Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Martedì 19 Aprile 2016

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo globale** (secondo Pareto) se:

$$\nexists\ x \in \mathcal{F}\ t.c.\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo locale** (secondo Pareto) se:

esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\nexists\ x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)\ t.c.\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo globale** (secondo Pareto) se:

$$\nexists\ x \in \mathcal{F}\ t.c.\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo locale** (secondo Pareto) se:

esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\nexists\ x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)\ t.c.\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Definizione di ottimalità debole

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo globale debole** (secondo Pareto) se:

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \ t.c. \ f(x) < f(x^*)$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo locale debole** (secondo Pareto) se:

esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \ t.c. \ f(x) < f(x^*)$$

Caso convesso ed equivalenza

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

siano f_i convesse su $\mathcal{F}$ convesso. Sotto queste ipotesi il problema e **convesso**

Proposizione

Per un problema multiobiettivo convesso ogni ottimo locale di Pareto è anche ottimo globale

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : \; f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta) x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : \; f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta) x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\ x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) :\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta) x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*) \in \mathcal{F}$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar\beta$ tale che $x_{\bar\beta} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar\beta f(x^\circ) + (1-\bar\beta) f(x^*) \leq_P f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar\beta f(x^\circ) + (1-\bar\beta) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*) \in \mathcal{F}$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq_P f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*) \in \mathcal{F}$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq_P f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*) \in \mathcal{F}$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq_P f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Introduzione

Dato il problema multiobiettivo

$$\min_x \; f(x)$$
$$s.t. \; g(x) \leq 0$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))^\top$
- $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))^\top$

introduciamo la funzione Lagrangiana del problema

$$L(x, \lambda, \mu) = \lambda^\top f(x) + \mu^\top g(x)$$

e sia

$$\mathcal{F} = \{x \in \Re^n : \; g(x) \leq 0\}$$

C.N. di Fritz-John

Teorema

Condizione necessaria affinché un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori $\lambda \in \Re^k$, $\mu \in \Re^m$ tali che:

$$\begin{aligned}
&\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0 \\
&\mu^\top g(\bar{x}) = 0 \\
&(\lambda, \mu) \geq 0, \ (\lambda, \mu) \neq 0
\end{aligned}$$

N.B. nell'enunciato delle teorema nulla vieta che possano essere identicamente nulli i moltiplicatori λ_i associati alle funzioni obiettivo.

Se assumiamo che $\bar{x}$ oltre ad essere un ottimo secondo Pareto è anche un **punto regolare** per i vincoli, allora è possibile asserire che almeno uno dei moltiplicatori λ_i è strettamente positivo

C.N. di Karush-Kuhn-Tucker

Teorema

Sia $\bar{x} \in \mathcal{F}$ *un punto in cui sono* lin. indipendenti i gradienti dei vincoli attivi. *Condizione necessaria affinché* $\bar{x}$ *sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori* $\lambda \in \Re^k$, $\mu \in \Re^m$ *tali che:*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$
$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$
$$(\lambda, \mu) \geq 0, \;\; \lambda \neq 0$$