

# Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi<sup>1</sup>

Martedì 15 Marzo 2016

---

<sup>1</sup>Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

Abbiamo due alternative:

$$1) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$L_0(x, y, \lambda; c) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{c} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2$$

$$2) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + s_i = 0, \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Abbiamo due alternative:

$$1) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2$$

$$= f(x) + \lambda^T g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

$$2) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + s_i = 0, \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$L_a(x, s, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + s_i) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Abbiamo due alternative:

$$1) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned} L_a(x, y, \lambda; \epsilon) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2 \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4) \end{aligned}$$

$$2) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + s_i = 0, \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$L_a(x, s, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + s_i) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Abbiamo due alternative:

$$1) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned} L_a(x, y, \lambda; \epsilon) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2 \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4) \end{aligned}$$

$$2) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + s_i = 0, \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$L_a(x, s, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + s_i) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 1

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Abbiamo due alternative:

$$1) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\begin{aligned} L_a(x, y, \lambda; \epsilon) &= f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + y_i^2) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2)^2 \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4) \end{aligned}$$

$$2) \quad g_i(x) \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad g_i(x) + s_i = 0, \quad s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$L_a(x, s, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + s_i) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2$$

# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Se consideriamo l'**opzione 1**, quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati  $\epsilon$  e  $\lambda$ , bisogna "risolvere"

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Se consideriamo l'**opzione 1**, quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati  $\epsilon$  e  $\lambda$ , bisogna "risolvere"

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$





# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Se consideriamo l'**opzione 1**, quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati  $\epsilon$  e  $\lambda$ , bisogna "risolvere"

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 2

Se consideriamo l'**opzione 1**, quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, y, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top g(x) + \frac{1}{\epsilon} \|g(x)\|^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

fissati  $\epsilon$  e  $\lambda$ , bisogna “risolvere”

$$\min_{x,y} L_a(x, y, \lambda; \epsilon)$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 3

Se consideriamo l'**opzione 2**, quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array}$$

ovvero

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, s, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + s_i) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2$$

fissati  $\epsilon$  e  $\lambda$ , bisogna "risolvere"

$$\begin{array}{ll} \min_{x,s} & L_a(x, s, \lambda; \epsilon) \\ \text{c.v.} & s \geq 0 \end{array}$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 3

Se consideriamo l'**opzione 2**, quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, s, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + s_i) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2$$

fissati  $\epsilon$  e  $\lambda$ , bisogna “risolvere”

$$\begin{array}{ll} \min_{x,s} & L_a(x, s, \lambda; \epsilon) \\ \text{c.v.} & s \geq 0 \end{array}$$



# Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 3

Se consideriamo l'**opzione 2**, quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, s, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + s_i) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2$$

fissati  $\epsilon$  e  $\lambda$ , bisogna “risolvere”

$$\begin{array}{ll} \min_{x,s} & L_a(x, s, \lambda; \epsilon) \\ \text{c.v.} & s \geq 0 \end{array}$$



## Problemi con soli vincoli di disuguaglianza – 3

Se consideriamo l'**opzione 2**, quindi

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad \text{ovvero} \quad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + s_i = 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

abbiamo

$$L_a(x, s, \lambda; \epsilon) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(x) + s_i) + \frac{1}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + s_i)^2$$

fissati  $\epsilon$  e  $\lambda$ , bisogna “risolvere”

$$\begin{array}{ll} \min_{x,s} & L_a(x, s, \lambda; \epsilon) \\ \text{c.v.} & s \geq 0 \end{array}$$



# Gradiente della Lagrangiana

$$\nabla_x L_a = \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \frac{2}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2) \nabla g_i(x)$$

$$\nabla_\lambda L_a = g(x) + y^2$$

$$\nabla_{y_i} L_a = \frac{4}{\epsilon} y_i \left( \epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2 \right)$$

