1 Esempio: financial planning and control

Una famiglia americana sta progettando di mandare il proprio figlio al college. I genitori sanno che tra $Y = Nv$ anni, e cioè quando il figlio avrà raggiunto l'età per potersi iscrivere, la retta per l'intero periodo degli studi sarà di $G = 80000$ euro. Al momento i genitori dispongono di un budget di $b = 55000$ euro ($b < G$) e devono decidere come investire questi risparmi. Al termine degli Y anni i genitori potranno

1. prendere in prestito (con un interesse $r = 4\%$) i soldi che servono per arrivare a coprire la retta di G euro per l'iscrizione al college; oppure

2. depositare in un libretto di risparmio (con un interesse $q = 1\%$) i soldi avanzati dopo il pagamento della retta di iscrizione.

La famiglia può investire su I tipi diversi di investimento e può cambiare investimento ogni v anni. I genitori hanno, quindi, $N = Y/v$ differenti periodi di investimento.
Supponiamo, per semplicità di trattazione, che $I = 2$ (due soli tipi di investimento: stock o bond), $N = 3$ (tre periodi) e $v = 5$ (5 anni di durata minima di ogni investimento). A seconda dell'andamento dei mercati finanziari, si può avere un interesse di 1.25 per gli stock e 1.14 per i bond oppure 1.06 per gli stock e 1.12 per i bond con uguali probabilità (in condizione di massima incertezza). Il processo decisionale è quella gia visto in precedenza in cui abbiamo $N = 3$ stadi di ricorsione ovvero

$$
\begin{array}{rl}
u_0 = (u_0^1, u_0^2)^T \in \Re^2 & \text{decisione iniziale} \\
\omega_1 \in \Omega & \text{osservazione} \\
u_1(\omega_1) = (u_1^1(\omega_1), u_1^2(\omega_1))^T \in \Re^2 & \text{decisione di ricorsione} \\
\omega_2 \in \Omega & \text{osservazione} \\
u_2(\omega_1, \omega_2) = (u_2^1, u_2^2)^T \in \Re^{n_2} & \text{decisione di ricorsione} \\
\omega_3 \in \Omega & \text{osservazione} \\
u_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (u_3^1(\omega_1, \omega_2, \omega_3), u_3^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3))^T \in \Re^2 & \text{decisione di ricorsione}
\end{array}
$$

dove $\Omega = \{\text{up}, \text{down}\}$ contiene i due soli andamenti possibili per i mercati finanziari a cui corrispondono i tassi di interesse degli investimenti disponibili.

> Stadio iniziale: Le variabili di decisione sono indipendenti dalle v.a. (non anticipo) e rappresentano l'ammontare degli investimenti in stock e bond, rispettivamente, all'inizio degli $Y = 15$ anni. Esse devono soddisfare il seguente vincolo
> $$u_0^1 + u_0^2 = b,$$
> ovvero, inizialmente, gli investimenti devono essere esattamente uguali al budget di b euro disponibili all'inizio del periodo di investimento. Potremmo

scrivere questo vincolo, sinteticamente, come

$$\sum_{i \in I} u_0^i = b.$$

Primo stadio: Le variabili di decisione di primo stadio dipendono dalla v.a. ω_1 ma non da ω_2 e ω_3 (deve valere la proprietà di non anticipo). Come visto nel corso della sezione e considerato il fatto che ω_1 è una v.a. discreta, è possibile definire le funzioni $u_1^1(\omega_1)$ e $u_1^2(\omega_1)$ in forma tabellare ovvero definendo le variabili $u_1^1(\text{up})$, $u_1^1(\text{down})$, $u_1^2(\text{up})$ e $u_1^2(\text{down})$ che rappresentano le azioni intraprese nei due scenari di primo stadio possibili (ed equiprobabili), ovvero $\omega_1 = \text{up}$ e $\omega_1 = \text{down}$. Queste variabili di primo stadio devono soddisfare i vincoli

$$\begin{aligned} 1.25u_0^1 + 1.14u_0^2 &= u_1^1(\text{up}) + u_1^2(\text{up}) \\ 1.06u_0^1 + 1.12u_0^2 &= u_1^1(\text{down}) + u_1^2(\text{down}), \end{aligned}$$

cioè, qualunque sia la realizzazione della v.a. ω_1, quello che si investe nel quinto anno deve essere uguale al capitale disponibile nel quinto anno. Sintetizzando, possiamo scrivere questi vincoli come

$$\sum_{i \in I} t_{ji} u_0^i = \sum_{i \in I} u_1^i(j), \quad \forall\, j \in \Omega = \{\text{up},\ \text{down}\}.$$

