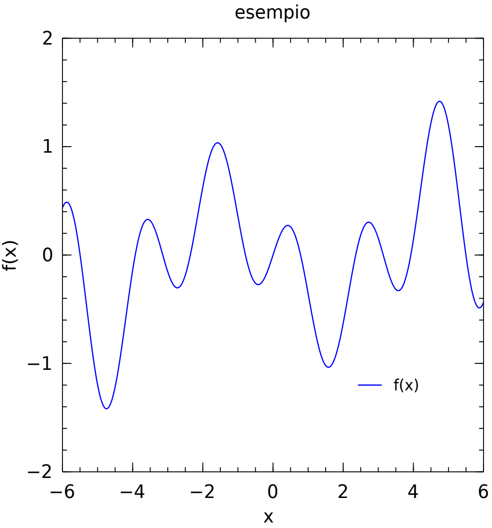
Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Venerdì 24 Febbraio 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Esempio



Perché?

Supponiamo $f(x)$ sia affetta da rumore additivo quindi

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon$$

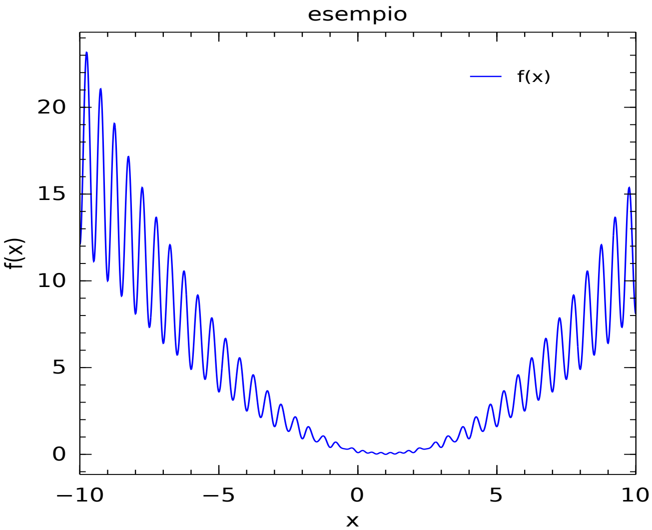
Differenze finite su $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) &\cong \frac{\tilde{f}(x + \Delta e_i) - \tilde{f}(x)}{\Delta} = \frac{f(x + \Delta e_i) + \epsilon_1 - f(x) - \epsilon_2}{\Delta} \\ &\cong \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta} \end{aligned}$$

Problema: per avere una buona approssimazione devo usare $\Delta \ll 1$ **ma** in questo caso

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta} \gg 1!!!$$

Un altro esempio (no rumore, ma molti minimi locali



Voi come fareste?

Obiettivo: minimizzare una funzione $f(x)$ di n variabili reali per la quale non è possibile/conveniente utilizzare derivate prime ne di ordine superiore

Algoritmo di Fermi-Metropolis

Fermi-Metropolis

Consideriamo il problema:

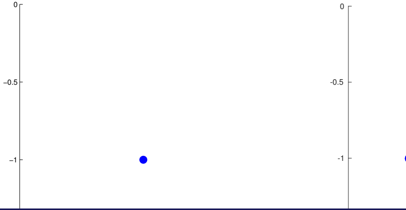
$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto iniziale: $x_0 = (-0.9; -1.0)^\top$
$f(x)$ iniziale: $f(x_0) = 11.3524$
Passo iniziale: $\Delta = 0.3$

Punto corrente: $x_k = (-0.9; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 5.0788$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 2.2048$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.5248$



Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.004715	0.018750
0.004715	0.009375
0.000671	0.009375
0.000671	0.004687
0.000033	0.004687
0.000033	0.002344
0.000033	0.001172
0.000005	0.001172
0.000005	0.000586

Pseudo-code del metodo "Fermi-Metropolis"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k+1$, $\tilde{x} \leftarrow x$

  for $i = 1, 2, \ldots, n$

    if $f(\tilde{x} + \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      while $f(\tilde{x} + \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **do** $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} + \Delta e_i$ **end while**

    else if $f(\tilde{x} - \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      while $f(\tilde{x} - \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **do** $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} - \Delta e_i$ **end while**

    end if

  end for

  if $f(\tilde{x}) = f(x)$ **then** $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  else $x \leftarrow \tilde{x}$

  end if

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Compass Search

Consideriamo il problema:

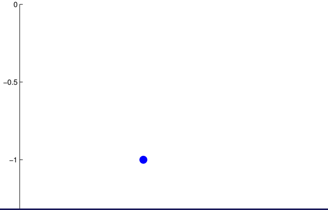
$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

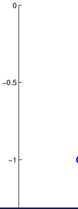
Punto iniziale: $x_0 = (-0.9; -1.0)^\top$
$f(x)$ iniziale: $f(x_0) = 11.3524$
Passo iniziale: $\Delta = 0.3$

Punto corrente: $x_k = (-0.9; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 5.0788$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 2.2048$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.5248$





Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
2.204800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.000298	0.018750
0.000298	0.009375
0.000298	0.004687
0.000298	0.002344
0.000173	0.002344
0.000054	0.002344
0.000043	0.002344
0.000033	0.002344

Pseudo-code del “compass search”

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{d_i, i = 1, \dots, r\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

  if $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

    $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Implementazione Julia

`http://julialang.org/learning/` – Tutorials

- The Julia Express by Bogomił Kamiński

Implementazione Julia

Fate voi !!