Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Martedì 26 Aprile 2016

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Introduzione

Dato il problema multiobiettivo

$$\min_x \; f(x)$$
$$s.t. \; g(x) \le 0$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^\top$
- $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^\top$

introduciamo la funzione Lagrangiana del problema

$$L(x, \lambda, \mu) = \lambda^\top f(x) + \mu^\top g(x)$$

e sia

$$\mathcal{F} = \{x \in \Re^n : \; g(x) \le 0\}$$

C.S. di Karush-Kuhn-Tucker

Teorema

Siano $f(x)$ e $g(x)$ vettori di funzioni convesse. Condizione sufficiente affinché $\bar{x}$ sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori $\lambda \in \Re^k$, $\mu \in \Re^m$ tali che:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$
$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$
$$\lambda > 0, \ \ \mu \geq 0$$

N.B. tutti i moltiplicatori λ_i associati alle funzioni obiettivo devono essere **strettamente positivi**

C.N.S. di Karush-Kuhn-Tucker

Per l'ottimalità debole secondo Pareto e nel caso convesso si può stabilire un risultato del tutto analogo al caso singolo obiettivo.

Teorema

Siano $f(x)$ e $g(x)$ vettori di funzioni convesse. Condizione necessaria e sufficiente affinché $\bar{x}$ sia ottimo debole secondo Pareto è che esistano dei vettori $\lambda \in \Re^k$, $\mu \in \Re^m$ tali che:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$
$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$
$$(\lambda, \mu) \geq 0, \;\; \lambda \neq 0$$

Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- *Metodi senza preferenze* nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- *Metodi a posteriori* nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore
- *Metodi a priori* nei quali il decisore specifica le sue preferenza prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore
- *Metodi interattivi* nei quali il decisore rivela le proprie preferenze basandosi sul procedere dell'algoritmo di risoluzione, guidando in tal modo il processo risolutivo.

Metodi senza preferenze – GOAL programming

Dopo aver calcolato il vettore ideale degli obiettivi z^{id} si definisce il problema

$$\begin{array}{l} \min_x \ \|z^{id} - f(x)\|_p \\ s.t.\ g(x) \leq 0 \end{array}$$

dove $\|\cdot\|_p$ è la norma p di un vettore $(1 \leq p \leq \infty)$. In particolare, se $v \in \Re^k$

- $1 \leq p < \infty$, $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |v_i|^p\right)^{1/p}$
- $p = \infty$, $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \ldots, |v_k|\}$

Metodi senza preferenze – GOAL programming

Sono particolarmente interessanti le norme $p = 1$ e $p = \infty$ perchè consentono di ottenere problemi *lineari* partendo da problemi multiobiettivo lineari. Infatti, sia

$$\min_x \ (c_1^\top x, c_2^\top x, \dots, c_k^\top x)$$
$$s.t. \ Ax \leq b$$

Otteniamo

- quando $p = 1$

$$\min_x \ \sum_{i=1}^{k} \|c_i^\top x - z^{id}\|$$
$$s.t. \ Ax \leq b$$

- quando $p = \infty$

$$\min_x \ \max_{i=1,\dots,k} \{\|c_i^\top x - z^{id}\|\}$$
$$s.t. \ Ax \leq b$$

Metodi senza preferenze – GOAL programming

- $p = 1$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_x \ & \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \\ s.t.\ & \alpha_i \leq c_i^\top x - z^{id} \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

- $p = \infty$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_x \ & \alpha \\ s.t.\ & \alpha \leq c_i^\top x - z^{id} \leq \alpha, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$