Secondo stadio: Le variabili di decisione di secondo stadio dipendono dalle v.a. ω_1 e ω_2 ma non (sempre per la proprietà di non anticipo) dalla v.a. ω_3. Anche in questo caso è possibile definire le funzioni $u_2^1(\omega_1, \omega_2)$ e $u_2^2(\omega_1, \omega_2)$ mediante l'introduzione di tante variabili di decisione quanti sono i possibili scenari di secondo stadio. Dato che i possibili scenari sono dati da tutte le possibili combinazioni di una realizzazione di ω_1 con una realizzazione di ω_2, dobbiamo introdurre complessivamente 8 variabili e precisamente:

$$\begin{array}{c} u_2^1(\text{up}, \text{up}),\ u_2^1(\text{up}, \text{down}),\ u_2^1(\text{down}, \text{up}),\ u_2^1(\text{down}, \text{down}), \\ u_2^2(\text{up}, \text{up}),\ u_2^2(\text{up}, \text{down}),\ u_2^2(\text{down}, \text{up}),\ u_2^2(\text{down}, \text{down}). \end{array}$$

Queste variabili devono soddisfare i vincoli

$$\begin{aligned} 1.25u_1^1(\text{up}) + 1.14u_1^2(\text{up}) &= u_2^1(\text{up}, \text{up}) + u_2^2(\text{up}, \text{up}) \\ 1.06u_1^1(\text{up}) + 1.12u_1^2(\text{up}) &= u_2^1(\text{up}, \text{down}) + u_2^2(\text{up}, \text{down}) \\ 1.25u_1^1(\text{down}) + 1.14u_1^2(\text{down}) &= u_2^1(\text{down}, \text{up}) + u_2^2(\text{down}, \text{up}) \\ 1.06u_1^1(\text{down}) + 1.12u_1^2(\text{down}) &= u_2^1(\text{down}, \text{down}) + u_2^2(\text{down}, \text{down}) \end{aligned}$$

cioè, qualunque siano le realizzazione delle v.a. ω_1 e ω_2, quello che si investe nel decimo anno deve essere uguale al capitale disponibile nel decimo anno. Anche qui, possiamo riscrivere i vincoli di secondo stadio nel modo seguente.

$$\sum_{i \in I} t_{ki} u_1^i(j) = \sum_{i \in I} u_2^i(j,k), \quad \forall\ j,k \in \Omega = \{\text{up},\ \text{down}\}.$$

<u>Ultimo stadio</u>: Anche nell'ultimo stadio vale un discorso analogo a quello fatto nei due stadi precedenti. Infatti, le variabili di decisione dell'ultimo stadio sono funzione di ω_1, ω_2 e ω_3. La variabile $u_3^1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ rappresenta quanto denaro deve essere preso in prestito con interesse di $r\%$ per poter avere G euro per pagare la rata di iscrizione al college. Al contrario, la variabile $u_3^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ rappresenta l'ammontare che può essere versato su un libretto di risparmio con interesse di $q\%$, dopo aver pagato la retta di G euro per il college. Anche in questo ultimo caso, le funzioni $u_3^1(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ e $u_3^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ possono essere definite mediante l'introduzione di tante variabili quante sono le possibili combinazioni delle realizzazioni delle v.a. ω_i, $i = 1, 2, 3$. Tali variabili devono soddisfare i seguenti vincoli

$$\begin{aligned}
1.25u_2^1(\text{up},\text{up}) + 1.14u_2^2(\text{up},\text{up}) &= G - u_3^1(\text{up},\text{up},\text{up}) + u_3^2(\text{up},\text{up},\text{up})\\
1.25u_2^1(\text{up},\text{down}) + 1.14u_2^2(\text{up},\text{down}) &= G - u_3^1(\text{up},\text{down},\text{up}) + u_3^2(\text{up},\text{down},\text{up})\\
1.25u_2^1(\text{down},\text{up}) + 1.14u_2^2(\text{down},\text{up}) &= G - u_3^1(\text{down},\text{up},\text{up}) + u_3^2(\text{down},\text{up},\text{up})\\
1.25u_2^1(\text{down},\text{down}) + 1.14u_2^2(\text{down},\text{down}) &= G - u_3^1(\text{down},\text{down},\text{up}) + u_3^2(\text{down},\text{down},\text{up})\\
1.06u_2^1(\text{up},\text{up}) + 1.12u_2^2(\text{up},\text{up}) &= G - u_3^1(\text{up},\text{up},\text{down}) + u_3^2(\text{up},\text{up},\text{down})\\
1.06u_2^1(\text{up},\text{down}) + 1.12u_2^2(\text{up},\text{down}) &= G - u_3^1(\text{up},\text{down},\text{down}) + u_3^2(\text{up},\text{down},\text{down})\\
1.06u_2^1(\text{down},\text{up}) + 1.12u_2^2(\text{down},\text{up}) &= G - u_3^1(\text{down},\text{up},\text{down}) + u_3^2(\text{down},\text{up},\text{down})\\
1.06u_2^1(\text{down},\text{down}) + 1.12u_2^2(\text{down},\text{down}) &= G - u_3^1(\text{down},\text{down},\text{down}) + u_3^2(\text{down},\text{down},\text{down})
\end{aligned}$$

cioè, qualunque siano le realizzazione delle v.a. ω_1, ω_2 e ω_3, quello di cui si dispone nel quindicesimo anno deve essere pari all'importo della retta G, eventualmente prendendo a prestito la quantità u_3^1 oppure depositando i contanti in avanzo u_3^2 in un libretto di risparmio. Anche questo ultimo gruppo di vincoli possono essere riscritti sinteticamente come

$$\sum_{i \in I} t_{hi} u_2^i(j,k) + u_3^1(j,k,h) - u_3^2(j,k,h) = G, \quad \forall\ j,k,h \in \Omega = \{\text{up},\ \text{down}\}.$$

