# Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Martedì 8 Marzo 2016

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

# Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{llll} \min\limits_x & f(x) & f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} & \\ c.v & h(x)=0 & h:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p & p \le n \\ & g(x)\le 0 & g:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m & \end{array} \qquad (P_0)$$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme ammissibile di $(P_0)$
Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & h(x)=0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \min\limits_x & f(x) \\ c.v & g(x)\le 0 \end{array}$$

# Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) \le 0 \\ & -h(x) \le 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \le 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) + y_i^2 = 0, \ i = 1, \dots, m \end{array}$$

# Definizione

Teoricamente è possibile definire

$$q_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ +\infty & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\infty(x) = f(x) + q_\infty(x)$$

È evidente che:

- risolvere il problema $\min \; P_\infty(x)$ fornisce soluzioni del problema $(P_0)$.
- minimizzare $P_\infty(x)$ è (o può essere) molto "complicato"

# Definizione

Anziché $q_\infty(x)$, definiamo

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ > 0 & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\epsilon(x) = f(x) + \frac{1}{\epsilon} q(x)$$

**N.B.**:

- se $f(x)$ e $q(x)$ sono cont. differenziabili, allora anche $P_\epsilon(x)$ lo è
- per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\epsilon \to 0} P_\epsilon(x) = P_\infty(x)$

# Espressione di q(x)

Il termine $q(x)$ deve "penalizzare con continuità" l'eventuale inammissibilità di $x$

P.es., con riferimento a $(P_0)$,

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} [h_i(x)]^2 + \sum_{i=1}^{m} [\max\{0, g_i(x)\}]^2$$

- per nessun valore di $\epsilon > 0$, min $P_\epsilon(x)$ è equivalente a $(P_0)$
- per ogni valore di $\epsilon > 0$, una min. non vincolata di $P_\epsilon(x)$ produce (in genere) un punto $x^* \notin \mathcal{F}$, cioè $q(x^*) > 0$

# Algoritmo di soluzione

**Algoritmo** `SEQPEN`

INPUT: `maxit`, $\tau > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

**for** $k = 0, 1, \dots,$ `maxit`

Trova una soluzione $(x(\epsilon_k))$ del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x). \tag{1}$$

**if** $q(x(\epsilon_k)) \leq \tau$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

**endfor**

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x(\epsilon_k)$

# Proprietà di convergenza

Sia $\mathcal{F}_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |h(x)| \leq \sigma, \ g(x) \leq \sigma\}$ insieme ammissibile "rilassato" $(\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_\sigma)$

**Teorema (Conv. a minimi globali)**

*Siano soddisfatte le ipotesi seguenti:*

- *esiste un $\sigma > 0$ t.c. $\mathcal{F}_\sigma$ è compatto;*
- *per ogni $k$, la funzione $P_{\epsilon_k}(x)$ ammette minimo globale $x^k$.*

*Allora, $\{x^k\}$ ammette punti limite ed ogni punto limite è un minimo globale di $(P_0)$*

# Esempio 1

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

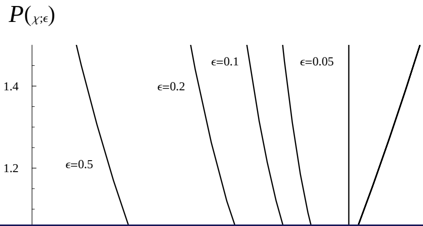
$$\min \; x^2$$
$$x \geq 1$$

Ammete $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = x^2 + \frac{1}{\epsilon}\max\{0, 1-x\}^2$$

Grafici di $P_\epsilon(x)$ ($\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$)



# Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

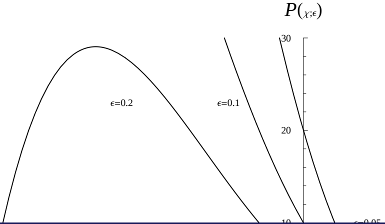
$$\min\ -x^4$$
$$x = 1$$

Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Grafici di $P_\epsilon(x)$ ($\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05$)



# Algoritmo SEQPEN modificato

**Algoritmo** $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: $\texttt{maxit}$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

**for** $k = 0, 1, \dots, \texttt{maxit}$

Calcola $x(\epsilon_k)$ t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x(\epsilon_k))\| \le \tau_k$

**if** $q(x(\epsilon_k)) \le \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

**endfor**

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x(\epsilon_k)$

# Proprietà di convergenza

## Teorema

*Sia* $\{x_k\}$ *una successione t.c.* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$ *e* $\{x_k\}_K$ *una sottosucc. convergente ad* $x^*$ *t.c. siano lin. indipendenti*

$$\nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*),\ \nabla h_j(x^*),\ \forall\, j.$$

*Allora,* $x^*$ *è un punto di KKT di* $(P_0)$ *con molt.* $\lambda^*$ *e* $\mu^*$ *t.c.*

$$\left\{ \frac{1}{\epsilon_k} \max\{g(x_k), 0\} \right\}_K \to \lambda^*$$

$$\left\{ \frac{1}{\epsilon_k} h(x_k) \right\}_K \to \mu^*$$

# Esempio 3

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

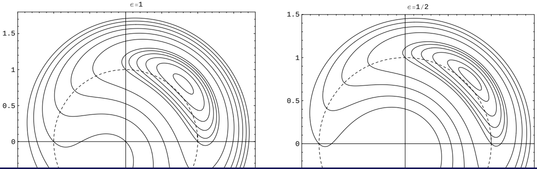
$$\begin{array}{c} \min \ -x-y \\ x^2+y^2=1 \end{array}$$

Ammete $(x^*, y^*) = (1,\ 1)/\sqrt{2}$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x-y+\frac{1}{\epsilon}(1-x^2-y^2)^2$$

Grafici di $P_\epsilon(x)$ $(\epsilon = 1, 0.5, 0.05)$



# Tanto per cominciare

Consideriamo il problema con soli vincoli di uguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ c.v. & h(x) = 0 \end{array}$$

Funzione Lagrangiana: $L(x, \mu) = f(x) + \mu^\top h(x)$

con gradiente (vi ricordo):

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x, \mu) &= \nabla f(x) + \nabla h(x)\mu \\ \nabla_\mu L(x, \mu) &= h(x) \end{aligned}$$

Percui, le C.N. di ottimo si possono riassumere in: $\nabla L(x, \mu) = 0$