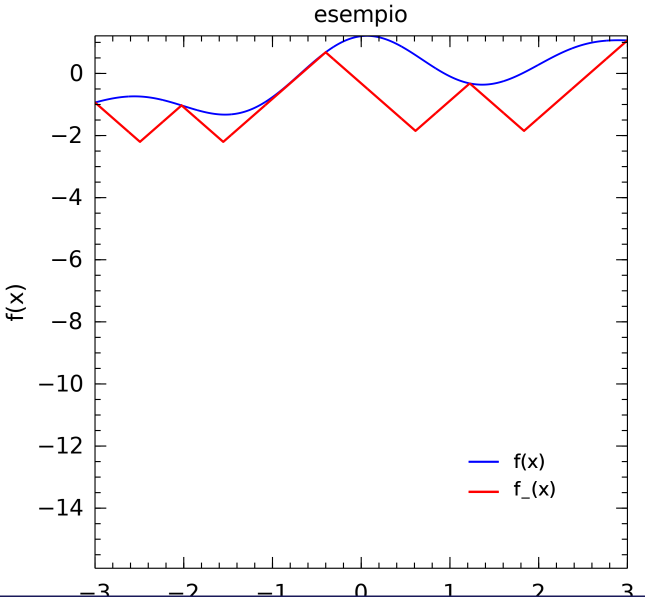
Esempio



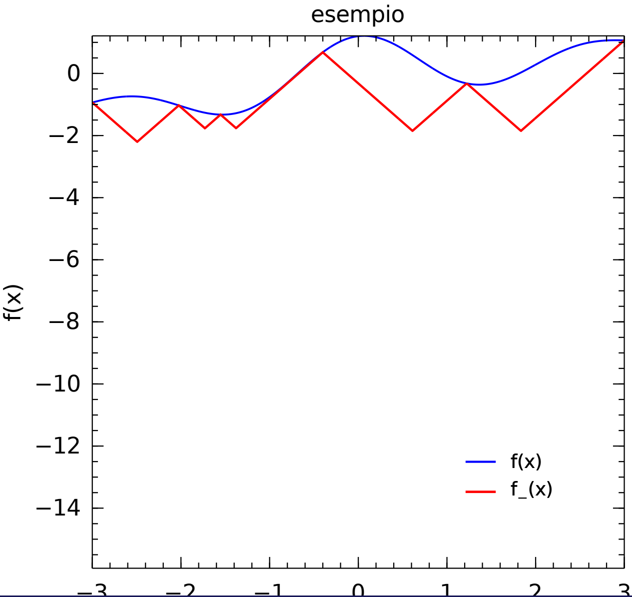
Esempio



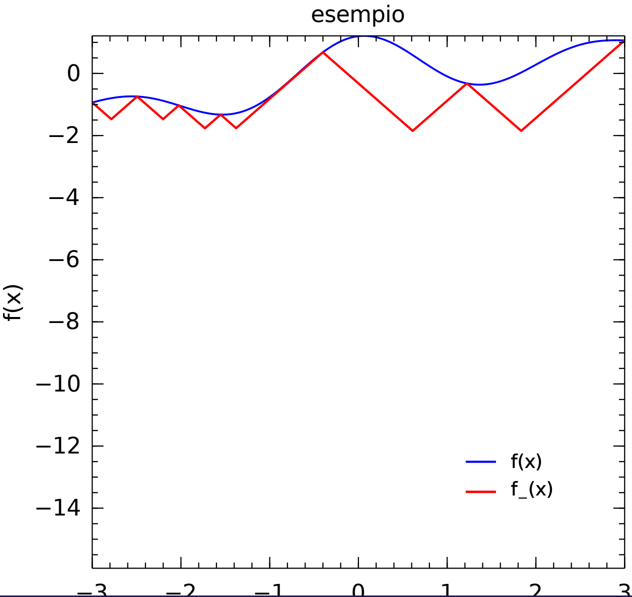
Esempio



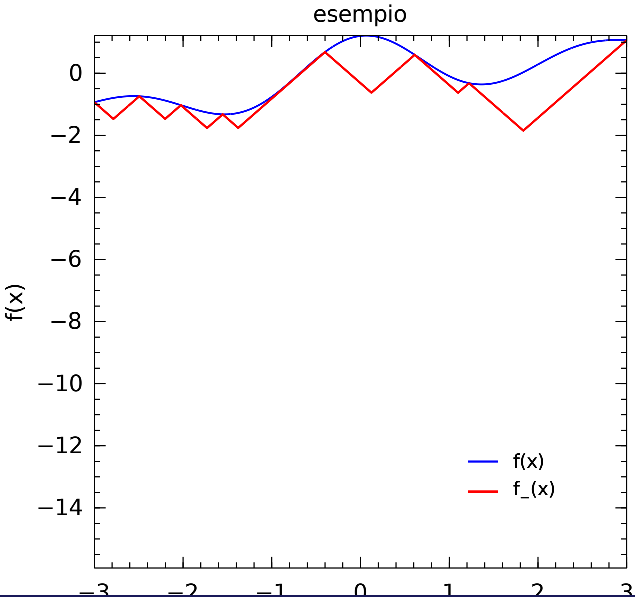
Esempio



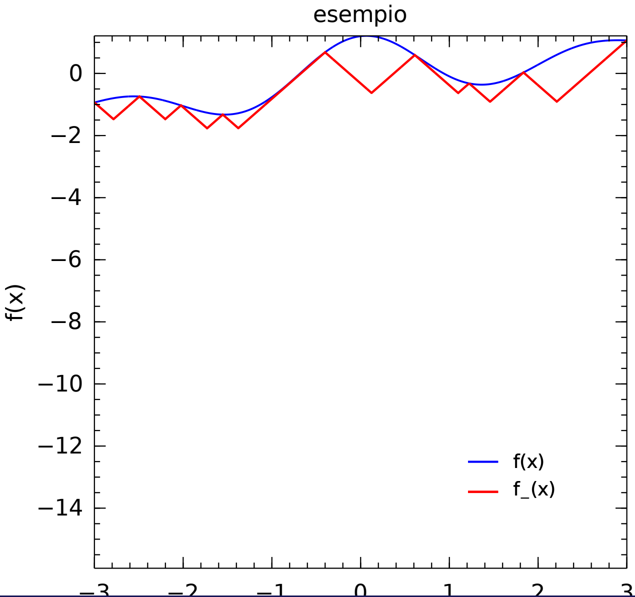
Esempio



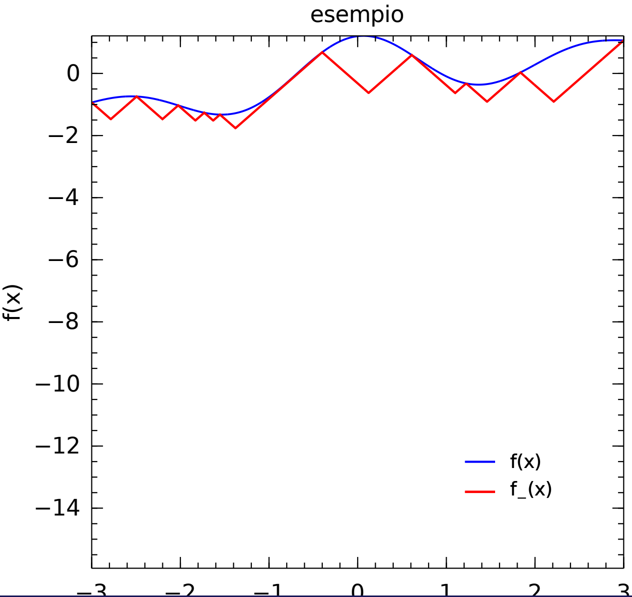