Supponiamo che le tre v.a. siano indipendenti l'una dalle altre, cosicché avremo

$$p(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = p(\omega_1)p(\omega_2)p(\omega_3) = 0.125,$$

e, quindi, per la funzione obiettivo (da massimizzare)

$$f(u,\omega) = \sum_{j \in \Omega} \sum_{k \in \Omega} \sum_{h \in \Omega} p(j,k,h)(-ru_3^1(j,k,h) + qu_3^2(j,k,h)).$$

Riassumendo, la formulazione del problema deterministico equivalente del problema di programmazione stocastica è la seguente.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{\substack{j \in \Omega, \\ k \in \Omega, \\ h \in \Omega}} p(j)p(k)p(h)(qu_3^2(j,k,h) - ru_3^1(j,k,h)) \\
& \sum_{i \in I} u_0^i = b \\
& \sum_{i \in I} t_{ji} u_0^i = \sum_{i \in I} u_1^i(j), \quad \forall\ j \in \Omega \\
& \sum_{i \in I} t_{ki} u_1^i(j) = \sum_{i \in I} u_2^i(j,k), \quad \forall\ j,k \in \Omega \\
& \sum_{i \in I} t_{hi} u_2^i(j,k) + u_3^1(j,k,h) - u_3^2(j,k,h) = G, \quad \forall\ j,k,h \in \Omega \\
& u_0^i, u_1^i(j), u_2^i(j,k), u_3^1(j,k,h), u_3^2(j,k,h) \geq 0, \quad \forall\ i \in I, j,k,h \in \Omega.
\end{aligned}
$$

La cui traduzione nella sintassi di AMPL è, ad esempio, la seguente.

```
reset;
model;

set I;
set MARKET;

param p{MARKET};
param q;
param r;
param b;
param G;
param t{I,MARKET};

var u0{I} >= 0;
var u1{I,MARKET} >= 0;
var u2{I,MARKET,MARKET} >= 0;
var u3{1..2,MARKET,MARKET,MARKET} >= 0;

maximize Ef: sum{i in MARKET,j in MARKET,k in MARKET}p[i]*p[j]*p[k]*
                (q*u3[2,i,j,k] - r*u3[1,i,j,k]);

s.t. st_iniz: sum{i in I}u0[i] = b;
s.t. st_prim{i in MARKET}: sum{j in I}t[j,i]*u0[j] = sum{k in I}u1[k,i];
s.t. st_seco{i in MARKET,j in MARKET}: sum{k in I}t[k,j]*u1[k,i] =
                                       sum{h in I}u2[h,i,j];
s.t. st_terz{i in MARKET,j in MARKET,k in MARKET}: sum{h in I}t[h,k]*u2[h,i,j]
                                              + u3[1,i,j,k] - u3[2,i,j,k] = G;

data;

set I := stock   bond;
set MARKET := up   down;

param b := 55000;
param G := 80000;
```

```
param q := 1;
param r := 4;
param p := up 0.5
         down 0.5;
param t :  up      down :=
   stock 1.25     1.06
    bond 1.14     1.12;

option solver cplex;
solve;
display u0,u1,u2,u3;
```

Mediante l'istruzione `AMPL` `set`, è stato possibile definire i due insiemi di valori `I` e `MARKET` senza dei quali la scrittura del modello sarebbe risultata certamente più ingarbugliata. Notiamo che, una volta definiti, l'uso che si può fare dei due insiemi è assolutamente analogo all'uso dell'insieme elementare `1..n` già più volte visto.

La soluzione ottima che otteniamo risolvendo il problema è:

$$u_0^1 = 41479.3, \quad u_0^2 = 13520.7$$

<table>
<tr><th>ω_1</th><th>ω_2</th><th>ω_3</th><th>u_1^1</th><th>u_1^2</th><th>u_2^1</th><th>u_2^2</th><th>u_3^1</th><th>u_3^2</th></tr>
<tr><td>up</td><td>up</td><td>up</td><td rowspan="4">65094.6</td><td rowspan="4">2168.14</td><td rowspan="2">83839.9</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>24799.9</td></tr>
<tr><td>up</td><td>up</td><td>down</td><td>0</td><td>8870.3</td></tr>
<tr><td>up</td><td>down</td><td>up</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">71428.6</td><td>0</td><td>1428.57</td></tr>
<tr><td>up</td><td>down</td><td>down</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>down</td><td>up</td><td>up</td><td rowspan="4">36743.2</td><td rowspan="4">22368</td><td rowspan="2">0</td><td rowspan="2">71428.6</td><td>0</td><td>1428.57</td></tr>
<tr><td>down</td><td>up</td><td>down</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>down</td><td>down</td><td>up</td><td rowspan="2">64000</td><td rowspan="2">0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>down</td><td>down</td><td>down</td><td>12160</td><td>0</td></tr>
</table>