Quindi, ponendo  $\nabla_{y_i} L_a = 0$  otteniamo

$$y_i \left( \epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2 \right) = 0$$

ovvero

$$y_i^2 = \begin{cases} 0 & \text{caso A} \\ \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i(x) \right\} & \text{caso B} \end{cases}$$



# Gradiente della Lagrangiana

$$\nabla_x L_a = \nabla f(x) + \nabla g(x)\lambda + \frac{2}{\epsilon} \sum_{i=1}^m (g_i(x) + y_i^2) \nabla g_i(x)$$

$$\nabla_\lambda L_a = g(x) + y^2$$

$$\nabla_{y_i} L_a = \frac{4}{\epsilon} y_i \left( \epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2 \right)$$

Quindi, ponendo  $\nabla_{y_i} L_a = 0$  otteniamo

$$y_i \left( \epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x) + y_i^2 \right) = 0$$

ovvero

$$y_i^2 = \begin{cases} 0 & \text{casoA} \\ \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i(x) \right\} & \text{casoB} \end{cases}$$





# Vogliamo minimizzare

quindi, i termini

$$(\epsilon\lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

valgono:

$$\begin{cases} 0 & \text{caso A} \\ 2 \max\{0, -\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i\}(\epsilon\frac{\lambda_i}{2} + g_i) + \max\{0, -\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i\}^2 & \text{caso B} \end{cases}$$

Nel caso B, in particolare quando  $-\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i > 0$ , si ottiene

$$-\left(\epsilon\frac{\lambda_i}{2} + g_i(x)\right)^2 < 0$$

Quindi si può concludere che il minimo rispetto alle  $y_i$  lo si ottiene per

$$y_i^2 = \max\left\{0, -\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i\right\}.$$



# Vogliamo minimizzare

quindi, i termini

$$(\epsilon\lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

valgono:

$$\begin{cases} 0 & \text{caso A} \\ 2 \max\{0, -\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i\}(\epsilon\frac{\lambda_i}{2} + g_i) + \max\{0, -\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i\}^2 & \text{caso B} \end{cases}$$

Nel caso B, in particolare quando  $-\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i > 0$ , si ottiene

$$-\left(\epsilon\frac{\lambda_i}{2} + g_i(x)\right)^2 < 0$$

Quindi si può concludere che il minimo rispetto alle  $y_i$  lo si ottiene per

$$y_i^2 = \max\left\{0, -\epsilon\frac{\lambda_i}{2} - g_i\right\}.$$



# Vogliamo minimizzare

quindi, i termini

$$(\epsilon \lambda_i y_i^2 + 2g_i(x)y_i^2 + y_i^4)$$

valgono:

$$\begin{cases} 0 & \text{caso A} \\ 2 \max\{0, -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i\} (\epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i) + \max\{0, -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i\}^2 & \text{caso B} \end{cases}$$

Nel caso B, in particolare quando  $-\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i > 0$ , si ottiene

$$-\left(\epsilon \frac{\lambda_i}{2} + g_i(x)\right)^2 < 0$$

Quindi si può concludere che il minimo rispetto alle  $y_i$  lo si ottiene per

$$y_i^2 = \max\left\{0, -\epsilon \frac{\lambda_i}{2} - g_i\right\}.$$



# Espressione per vincoli di disuguaglianza

$$L_a(x, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^T \left( g(x) + \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda}{2} - g(x) \right\} \right) \\ + \frac{1}{\epsilon} \left\| g(x) + \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda}{2} - g(x) \right\} \right\|^2$$

Ovvero

$$L_a(x, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^T \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} + \frac{1}{\epsilon} \left\| \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} \right\|^2$$



# Espressione per vincoli di disuguaglianza

$$L_a(x, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top \left( g(x) + \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda}{2} - g(x) \right\} \right) \\ + \frac{1}{\epsilon} \left\| g(x) + \max \left\{ 0, -\epsilon \frac{\lambda}{2} - g(x) \right\} \right\|^2$$

