Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi[1]

Mercoledì 19 Dicembre 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad (P_0)$$

con $\mathcal{F}$ insieme ammissibile di (P_0)

Definizione

Teoricamente è possibile definire

$$q_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ +\infty & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\infty(x) = f(x) + q_\infty(x)$$

È evidente che:

- risolvere il problema $\min P_\infty(x)$ fornisce soluzioni del problema (P_0).
- minimizzare $P_\infty(x)$ è (o può essere) molto "complicato"

Definizione

Teoricamente è possibile definire

$$q_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ +\infty & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\infty(x) = f(x) + q_\infty(x)$$

È evidente che:

- risolvere il problema $\min\ P_\infty(x)$ fornisce soluzioni del problema (P_0).
- minimizzare $P_\infty(x)$ è (o può essere) molto "complicato"

Definizione

Anziché $q_\infty(x)$, definiamo

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ > 0 & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\epsilon(x) = f(x) + \frac{1}{\epsilon} q(x)$$

N.B.:

- se $f(x)$ e $q(x)$ sono cont. differenziabili, allora anche $P_\epsilon(x)$ lo è
- per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\epsilon \to 0} P_\epsilon(x) = P_\infty(x)$

Espressione di q(x)

Il termine $q(x)$ deve "penalizzare con continuità" l'eventuale inammissibilità di x

P.es., con riferimento a (P_0),

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} [h_i(x)]^2 + \sum_{i=1}^{m} [\max\{0, g_i(x)\}]^2$$

- per nessun valore di $\epsilon > 0$, min $P_\epsilon(x)$ è equivalente a (P_0)
- per ogni valore di $\epsilon > 0$, una min. non vincolata di $P_\epsilon(x)$ produce (in genere) un punto $x^* \notin \mathcal{F}$, cioè $q(x^*) > 0$

Algoritmo di soluzione

Algoritmo `SEQPEN`

INPUT: maxit, $\tau > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \dots,$ maxit

Trova una soluzione $(x(\epsilon_k))$ del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x). \tag{2}$$

if $q(x(\epsilon_k)) \leq \tau$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x(\epsilon_k)$

Proprietà di monotonicità

Teorema

Siano soddisfatte le ipotesi seguenti:

- *esiste* $x^* \in \mathcal{F}$ *soluzione globale del problema vincolato;*
- *per ogni* k*, la funzione* $P_{\epsilon_k}(x)$ *ammette minimo globale* x^k*.*

Allora,

1. $P_{\epsilon_k}(x_k) \leq f(x^*)$;
2. $q(x^k) \geq q(x^{k+1})$;
3. $f(x^k) \leq f(x^{k+1})$;
4. $P_{\epsilon_k}(x^k) \leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1})$.

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) + q(x)/\epsilon_k = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) + q(x)/\epsilon_k = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \le \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\le P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\le P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k)+q(x^k)/\epsilon_k &\le f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\le f(x^k)+q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k)+q(x^k)/\epsilon_k &\le f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k)-q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\le -f(x^{k+1})-q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{array}{rcl} P_{\epsilon_k}(x^k) & \leq & P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) & \leq & P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{array}$$

Ovvero

$$\begin{array}{rcl} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k & \leq & f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} & \leq & f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k & \leq & f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} & \leq & -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{array}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \le \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{array}{rcl} P_{\epsilon_k}(x^k) & \le & P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) & \le & P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{array}$$

Ovvero

$$\begin{array}{rcl} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k & \le & f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} & \le & f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k & \le & f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} & \le & -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{array}$$

Proprietà di monotonicità – dim. (segue)

da cui segue

$$q(x^k)(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1}) \leq q(x^{k+1})(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1})$$

tenendo conto del fatto che $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$

$$q(x^{k+1}) \leq q(x^k)$$

che prova la (2). Ora, ricordando che

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \leq (q(x^{k+1}) - q(x^k))/\epsilon_k \leq 0$$

che prova la (3). La (4) segue da

$$f(x^k)+q(x^k)/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1}$$

ricordando che $\epsilon_k > \epsilon_{k+1}$. $\square$

Proprietà di monotonicità – dim. (segue)

da cui segue

$$q(x^k)(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1}) \leq q(x^{k+1})(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1})$$

tenendo conto del fatto che $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$

$$q(x^{k+1}) \leq q(x^k)$$

che prova la (2). Ora, ricordando che

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \leq (q(x^{k+1}) - q(x^k))/\epsilon_k \leq 0$$

che prova la (3). La (4) segue da

$$f(x^k)+q(x^k)/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1}$$

ricordando che $\epsilon_k > \epsilon_{k+1}$. □

Proprietà di monotonicità – dim. (segue)

da cui segue

$$q(x^k)(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1}) \leq q(x^{k+1})(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1})$$

tenendo conto del fatto che $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$

$$q(x^{k+1}) \leq q(x^k)$$

che prova la (2). Ora, ricordando che

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \leq (q(x^{k+1}) - q(x^k))/\epsilon_k \leq 0$$

che prova la (3). La (4) segue da

$$f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1}$$

ricordando che $\epsilon_k > \epsilon_{k+1}$. $\square$

Proprietà di monotonicità – dim. (segue)

da cui segue

$$q(x^k)(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1}) \leq q(x^{k+1})(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1})$$

tenendo conto del fatto che $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$

$$q(x^{k+1}) \leq q(x^k)$$

che prova la (2). Ora, ricordando che

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \leq (q(x^{k+1}) - q(x^k))/\epsilon_k \leq 0$$

che prova la (3). La (4) segue da

$$f(x^k)+q(x^k)/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1}$$

ricordando che $\epsilon_k > \epsilon_{k+1}$. $\square$

Proprietà di convergenza

Teorema

Siano soddisfatte le ipotesi seguenti:

