

# Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi<sup>1</sup>

Martedì 19 Aprile 2016

---

<sup>1</sup>Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

# Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min & f_1(x), \dots, f_k(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è **ottimo globale** (secondo Pareto) se:

$$\nexists x \in \mathcal{F} \text{ t.c. } f(x) \leq_P f(x^*)$$

Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è **ottimo locale** (secondo Pareto) se:

esiste un  $\epsilon > 0$  tale che

$$\nexists x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \text{ t.c. } f(x) \leq_P f(x^*)$$

# Definizione di ottimalità debole

Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è **ottimo globale debole** (secondo Pareto) se:

$$\nexists x \in \mathcal{F} \text{ t.c. } f(x) < f(x^*)$$

Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è **ottimo locale debole** (secondo Pareto) se:

esiste un  $\epsilon > 0$  tale che

$$\nexists x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \text{ t.c. } f(x) < f(x^*)$$

# Caso convesso ed equivalenza

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min & f_1(x), \dots, f_k(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

siano  $f_i$  convesse su  $\mathcal{F}$  convesso. Sotto queste ipotesi il problema è **convesso**

## Proposizione

*Per un problema multiobiettivo convesso ogni ottimo locale di Pareto è anche ottimo globale*

# Caso convesso ed equivalenza

**Dim.** Sia  $x^*$  un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste  $\epsilon > 0$  t.c.

$$\nexists x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che  $x^*$  non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un  $x^\circ \in \mathcal{F}$ :

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di  $\mathcal{F}$  segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta)x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni  $\beta \in [0, 1]$ .

## Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle  $f_i$  segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1 - \beta)f(x^*) \in \mathcal{F}$$

È inoltre possibile determinare un valore  $\bar{\beta}$  tale che  $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$ .

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta}f(x^\circ) + (1 - \bar{\beta})f(x^*) \leq_P f(x^*)$$

Quindi  $f(\hat{x}) = f(x^*)$  e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta}f(x^\circ) + (1 - \bar{\beta})f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma  $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$  il che è in contrasto con  $f(x^*) \leq f(x^\circ)$ .

# Introduzione

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$
- $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$

introduciamo la funzione Lagrangiana del problema

$$L(x, \lambda, \mu) = \lambda^T f(x) + \mu^T g(x)$$

e sia

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathfrak{R}^n : g(x) \leq 0\}$$

## C.N. di Fritz-John

## Teorema

*Condizione necessaria affinché un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  tali che:*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$

$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \geq 0, (\lambda, \mu) \neq 0$$

**N.B.** nell'enunciato del teorema nulla vieta che possano essere identicamente nulli i moltiplicatori  $\lambda_i$  associati alle funzioni obiettivo.

Se assumiamo che  $\bar{x}$  oltre ad essere un ottimo secondo Pareto è anche un **punto regolare** per i vincoli, allora è possibile asserire che almeno uno dei moltiplicatori  $\lambda_i$  è strettamente positivo

## C.N. di Karush-Kuhn-Tucker

## Teorema

*Sia  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  un punto in cui sono lin. indipendenti i gradienti dei vincoli attivi. Condizione necessaria affinché  $\bar{x}$  sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  tali che:*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$

$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \geq 0, \lambda \neq 0$$