

Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi¹

Martedì 26 Aprile 2016

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR



Introduzione

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min_x & f(x) \\ \text{s.t.} & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$
- $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$

introduciamo la funzione Lagrangiana del problema

$$L(x, \lambda, \mu) = \lambda^T f(x) + \mu^T g(x)$$

e sia

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$$



C.S. di Karush-Kuhn-Tucker

Teorema

Siano $f(x)$ e $g(x)$ vettori di funzioni convesse. Condizione sufficiente affinché \bar{x} sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ tali che:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$

$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$

$$\lambda > 0, \mu \geq 0$$

N.B. tutti i moltiplicatori λ_i associati alle funzioni obiettivo devono essere **strettamente positivi**



C.N.S. di Karush-Kuhn-Tucker

Per l'ottimalità debole secondo Pareto e nel caso convesso si può stabilire un risultato del tutto analogo al caso singolo obiettivo.

Teorema

Siano $f(x)$ e $g(x)$ vettori di funzioni convesse. Condizione necessaria e sufficiente affinché \bar{x} sia ottimo debole secondo Pareto è che esistano dei vettori $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ tali che:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$

$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \geq 0, \lambda \neq 0$$



Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- Metodi senza preferenze nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- Metodi a posteriori nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore
- Metodi a priori nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore
- Metodi interattivi nei quali il decisore rivela le proprie preferenze basandosi sul procedere dell'algoritmo di risoluzione, guidando in tal modo il processo risolutivo.



Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- Metodi senza preferenze nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- Metodi a posteriori nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore
- Metodi a priori nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore
- Metodi interattivi nei quali il decisore rivela le proprie preferenze basandosi sul procedere dell'algorithmo di risoluzione, guidando in tal modo il processo risolutivo.



Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- Metodi senza preferenze nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- Metodi a posteriori nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore
- Metodi a priori nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto “migliore” per il decisore
- Metodi interattivi nei quali il decisore rivela le proprie preferenze basandosi sul procedere dell'algorithmo di risoluzione, guidando in tal modo il processo risolutivo.



Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- Metodi senza preferenze nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- Metodi a posteriori nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore
- Metodi a priori nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto “migliore” per il decisore
- Metodi interattivi nei quali il decisore rivela le proprie preferenze basandosi sul procedere dell'algoritmo di risoluzione, guidando in tal modo il processo risolutivo.



Metodi senza preferenze – GOAL programming

Dopo aver calcolato il vettore ideale degli obiettivi z^{id} si definisce il problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \|z^{id} - f(x)\|_p \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

dove $\|\cdot\|_p$ è la norma p di un vettore ($1 \leq p \leq \infty$). In particolare, se $v \in \mathbb{R}^k$

- $1 \leq p < \infty$, $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |v_i|^p \right)^{1/p}$
- $p = \infty$, $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_k|\}$



Metodi senza preferenze – GOAL programming

Sono particolarmente interessanti le norme $p = 1$ e $p = \infty$ perchè consentono di ottenere problemi *lineari* partendo da problemi multiobiettivo lineari. Infatti, sia

$$\begin{aligned} \min_x & (c_1^T x, c_2^T x, \dots, c_k^T x) \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{aligned}$$

Otteniamo

- quando $p = 1$

$$\begin{aligned} \min_x & \sum_{i=1}^k \|c_i^T x - z^{id}\| \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{aligned}$$

- quando $p = \infty$

$$\begin{aligned} \min_x & \max_{i=1, \dots, k} \{\|c_i^T x - z^{id}\|\} \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{aligned}$$



Metodi senza preferenze – GOAL programming

- $p = 1$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^k \alpha_i \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_i \leq c_i^\top x - z^{id} \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

- $p = \infty$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \alpha \leq c_i^\top x - z^{id} \leq \alpha, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