Ovvero

$$L_a(x, \lambda; \epsilon) = f(x) + \lambda^\top \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} + \frac{1}{\epsilon} \left\| \max \left\{ g(x), -\epsilon \frac{\lambda}{2} \right\} \right\|^2$$



# LANCELOT B

Ultima versione del pacchetto LANCELOT disponibile nella collezione di routine per l'ottimizzazione nonlineare GALAHAD<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup><http://www.galahad.rl.ac.uk/>



# Introduzione

Consideriamo il problema (con soli vincoli di **disuguaglianza**)

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \geq 0 \end{array}$$

- $\mathcal{F}$  regione ammissibile
- $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \text{Int}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) > 0\}$
- Assumiamo  $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \neq \emptyset$



# Introduzione

Consideriamo il problema (con soli vincoli di **disuguaglianza**)

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \geq 0 \end{array}$$

- $\mathcal{F}$  regione ammissibile
- $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \text{Int}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) > 0\}$
- Assumiamo  $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \neq \emptyset$





# Funzione di Barriera

La più diffusa funzione di “barriera” per il problema considerato è:

$$P(x; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log g_i(x), \text{ dove}$$

$$b(x) = - \sum_{i=1}^m \log g_i(x) \text{ (termine di barriera).}$$

## N.B.

- $b(x)$  (e quindi  $P(x; \mu)$ ) è definita per ogni  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$
- Supponiamo  $b(x) = +\infty$  per ogni  $x \notin \overset{\circ}{\mathcal{F}}$

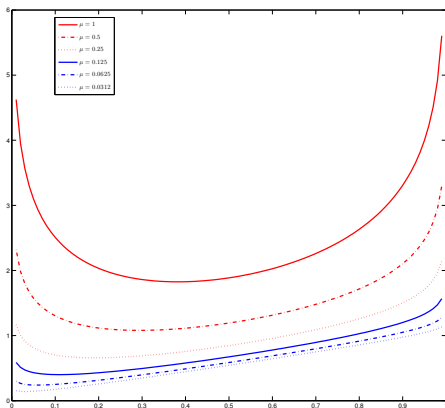


# Esempio 1

$$\begin{array}{ll} \min_x & x \\ \text{c.v.} & x \geq 0 \\ & 1 - x \geq 0 \end{array}$$

La funzione di barriera per il problema è

$$P(x; \mu) = x - \mu \log x - \mu \log(1-x)$$

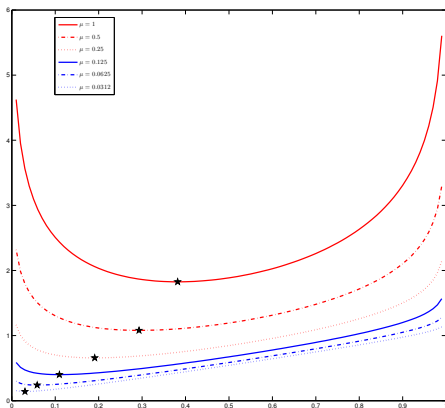


# Esempio 1

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x \\ \text{c.v.} \quad & x \geq 0 \\ & 1 - x \geq 0 \end{aligned}$$

La funzione di barriera per il problema è

$$P(x; \mu) = x - \mu \log x - \mu \log(1-x)$$

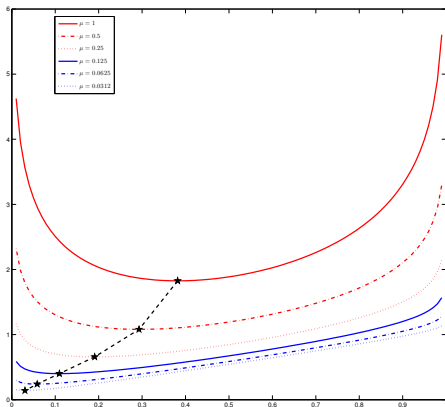


# Esempio 1

$$\begin{aligned} \min_x \quad & x \\ \text{c.v.} \quad & x \geq 0 \\ & 1 - x \geq 0 \end{aligned}$$

