

Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G.Liuzzi

May 6, 2016

1 Northam Airlines

La compagnia aeree Northam Airlines (NA) deve stabilire come partizionare i posti su un nuovo aeromobile per la rotta Chicago-Detroit. L'aeromobile, un Airbus 321-200, può alloggiare al massimo 200 posti tipo “enconomy” (ECO). È possibile riservare una sezione a posti tipo “first-class” (FCL) ma ciascuno di tali posti ha una occupazione di spazio equivalente a 2 posti ECO. È anche possibile riservare una ulteriore sezioni a posti tipo “business-class” (BSN) ma ciascuno di tali posti occupa uno spazio pari a 1.5 posti ECO. È noto che il profitto per la compagnia dovuto alla vendita di un posto FCL è pari a quello di 3 posti ECO, mentre la vendita di un posto BSN equivale a 2 ECO.

Sulla base di alcune indagini di mercato, è noto che non tutte e tre le sezioni dell'aeromobile saranno sempre al completo. In particolare, l'azienda prevede tre possibili scenari (equiprobabili): (1) giorno infrasettimanale, viaggio serale o mattutino; (2) fine settimana o festivo; (3) giorno infrasettimanale, viaggio in media giornata.

Nello scenario 1, si pensa di poter vendere (al più) 20 posti FCL, 50 BSN e 200 ECO. Nello scenario 2, 10 posti FCL, 25 BSN e 175 ECO. Nello scenario 3, 5 FCL, 10 BSN e 150 ECO.

Assumiamo che non sia possibile vendere più biglietti dei posti effettivamente disponibili sull'aeromobile (in realtà, così non è dato che ogni compagnia effettua una certa dose di *over booking*).

	FCL	BSN	ECO
occupazione	2.0	1.5	1.0
profitto	3.0	2.0	1.0
scenario 1	20	50	200
scenario 2	10	25	175
scenario 3	5	10	150

2 Il problema dell'azienda agricola

Una azienda agricola europea è specializzata nella coltivazione di grano, frumento e barbabietole da zucchero e nell'allevamento di mucche da latte. In totale l'azienda possiede 500 acri di terra che possono essere utilizzati per i diversi tipi di coltivazione. È noto che ogni anno sono necessari per l'allevamento del bestiame almeno 200 Ton. di farina e 240 Ton. di frumento. Naturalmente l'azienda può fare fronte a queste necessita o con il proprio raccolto oppure acquistando da un grossista della zona. La produzione agricola dell'azienda oltre a servire per l'allevamento del bestiame può essere venduta sul mercato ad un prezzo di 170 euro per una Ton. di farina e 150 euro per una Ton. di frumento. I prezzi di acquisto di farina e frumento dal grossista sono maggiorati del 40% per via dei costi di trasporto che quest'ultimo deve sostenere. Per quanto riguarda la barbabietola, il prezzo di vendita è di 36 euro/Ton; tuttavia, la commissione europea ha imposto all'azienda una quota di produzione per le barbabietole di 6000 Ton. l'anno. La quantità di barbabietola eventualmente prodotta oltre questa quota potrà essere venduta ad un prezzo ribassato e precisamente a 10 euro/Ton.

Basandosi sulla propria esperienza passata, l'azienda agricola sa che ogni acro di terra coltivato a frumento, grano o barbabietola frutta rispettivamente 2.5, 3 e 20 Ton. Per finire, per ogni acro di terra l'azienda deve sostenere dei costi di semina che sono di 150 euro, 230 euro e 260 euro rispettivamente per grano, frumento e barbabietole. La tabella che segue riassume i dati fin qui esposti:

	Grano	Frumento	Barbabietole
Raccolto (Ton./acri)	2.5	3	20
Costo di semina (euro/acri)	150	230	260
Prezzo di vendita (euro/Ton.)	170	150	36 sotto 6000 Ton. 10 sopra 6000 Ton.
Prezzo di acquisto (euro/Ton.)	238	210	–
Richieste min. (Ton.)	200	240	–

Per scegliere le migliore strategia di semina, l'azienda dovrebbe ricorrere al seguente modello lineare.

Siano:

x_1 = acri di terra piantati a grano;

x_2 = acri di terra piantati a frumento;

x_3 = acri di terra piantati a barbabietole;

w_1 = ton. di grano venduto;

y_1 = ton. di grano acquistato;

w_2 = ton. di frumento venduto;

y_2 = ton. di frumento acquistato;

w_3 = ton. di barbabietole vendute a prezzo pieno;

w_4 = ton. di barbabietole vendute a prezzo ribassato;

Il problema da risolvere è il seguente:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + 238y_1 - 170w_1 + \\
 & + 210y_2 - 150w_2 - 36w_3 - 10w_4 \\
 \text{c.v.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
 & 2.5x_1 + y_1 - w_1 \geq 200 \\
 & 3x_2 + y_2 - w_2 \geq 240 \\
 & 20x_3 - w_3 - w_4 \geq 0 \\
 & w_3 \leq 6000 \\
 & x_i, y_j, w_h \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \quad h = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned}$$

Risolvendo il problema precedente otteniamo la seguente soluzione ottima

Coltivazione	Grano	Frumento	Barbabietole
x_i	120	80	300
Raccolto (Ton.)	300	240	6000
w_i	100	—	6000 ($w_4 = 0$)
y_i	—	—	
Profitto complessivo: 118600 euro			

