Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Martedì 10 Maggio 2016

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Financial planning and control

- Capitale disponibile (ora) $b = 55000€$
- Capitale desiderato tra $Y = Nv = 15$ anni: $G = 80000€$
    - $N = 3$, $v = 5$
- Due investimenti: STOCK, BOND
- Rendimenti incerti:
    - 1.25, 1.14 se mercati finanziari UP
    - 1.06, 1.12 se mercati finanziari DW
- X capitale disponibile tra 15 anni
    - Se $X < G$, $G - x$ in prestito al tasso $r = 4\%$
    - Se $X > G$, $X - G$ in deposito con rend. $q = 1\%$

Decisione, osservazione, ricorsione

decisione iniziale	$t = 0$	(u_0^1, u_0^2)
osservazione		ω_1 (UP o DW?)
decisione di ricorsione	$t = 5$	$(u_1^1(\omega_1), u_1^2(\omega_1))$
osservazione		ω_2 (UP o DW?)
decisione di ricorsione	$t = 10$	$(u_2^1(\omega_1, \omega_2), u_2^2(\omega_1, \omega_2))$
osservazione		ω_3 (UP o DW?)
decisione di ricorsione	$t = 15$	$(u_3^1(\omega_1, \omega_2, \omega_3), u_3^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3))$

- $i = 0, 1, 2$, $j = 1, 2$: $u_i^j \equiv$ capitale inv. in j nello stadio i
  $j = 1$, STOCK; $j = 2$, BOND
- $i = 3$: $u_3^1 \equiv$ prestito al tasso r
- $i = 3$: $u_3^2 \equiv$ deposito al tasso q

Stadio iniziale o primo stadio

$$
\begin{aligned}
u_0^1 &\geq 0 \\
u_0^2 &\geq 0 \\
u_0^1 + u_0^2 &= b = 55000
\end{aligned}
$$

Primo stadio di ricorsione

Il capitale disponibile dopo i primi 5 anni è:

- $1.25u_0^1 + 1.14u_0^2$ se $\omega_1 = UP$
- $1.06u_0^1 + 1.12u_0^2$ se $\omega_1 = DW$

Quindi, dobbiamo considerare i vincoli:

$$\begin{aligned}
1.25u_0^1 + 1.14u_0^2 &= u_1^1(UP) + u_1^2(UP) \\
1.06u_0^1 + 1.12u_0^2 &= u_1^1(DW) + u_1^2(DW)
\end{aligned}$$

Secondo stadio di ricorsione

Il capitale disponibile dopo i primi 10 anni è:

- $1.25u_1^1(UP) + 1.14u_1^2(UP)$ se $\omega_1 = UP, \omega_2 = UP$
- $1.06u_1^1(UP) + 1.12u_1^2(UP)$ se $\omega_1 = UP, \omega_2 = DW$
- $1.25u_1^1(DW) + 1.14u_1^2(DW)$ se $\omega_1 = DW, \omega_2 = UP$
- $1.06u_1^1(DW) + 1.12u_1^2(DW)$ se $\omega_1 = DW, \omega_2 = DW$

e quindi i vincoli sono:

$$\begin{aligned}
1.25u_1^1(UP) + 1.14u_1^2(UP) &= u_2^1(UP, UP) + u_2^2(UP, UP) \\
1.06u_1^1(UP) + 1.12u_1^2(UP) &= u_2^1(UP, DW) + u_2^2(UP, DW) \\
1.25u_1^1(DW) + 1.14u_1^2(DW) &= u_2^1(DW, UP) + u_2^2(DW, UP) \\
1.06u_1^1(DW) + 1.12u_1^2(DW) &= u_2^1(DW, DW) + u_2^2(DW, DW)
\end{aligned}$$

Terzo stadio di ricorsione

Alla fine dei 15 anni bisogna disporre di G€Il capitale disponibile alla fine dei 15 anni sarà:

- $1.25u_2^1(UP, UP) + 1.14u_2^2(UP, UP)$ se $\omega = UP, UP, UP$
- $1.25u_2^1(UP, DW) + 1.14u_2^2(UP, DW)$ se $\omega = UP, DW, UP$
- $1.25u_2^1(DW, UP) + 1.14u_2^2(DW, UP)$ se $\omega = DW, UP, UP$
- $1.25u_2^1(DW, DW) + 1.14u_2^2(DW, DW)$ se $\omega = DW, DW, UP$
- $1.06u_2^1(UP, UP) + 1.12u_2^2(UP, UP)$ se $\omega = UP, UP, DW$
- $1.06u_2^1(UP, DW) + 1.12u_2^2(UP, DW)$ se $\omega = UP, DW, DW$
- $1.06u_2^1(DW, UP) + 1.12u_2^2(DW, UP)$ se $\omega = DW, UP, DW$
- $1.06u_2^1(DW, DW) + 1.12u_2^2(DW, DW)$ se $\omega = DW, DW, DW$

Terzo stadio di ricorsione

I vincoli da imporre sono:

$$
\begin{array}{rcl}
1.25u_2^1(UP,UP) + 1.14u_2^2(UP,UP) & = & G - u_3^1(U,U,U) + u_3^2(U,U,U) \\
1.25u_2^1(UP,DW) + 1.14u_2^2(UP,DW) & = & G - u_3^1(U,D,U) + u_3^2(U,D,U) \\
1.25u_2^1(DW,UP) + 1.14u_2^2(DW,UP) & = & G - u_3^1(D,U,U) + u_3^2(D,U,U) \\
1.25u_2^1(DW,DW) + 1.14u_2^2(DW,DW) & = & G - u_3^1(D,D,U) + u_3^2(D,D,U) \\
1.06u_2^1(UP,UP) + 1.12u_2^2(UP,UP) & = & G - u_3^1(U,U,D) + u_3^2(U,U,D) \\
1.06u_2^1(UP,DW) + 1.12u_2^2(UP,DW) & = & G - u_3^1(U,D,D) + u_3^2(U,D,D) \\
1.06u_2^1(DW,UP) + 1.12u_2^2(DW,UP) & = & G - u_3^1(D,U,D) + u_3^2(D,U,D) \\
1.06u_2^1(DW,DW) + 1.12u_2^2(DW,DW) & = & G - u_3^1(D,D,D) + u_3^2(D,D,D)
\end{array}
$$

Funzione obiettivo

$$\max \sum_{j,k,h} 0.125(qu_3^2(j,k,h) - ru_3^1(j,k,h))$$

Risolvendo il problema otteniamo la seguente soluzione ottima:

$$u_0^1 = 41479.3, \quad u_0^2 = 13520.7$$

<table>
<tr><th>ω_1</th><th>ω_2</th><th>ω_3</th><th>u_1^1</th><th>u_1^2</th><th>u_2^1</th><th>u_2^2</th><th>u_3^1</th><th>u_3^2</th></tr>
<tr><td>up</td><td>up</td><td>up</td><td rowspan="4">65094.6</td><td rowspan="4">2168.14</td><td rowspan="2">83839.9</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>24799.9</td></tr>
<tr><td>up</td><td>up</td><td>down</td><td>0</td><td>8870.3</td></tr>
<tr><td>up</td><td>down</td><td>up</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">71428.6</td><td>0</td><td>1428.57</td></tr>
<tr><td>up</td><td>down</td><td>down</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>down</td><td>up</td><td>up</td><td rowspan="4">36743.2</td><td rowspan="4">22368</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">71428.6</td><td>0</td><td>1428.57</td></tr>
<tr><td>down</td><td>up</td><td>down</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>down</td><td>down</td><td>up</td><td rowspan="2">64000</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>down</td><td>down</td><td>down</td><td>12160</td><td>0</td></tr>
</table>