La funzione di barriera per il problema è

$$P(x; \mu) = x - \mu \log x - \mu \log(1-x)$$



## Esempio 2

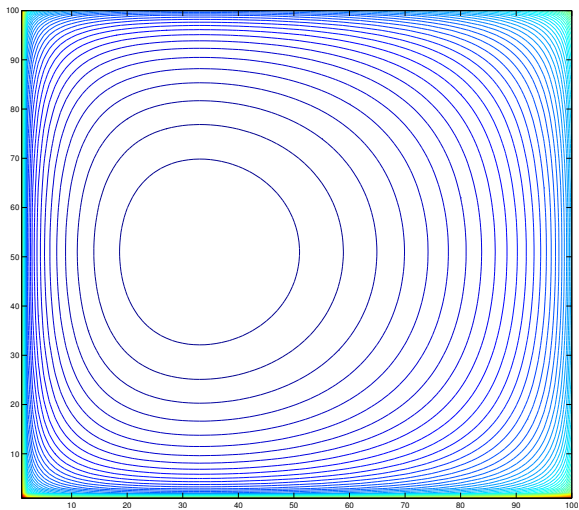
$$\begin{aligned} \min_x \quad & (x_1 + 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \\ \text{c.v.} \quad & x_1 \in [0, 1], \quad x_2 \in [0, 1] \end{aligned}$$

La funzione di barriera per il problema è

$$\begin{aligned} P(x; \mu) = & (x_1 + 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 \\ & -\mu[\log x_1 + \log(1 - x_1)] \\ & -\mu[\log x_2 + \log(1 - x_2)] \end{aligned}$$



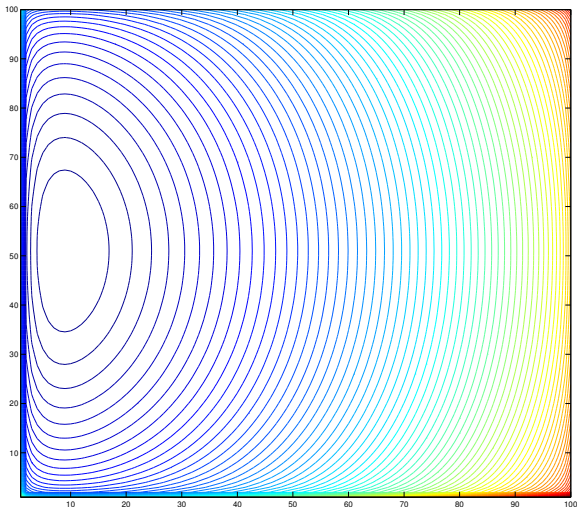
## Esempio 2



$$\mu = 1$$



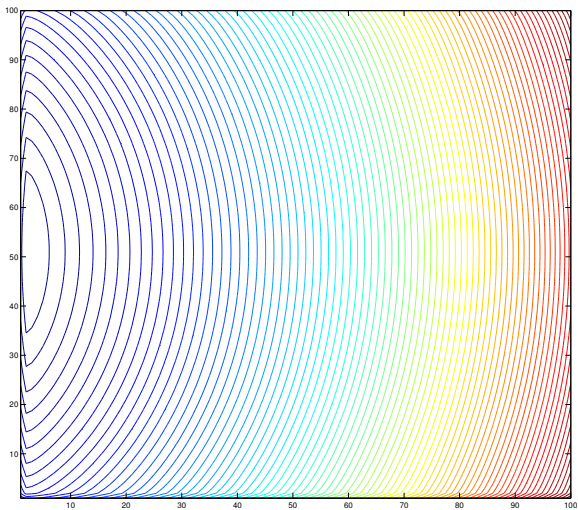
## Esempio 2



$$\mu = 0.1$$



## Esempio 2



$$\mu = 0.01$$





## Esempio 2

per  $\mu = 1 \rightarrow 0.0085$  abbiamo

