Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2016-17 – 27 Giugno 2017

prova d'esame

1. (**8 punti**) Si consideri il problema non vincolato $\min_{x,y,z}\ x^2 - xy + y^2$.
   - Dati il punto $x = (2,\ 1)^\top$ e la direzione $d = (-1,\ -1)^\top$, calcolare i punti
   $$x(\alpha) = x + \alpha d, \quad \text{con } \alpha = 1, 3, 5$$
   ed i rispettivi valori di funzione $f(x(\alpha))$.
   - Sia
   $$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$
   una base positiva di $\mathbb{R}^2$, $x_0 = (0,\ 0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$. Calcolare i punti di tentativo $x = x_0 + \Delta_0 d$, per ogni $d \in D$ ed i rispettivi valori di funzione obiettivo. Esiste tra questi, un punto che migliora strettamente la funzione obiettivo rispetto al valore $f(x_0)$? Se sì, quale?

2. (**8 punti**) Si consideri il problema multiobiettivo seguente
   $$\begin{aligned} &\min\ x;\ x + y \\ &s.t.\ x^2 + y^2 \geq 1 \\ &\qquad x - y \geq 0 \\ &\qquad y \geq 0. \end{aligned}$$
   - Aiutandosi con una rappresentazione grafica del problema, determinare il vettore ideale degli obiettivi z_{id}.
   - Dire, motivando la risposta, se il punto $(x, y) = (1, 0)^\top$ è un punto di KKT del problema multiobiettivo.
   - Scrivere il problema che si ottiene con il metodo degli ϵ-vincoli ed in cui si minimizza la prima funzione obiettivo. Per tale problema (singolo obiettivo), determinare un valore del parametro ϵ che consenta di ottenere una soluzione distinta dal punto $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})^\top$.

3. (**8 punti**) Dato il seguente problema di controllo ottimo, con T fissato:
   $$\begin{aligned} &\min\ \frac{1}{2}\int_0^T \big(x_1(t)^2 + x_1(t)x_2(t) + x_2(t)^2 + x_3(t)^2 + e^{-t}(u_1(t)^2 + u_2(t)^2 + u_3(t)^2)\big)\, dt \\ &\dot{x}_1(t) = x_2(t) + u_1(t) \\ &\dot{x}_2(t) = x_3(t) + u_2(t) \\ &\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - x_2(t) + u_3(t) \\ &x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1 \end{aligned}$$
   - (**2 punti**) scrivere in forma matriciale le condizioni necessarie di ottimo date dal principio del massimo;
   - (**1 punto**) scrivere l'equazione di Riccati che consente di ottenere il controllo ottimo come controreazione dallo stato;
   - (**1 punto**) scrivere l'espressione del controllo ottimo come controreazione dallo stato;
   - (**1 punto**) dire a quante equazioni differenziali indipendenti dá luogo l'equazione di Riccati;
   - (**1 punto**) dire se, nel caso in cui $T \to \infty$, l'equazione differenziale di Riccati diventa un'equazione algebrica;
   - (**2 punti**) dire come cambiano le condizioni necessarie di ottimo se deve risultare:
   $$u_1(t) \geq 0,\ u_2(t) \geq 0,\ u_3(t) \geq 0.$$

4. (**8 punti**) Si consideri il problema vincolato seguente
   $$\begin{aligned} &\max\ x^2 + y^2 \\ &s.t.\ 0 \leq x \leq 1 \\ &\qquad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned}$$
   - Scrivere la funzione Lagrangiana ed il suo gradiente rispetto ad x e y. Determinare un punto di KKT del problema.
   - Scrivere l'espressione di una funzione di penalità esterna $P(x, y, \epsilon)$ associata al problema. Per $\epsilon = 1$, calcolare $P(x, y, 1)$ in corrispondenza dei punti $(1,\ 1)^\top$ e $(2,\ 2)^\top$.
   - Scrivere l'espressione di $\nabla P(x, y, \epsilon)$.
   - Scrivere l'espressione di una funzione Lagrangiana aumentata associata al problema.