- *esiste* $x^* \in \mathcal{F}$ *soluzione globale del problema vincolato;*
- *per ogni* k*, la funzione* $P_{\epsilon_k}(x)$ *ammette minimo globale* x^k*;*
- *tutti i punti* x^k *rimangono in un insieme compatto* D*.*

Allora,

1. $\lim_{k\to\infty} q(x^k) = 0$;
2. $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(x^*)$;
3. $\lim_{k\to\infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^*)$;
4. *ogni punto di accumulazione di* $\{x^k\}$ *è soluzione globale del problema vincolato;*
5. $\lim_{k\to\infty} q(x^k)\epsilon_k = 0$;

Proprietà di convergenza – dim.

Dim. Sappiamo che

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \geq f(x^0) + q(x^k)/\epsilon_k$$

ovvero

$$f(x^*) - f(x^0) \geq q(x^k)/\epsilon_k.$$

Quando $k \to \infty$, deve risultare

$$\lim_{k\to\infty} q(x^k) = 0$$

(altrimenti si avrebbe un assurdo) il che prova la (1).
Sia ora $\bar{x}$ un qualunque punto di accumulazione di $\{x^k\} \subset D$ compatto. Risulta intanto che $q(\bar{x}) = 0$, cioè che $\bar{x} \in \mathcal{F}$.

Proprietà di convergenza – dim.

Dim. Sappiamo che

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \geq f(x^0) + q(x^k)/\epsilon_k$$

ovvero

$$f(x^*) - f(x^0) \geq q(x^k)/\epsilon_k.$$

Quando $k \to \infty$, deve risultare

$$\lim_{k\to\infty} q(x^k) = 0$$

(altrimenti si avrebbe un assurdo) il che prova la (1).
Sia ora $\bar{x}$ un qualunque punto di accumulazione di $\{x^k\} \subset D$ compatto. Risulta intanto che $q(\bar{x}) = 0$, cioè che $\bar{x} \in \mathcal{F}$.

Proprietà di convergenza – dim.

Dim. Sappiamo che

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \geq f(x^0) + q(x^k)/\epsilon_k$$

ovvero

$$f(x^*) - f(x^0) \geq q(x^k)/\epsilon_k.$$

Quando $k \to \infty$, deve risultare

$$\lim_{k\to\infty} q(x^k) = 0$$

(altrimenti si avrebbe un assurdo) il che prova la (1).
Sia ora $\bar{x}$ un qualunque punto di accumulazione di $\{x^k\} \subset D$ compatto. Risulta intanto che $q(\bar{x}) = 0$, cioè che $\bar{x} \in \mathcal{F}$.

Proprietà di convergenza – dim. (segue)

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) \geq f(x^k)$$

Quindi, le successioni $\{P_{\epsilon_k}(x^k)\}$ e $\{f(x^k)\}$ sono monotone non decrescenti e limitate superiormente, quindi ammettono limite.

$$f(x^*) \geq \lim_{k\to\infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = \lim_{k\to\infty} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k$$

$$f(x^*) \geq \lim_{k\to\infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = f(\bar{x}) + \lim_{k\to\infty} q(x^k)/\epsilon_k \geq f(\bar{x}) \geq f(x^*).$$

Da qui segue che valgono (2) e (3). Inoltre, che $f(\bar{x}) = f(x^*)$, cioè che $\bar{x}$ è soluzione globale del problema vincolato e inoltre che vale la (5). $\square$

Esempio 1

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \ x^2$$
$$x \geq 1$$

Ammete $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = x^2 + \frac{1}{\epsilon}\max\{0, 1-x\}^2$$

Esempio 1

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \ x^2$$
$$x \geq 1$$

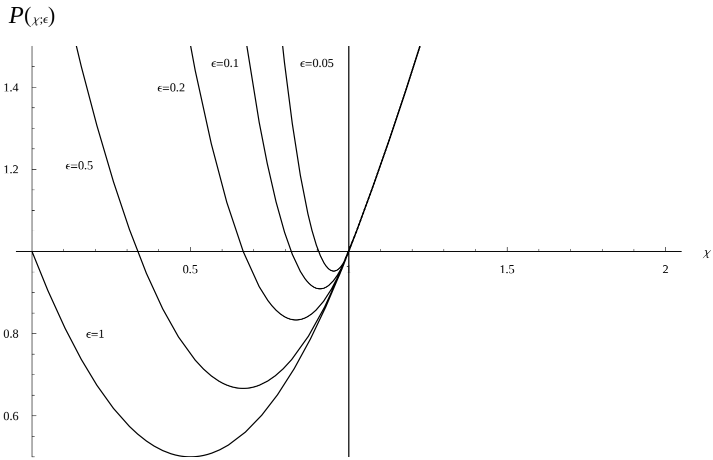
Ammete $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = x^2 + \frac{1}{\epsilon} \max\{0, 1 - x\}^2$$

Esempio 1

Grafici di $P_\epsilon(x)$ ($\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$)



Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \ -x^4$$
$$x = 1$$

Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \ -x^4$$
$$x = 1$$

Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Esempio 2

Grafici di $P_\epsilon(x)$ ($\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$)