L'azienda agricola pur soddisfatta da questa soluzione ottima sa perfettamente che di anno in anno e a parità di seminato, i raccolti possono variare sensibilmente. in particolare non è usuale avere stagioni con raccolti che sono superiori o inferiori del 20% rispetto alle stime usate nel problema precedente. Più precisamente, nel caso di una stagione particolarmente buona ogni acro seminato a grano, frumento e barbabietole frutterà, rispettivamente, 3, 3.6 e 24 Ton. di raccolto. Vice versa, nel caso di una stagione sotto la media ogni acro seminato a grano, frumento e barbabietole frutterà, rispettivamente, 2, 2.4 e 16 Ton. di raccolto. Possiamo a questo punto risolvere due ulteriori problemi di ottimizzazione corrispondenti agli scenari di stagione sopra e sotto la media e ottenere le seguenti soluzioni ottime:

stagione sopra la media: raccolto + 20%

Coltivazione	Grano	Frumento	Barbabietole
x_i	183.33	66.67	250
Raccolto (Ton.)	550	240	6000
w_i	350	—	6000 ($w_4 = 0$)
y_i	—	—	
Profitto complessivo: 167667 euro			

stagione sotto la media: raccolto - 20%

Coltivazione	Grano	Frumento	Barbabietole
x_i	100	25	375
Raccolto (Ton.)	200	60	6000
w_i	—	—	6000 ($w_4 = 0$)
y_i	—	180	
Profitto complessivo: 59950 euro			

Ragionando sul problema in esame è facile convincersi del fatto che la decisione sulle quantità di terra da seminare con le differenti colture (x_i , $i = 1, 2, 3$) deve essere presa *prima* di conoscere l'esito della stagione (se nella norma, sopra la media o sotto la media). Al contrario le quantità da vendere e comprare dei differenti prodotti (y_i , $i = 1, 2$ e w_j , $j = 1, 2, 3, 4$) dipendono dal raccolto.

Supponiamo di assegnare a ciascuno dei tre scenari disponibili (sotto la media, in media e sopra la media) un indice $s = 1, 2, 3$ e definire le variabili w_{js} , $j = 1, 2, 3, 4$ e y_{is} , $i = 1, 2$ dove, per esempio, w_{32} rappresenta la quantità di barbabietole vendute a prezzo pieno nel caso di un raccolto nella media.

Se ipotizziamo che l' s -esimo scenario abbia probabilità $p_s = 1/3$ con $\sum_{s=1}^3 p_s = 1$ allora possiamo scrivere il seguente problema

$$\begin{aligned}
 \min \quad & 150x_1 + 230x_2 + 260x_3 + \\
 & + \frac{1}{3}(238y_{11} - 170w_{11} + 210y_{21} - 150w_{21} - 36w_{31} - 10w_{41}) \\
 & + \frac{1}{3}(238y_{12} - 170w_{12} + 210y_{22} - 150w_{22} - 36w_{32} - 10w_{42}) \\
 & + \frac{1}{3}(238y_{13} - 170w_{13} + 210y_{23} - 150w_{23} - 36w_{33} - 10w_{43}) \\
 c.v. \quad & x_1 + x_2 + x_3 \leq 500 \\
 & 2x_1 + y_{11} - w_{11} \geq 200 \\
 & 2.4x_2 + y_{21} - w_{21} \geq 240 \\
 & 16x_3 - w_{31} - w_{41} \geq 0 \\
 & w_{31} \leq 6000 \\
 & 2.5x_1 + y_{12} - w_{12} \geq 200 \\
 & 3x_2 + y_{22} - w_{22} \geq 240 \\
 & 20x_3 - w_{32} - w_{42} \geq 0 \\
 & w_{32} \leq 6000 \\
 & 3x_1 + y_{13} - w_{13} \geq 200 \\
 & 3.6x_2 + y_{23} - w_{23} \geq 240 \\
 & 24x_3 - w_{33} - w_{43} \geq 0 \\
 & w_{33} \leq 6000 \\
 & x_i, y_{js}, w_{hs} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, \quad h = 1, 2, 3, 4, \quad s = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Risolvendo questo problema otteniamo la soluzione seguente:

		Grano	Frumento	Barbabietole
	x_i	170	80	250
s=1	Raccolto (Ton.)	340	192	4000
	w_{i1}	140	0	$w_{31} = 4000,$ $w_{41} = 0$
	y_{i1}	0	48	
s=2	Raccolto (Ton.)	425	240	5000
	w_{i2}	225	0	$w_{32} = 5000,$ $w_{42} = 0$
	y_{i2}	0	0	
s=3	Raccolto (Ton.)	510	288	6000
	w_{i3}	310	48	$w_{33} = 6000,$ $w_{43} = 0$
	y_{i3}	0	0	
Profitto complessivo: 108390 euro				

Notiamo che, a differenza di quanto accadeva nell'esempio del venditore di giornali, qui la v.a. ω non è direttamente associata ad un valore numerico. La v.a. ω ha valori sull'insieme $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ con $\omega_1 = \text{"stagione sopra la media"}$, $\omega_2 = \text{"stagione nella media"}$ e $\omega_3 = \text{"stagione sotto la media"}$. Nel problema precedente, gli unici elementi che dipendono dalla v.a. ω sono gli elementi della matrice della tecnologia essendo

$$T(\omega) = \begin{pmatrix} t_{11}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & t_{22}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & t_{33}(\omega) \end{pmatrix}.$$