Esempio



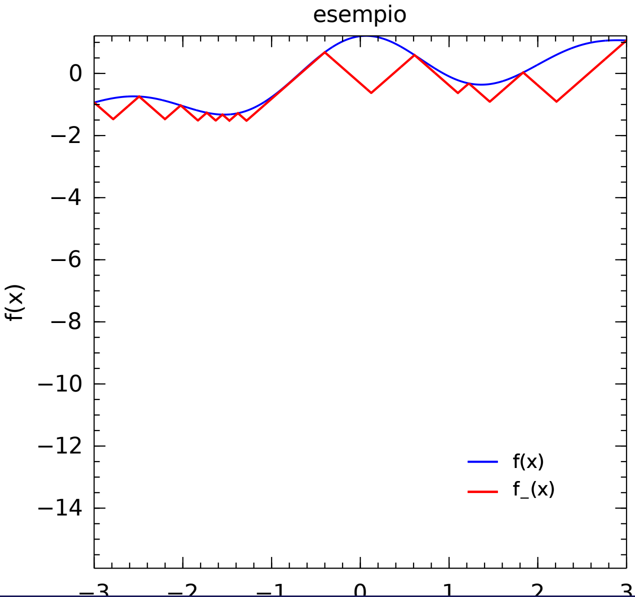
Esempio



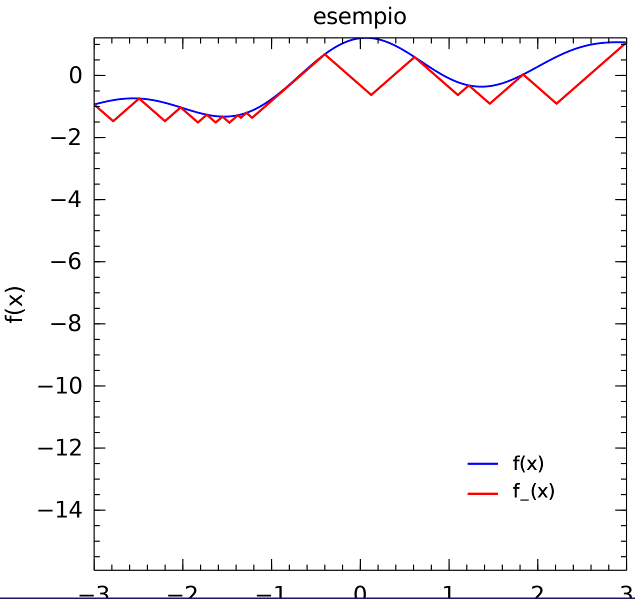
Esempio



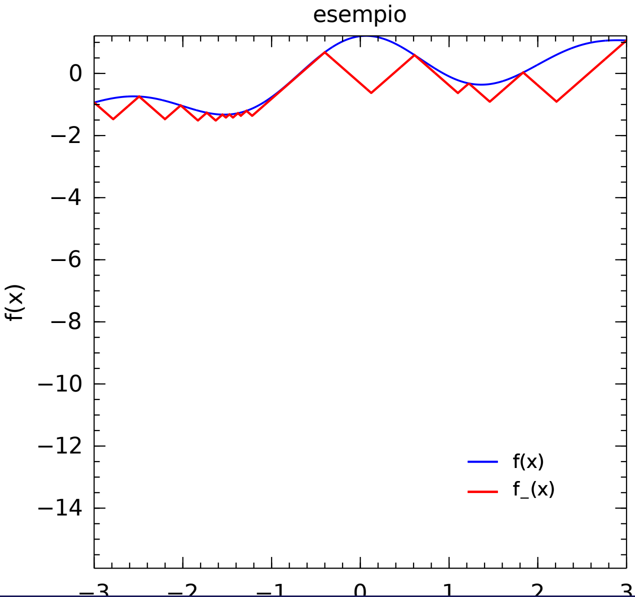
Esempio



Esempio



Esempio



Il metodo di Schubert-Mladineo

INPUT: `maxit`, `tol`> 0

$X_0 \leftarrow \{a, b\}$, $k \leftarrow 0$

for $k = 0, 1, \ldots,$`maxit`

Determina x_k^* minimo globale di $\ell_k(x)$ in $[a, b]$ con

$$\ell_k(x) = \max_{x_i \in X_k} \{f(x_i) - \tilde{L}|x - x_i|\}$$

if $f(x_k^*) - \ell_k(x_k^*) \leq$`tol` **then break**

Poni $X_{k+1} \leftarrow X_k \cup \{x_k^*\}$

$k \leftarrow k + 1$

end