

# Ottimizzazione Non Lineare

G. Liuzzi<sup>1</sup>

Mercoledì 19 Dicembre 2018

---

<sup>1</sup>Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

# Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v} & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (P_0)$$

con  $\mathcal{F}$  insieme ammissibile di  $(P_0)$

# Definizione

Teoricamente è possibile definire

$$q_{\infty}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ +\infty & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_{\infty}(x) = f(x) + q_{\infty}(x)$$

È evidente che:

- risolvere il problema  $\min P_{\infty}(x)$  fornisce soluzioni del problema  $(P_0)$ .
- minimizzare  $P_{\infty}(x)$  è (o può essere) molto “complicato”

# Definizione

Anziché  $q_\infty(x)$ , definiamo

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ > 0 & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\epsilon(x) = f(x) + \frac{1}{\epsilon}q(x)$$

**N.B.:**

- se  $f(x)$  e  $q(x)$  sono cont. differenziabili, allora anche  $P_\epsilon(x)$  lo è
- per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon(x) = P_\infty(x)$

## Espressione di $q(x)$

Il termine  $q(x)$  deve “penalizzare con continuità” l’eventuale inammissibilità di  $x$

P.es., con riferimento a  $(P_0)$ ,

$$q(x) = \sum_{i=1}^p [h_i(x)]^2 + \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^2$$

- per nessun valore di  $\epsilon > 0$ ,  $\min P_\epsilon(x)$  è equivalente a  $(P_0)$
- per ogni valore di  $\epsilon > 0$ , una min. non vincolata di  $P_\epsilon(x)$  produce (in genere) un punto  $x^* \notin \mathcal{F}$ , cioè  $q(x^*) > 0$

# Algoritmo di soluzione

## Algoritmo SEQPEN

INPUT:  $\text{maxit}$ ,  $\tau > 0$ ,  $k = 0$ ,  $\epsilon_0 > 0$

**for**  $k = 0, 1, \dots, \text{maxit}$

Trova una soluzione  $(x(\epsilon_k))$  del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x). \quad (2)$$

**if**  $q(x(\epsilon_k)) \leq \tau$  **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$

**endfor**

OUTPUT: una sol. approssimata  $x^* = x(\epsilon_k)$

# Proprietà di monotonicità

## Teorema

*Siano soddisfatte le ipotesi seguenti:*

- *esiste  $x^* \in \mathcal{F}$  soluzione globale del problema vincolato;*
- *per ogni  $k$ , la funzione  $P_{\epsilon_k}(x)$  ammette minimo globale  $x^k$ .*

*Allora,*

- 1  $P_{\epsilon_k}(x_k) \leq f(x^*);$
- 2  $q(x^k) \geq q(x^{k+1});$
- 3  $f(x^k) \leq f(x^{k+1});$
- 4  $P_{\epsilon_k}(x^k) \leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}).$

## Proprietà di monotonicità – dim.

**Dim.**

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) + q(x)/\epsilon_k = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

## Proprietà di monotonicità – dim. (segue)

da cui segue

$$q(x^k)(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1}) \leq q(x^{k+1})(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1})$$

tenendo conto del fatto che  $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$

$$q(x^{k+1}) \leq q(x^k)$$

che prova la (2). Ora, ricordando che

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \leq (q(x^{k+1}) - q(x^k))/\epsilon_k \leq 0$$

che prova la (3). La (4) segue da

$$f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1}$$

ricordando che  $\epsilon_k > \epsilon_{k+1}$ .



# Proprietà di convergenza

## Teorema

*Siano soddisfatte le ipotesi seguenti:*

- *esiste  $x^* \in \mathcal{F}$  soluzione globale del problema vincolato;*
- *per ogni  $k$ , la funzione  $P_{\epsilon_k}(x)$  ammette minimo globale  $x^k$ ;*
- *tutti i punti  $x^k$  rimangono in un insieme compatto  $D$ .*

*Allora,*

- 1  $\lim_{k \rightarrow \infty} q(x^k) = 0;$
- 2  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(x^*);$
- 3  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^*);$
- 4 *ogni punto di accumulazione di  $\{x^k\}$  è soluzione globale del problema vincolato;*
- 5  $\lim_{k \rightarrow \infty} q(x^k)\epsilon_k = 0;$

## Proprietà di convergenza – dim.

**Dim.** Sappiamo che

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \geq f(x^0) + q(x^k)/\epsilon_k$$

ovvero

$$f(x^*) - f(x^0) \geq q(x^k)/\epsilon_k.$$

Quando  $k \rightarrow \infty$ , deve risultare

$$\lim_{k \rightarrow \infty} q(x^k) = 0$$

(altrimenti si avrebbe un assurdo) il che prova la (1).

Sia ora  $\bar{x}$  un qualunque punto di accumulazione di  $\{x^k\} \subset D$  compatto. Risulta intanto che  $q(\bar{x}) = 0$ , cioè che  $\bar{x} \in \mathcal{F}$ .

## Proprietà di convergenza – dim. (segue)

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) \geq f(x^k)$$

Quindi, le successioni  $\{P_{\epsilon_k}(x^k)\}$  e  $\{f(x^k)\}$  sono monotone non decrescenti e limitate superiormente, quindi ammettono limite.

$$f(x^*) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k$$

$$f(x^*) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = f(\bar{x}) + \lim_{k \rightarrow \infty} q(x^k)/\epsilon_k \geq f(\bar{x}) \geq f(x^*).$$

Da qui segue che valgono (2) e (3). Inoltre, che  $f(\bar{x}) = f(x^*)$ , cioè che  $\bar{x}$  è soluzione globale del problema vincolato e inoltre che vale la (5). □

# Esempio 1

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

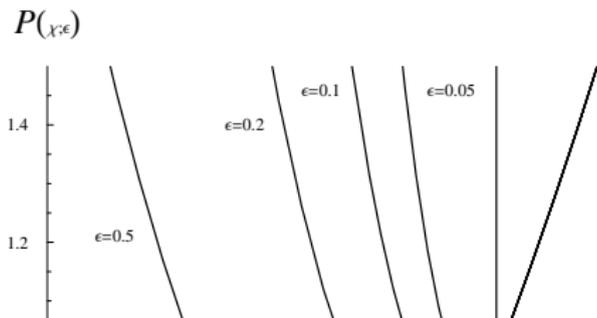
$$\begin{aligned} \min \quad & x^2 \\ & x \geq 1 \end{aligned}$$

Ammette  $x^* = 1$  come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = x^2 + \frac{1}{\epsilon} \max\{0, 1 - x\}^2$$

Grafici di  $P_\epsilon(x)$  ( $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$ )



## Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\begin{aligned} \min \quad & -x^4 \\ \text{s.t.} \quad & x = 1 \end{aligned}$$

Ammette (ovviamente)  $x^* = 1$  come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Grafici di  $P_\epsilon(x)$  ( $\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$ )

