Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 2 Marzo 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Pseudo-code del metodo "Fermi-Metropolis"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $\tilde{x} \leftarrow x$

  for $i = 1, 2, \ldots, n$

    if $f(\tilde{x} + \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      while $f(\tilde{x} + \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **do** $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} + \Delta e_i$ **end while**

    else if $f(\tilde{x} - \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      while $f(\tilde{x} - \Delta e_i) < f(\tilde{x})$ **do** $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} - \Delta e_i$ **end while**

    end if

  end for

  if $f(\tilde{x}) = f(x)$ **then** $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  else $x \leftarrow \tilde{x}$

  end if

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Testo d'esame

Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y} \; f(x,y),$$

con $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\}$.

Siano $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$, il punto ed il passo iniziali del metodo **Fermi-Metropolis**.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Siano ora $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 0.5$.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Pseudo-code del "compass search"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$\quad k \leftarrow k + 1$

$\quad$ Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

$\quad$ **if** $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

$\qquad x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

$\quad$ **else**

$\qquad \Delta \leftarrow \Delta/2$

$\quad$ **endif**

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Testo d'esame

Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y} \; f(x,y),$$

con $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\}$.

Siano $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$, il punto ed il passo iniziali del metodo **compass search**.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Siano ora $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 0.5$.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Pseudo-code del metodo "Fermi-Metropolis"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k+1$, $\tilde{x} \leftarrow x_k$

  for $i = 1, 2, \ldots, n$

    if $f(\tilde{x} + \Delta_k e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      while $f(\tilde{x} + \Delta_k e_i) < f(\tilde{x})$ **do** $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} + \Delta_k e_i$ **end while**

    else if $f(\tilde{x} - \Delta_k e_i) < f(\tilde{x})$ **then**

      while $f(\tilde{x} - \Delta_k e_i) < f(\tilde{x})$ **do** $\tilde{x} \leftarrow \tilde{x} - \Delta_k e_i$ **end while**

    end if

  end for

  if $f(\tilde{x}) = f(x)$ **then** $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

  else $x_{k+1} \leftarrow \tilde{x}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

  end if

  $k \leftarrow k+1$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)$\{x_k\}, \{\Delta_k\}$ successioni di punti e passi

Pseudo-code del "compass search"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$

Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x_k + \Delta_k d_i)$

if $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) < f(x_k)$ **then**

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k \bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

else

$\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k / 2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

endif

$k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)$\{x_k\}, \{\Delta_k\}$ successioni di punti e passi

Un po' di analisi

Assunzione (A1)

L'insieme di livello $L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) \leq f(x_0)\}$ *è compatto*

N.B. nei (due) metodi visti, il passo Δ_k, iterazione dopo iterazione,

- o diminuisce (di un fattore costante $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$)
- o rimane costante ($\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$)

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ *e* $\texttt{maxit} = +\infty$, *allora* $\{\Delta_k\}$ *è una succ. infinita e*

$$\lim_{k \to \infty} \Delta_k = 0.$$

Convergenza a zero del passo

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ e $\texttt{maxit} = +\infty$, allora $\{\Delta_k\}$ è una succ. infinita e

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0.$$

Dim.: Se $\Delta_{min} \leq 0$ e $\texttt{maxit} = +\infty$, la condizione del **while** più esterno è sempre vera, quindi l'algoritmo non termina mai, producendo una succ. $\{\Delta_k\}$ infinita.

Dalla def. dell'algoritmo segue che, per ogni k,

- $\Delta_k > 0$;
- $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$.

Quindi, $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \bar{\Delta} \geq 0$. Supponiamo che $\bar{\Delta} > 0$.

Convergenza a zero del passo (segue)

Esiste un intero $\bar{k}$ tale che, per $k \geq \bar{k}$ il passo non viene più ridotto. Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) \text{ e } \Delta_{k+1} = \Delta_k = \Delta_{\bar{k}} = \bar{\Delta}.$$

Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$, i punti x_k appartengono ad una griglia, ovvero, per $i > 0$

$$x_{\bar{k}+i} = x_{\bar{k}} + \bar{\Delta} \sum_{r=0}^{i-1} d_{i_r} \in L(x_0) \quad d_{i_r} \in D$$

Questo e (A1) implicano che $\{x_k\}_{k \geq \bar{k}}$ (e $\{x_k\}$) è finita.

Convergenza a zero del passo (segue)

Ma allora, deve necessariamente esistere un intero $\tilde{k} > \bar{k}$ t.c.

$$x_{\tilde{k}+1} = x_{\tilde{k}},$$

ma questo contraddice il fatto che $f(x_{\tilde{k}+1}) < f(x_{\tilde{k}})$ e

allora, $\bar{\Delta} = 0$.

Convergenza a punti stazionari

Per i metodi visti vale il risultato

Teorema

Se vale (A1) e se $f(x)$ è continuamente differenziabile, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

(Ovvero almeno un punto limite di $\{x_k\}$ è stazionario)

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $K_1 \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in K_1}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). $K_2 \subseteq K_1$ s.t.

- $\displaystyle\lim_{k\to\infty, k\in K_2} x_k = \bar{x}$;
- $\displaystyle\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \Delta_k = 0.$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Per ogni $k \in K_2$ e $i = 1, \ldots, n$, abbiamo che

$$
\begin{aligned}
f(x_k + \Delta_k e_i) &\geq f(x_k) \\
f(x_k - \Delta_k e_i) &\geq f(x_k)
\end{aligned}
$$

e, per il teorema della media,

$$
\begin{aligned}
f(x_k + \Delta_k e_i) &= f(x_k) + \Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i \\
f(x_k - \Delta_k e_i) &= f(x_k) - \Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i
\end{aligned}
$$

dove $u_{k,i} = x_k + \xi_{k,i}\Delta_k e_i$ e $v_{k,i} = x_k - \mu_{k,i}\Delta_k e_i$, con $\xi_{k,i}, \mu_{k,i} \in (0,1)$ e quindi $\lim\limits_{k\to\infty, k\in K_2} u_{k,i} = \lim\limits_{k\to\infty, k\in K_2} v_{k,i} = \bar{x}$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Segue anche che:

$$
\begin{aligned}
\Delta_k \nabla f(u_{k,i})^\top e_i &\geq 0 \\
-\Delta_k \nabla f(v_{k,i})^\top e_i &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Dividendo per Δ_k e prendendo il limite per $k \to \infty, k \in K_2$ otteniamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty, k\in K_2} \nabla f(u_{k,i})^\top e_i &= \nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0 \\
\lim_{k\to\infty, k\in K_2} -\nabla f(v_{k,i})^\top e_i &= -\nabla f(\bar{x})^\top e_i \geq 0,
\end{aligned}
$$

e quindi, $\nabla f(\bar{x}) = 0$.