Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Venerdì 3 Marzo 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Pseudo-code di "compass search"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

  Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

  if $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

    $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

    endif

    end for

    if $f(y) < f(x)$ **then**

      $x \leftarrow y$

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-code di "compass search" rivisto o debole

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$ maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

if $\exists\ \bar{d} \in D$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

endif

end for

if $f(y) < f(x)$ **then**

$x \leftarrow y$

else

$\Delta \leftarrow \Delta/2$

endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-code di "compass search" rivisto o debole

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

if $\exists\ \bar{d} \in D$ s.t. $f(y + \Delta\bar{d}) < f(y)$ **then**

$y \leftarrow y + \Delta\bar{d}$

endif

end for

if $f(y) < f(x)$ **then**

$x \leftarrow y$

else

$\Delta \leftarrow \Delta/2$

endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-code di "compass search" rivisto o debole

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$ maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

  for each $\bar{d} \in D$

    if $f(y + \Delta\bar{d}) < f(y)$ **then**

      $y \leftarrow y + \Delta\bar{d}$, **break**

    endif

  end for

  if $f(y) < f(x)$ **then**

    $x \leftarrow y$

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Un nuovo metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

  for each $\bar{d} \in D$

    if $f(y + \Delta\bar{d}) < f(y)$ **then**

      $y \leftarrow y + \Delta\bar{d}$

    endif

  end for

  if $f(y) < f(x)$ **then**

    $x \leftarrow y$

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

for each $d \in D$

if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

end for

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

for each $d \in D$

if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

end for

if $f(y) < f(x)$ **then**

$x \leftarrow y$

else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
for each $d \in D$
if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
end for
if $f(y) < f(x)$ **then**
$x \leftarrow y$
else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
for each $d \in D$
if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
end for
if $f(y) < f(x)$ **then**
$x \leftarrow y$
else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Un "nuovo" metodo

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$
for each $d \in D$
if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$
end for
if $f(y) < f(x)$ **then**
$x \leftarrow y$
else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Domande?

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k+1$, $y \leftarrow x$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* x)

if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

end for

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* x)

if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

end for

if $f(y) < f(x)$ **then**

else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* x)

if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

end for

if $f(y) < f(x)$ **then** (*pattern move along* $y - x$)

$z \leftarrow y + (y - x)$

else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* x)

if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

end for

if $f(y) < f(x)$ **then** (*pattern move along* $y - x$)

$z \leftarrow y + (y - x)$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* z)

if $f(z + \Delta d) < f(z)$ **then** $z \leftarrow z + \Delta d$

end for

if $f(z) < f(y)$ **then** $x \leftarrow z$ **else** $x \leftarrow y$

else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* x)

if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

end for

if $f(y) < f(x)$ **then** (*pattern move along* $y - x$)

$z \leftarrow y + (y - x)$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* z)

if $f(z + \Delta d) < f(z)$ **then** $z \leftarrow z + \Delta d$

end for

if $f(z) < f(y)$ **then** $x \leftarrow z$ **else** $x \leftarrow y$

else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Il metodo di Hooke&Jeeves

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$, $y \leftarrow x$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* x)

if $f(y + \Delta d) < f(y)$ **then** $y \leftarrow y + \Delta d$

end for

if $f(y) < f(x)$ **then** (*pattern move along* $y - x$)

$z \leftarrow y + (y - x)$

for each $d \in D$ (*exploratory moves from* z)

if $f(z + \Delta d) < f(z)$ **then** $z \leftarrow z + \Delta d$

end for

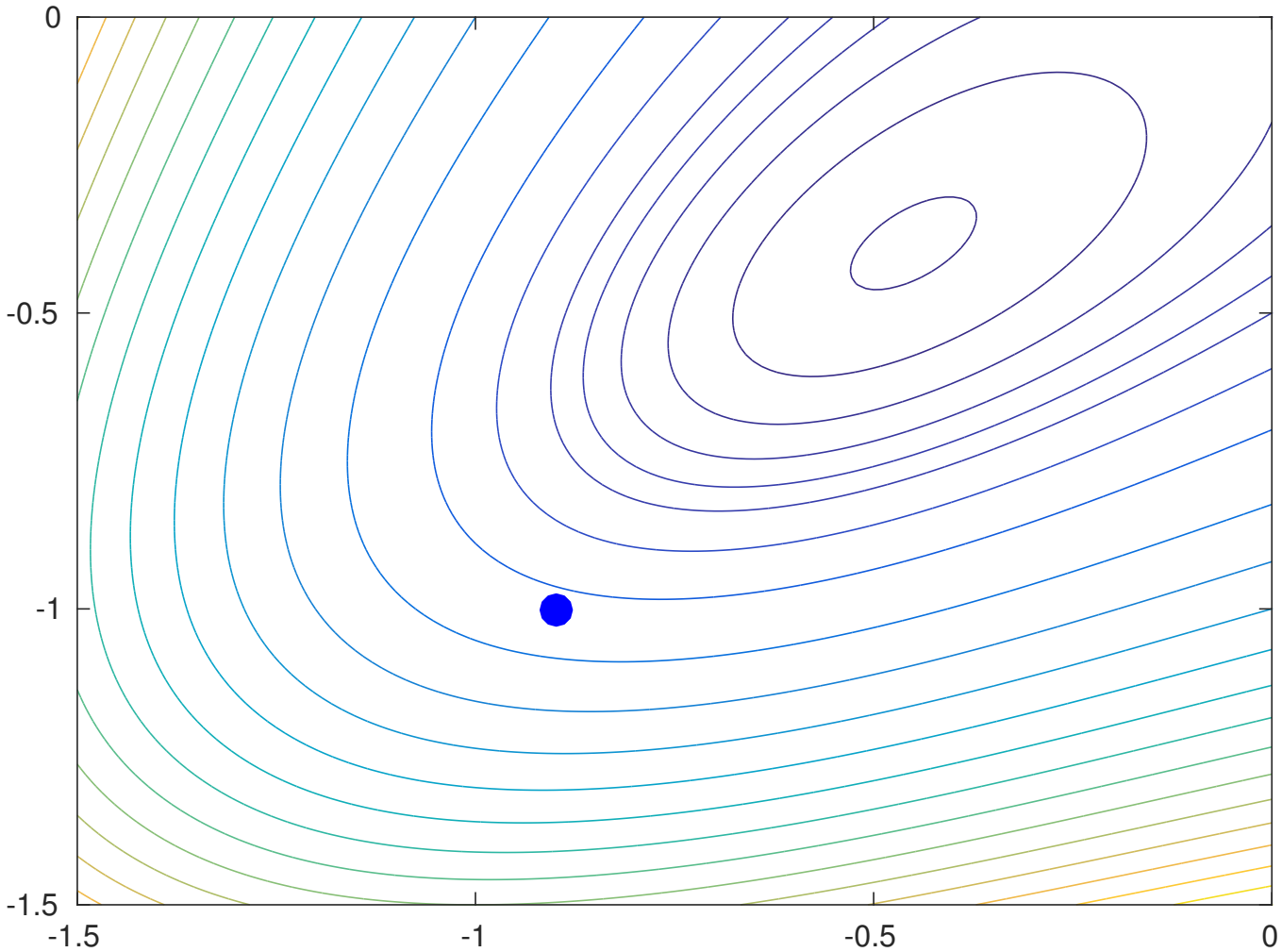
if $f(z) < f(y)$ **then** $x \leftarrow z$ **else** $x \leftarrow y$

else $\Delta \leftarrow \Delta/2$

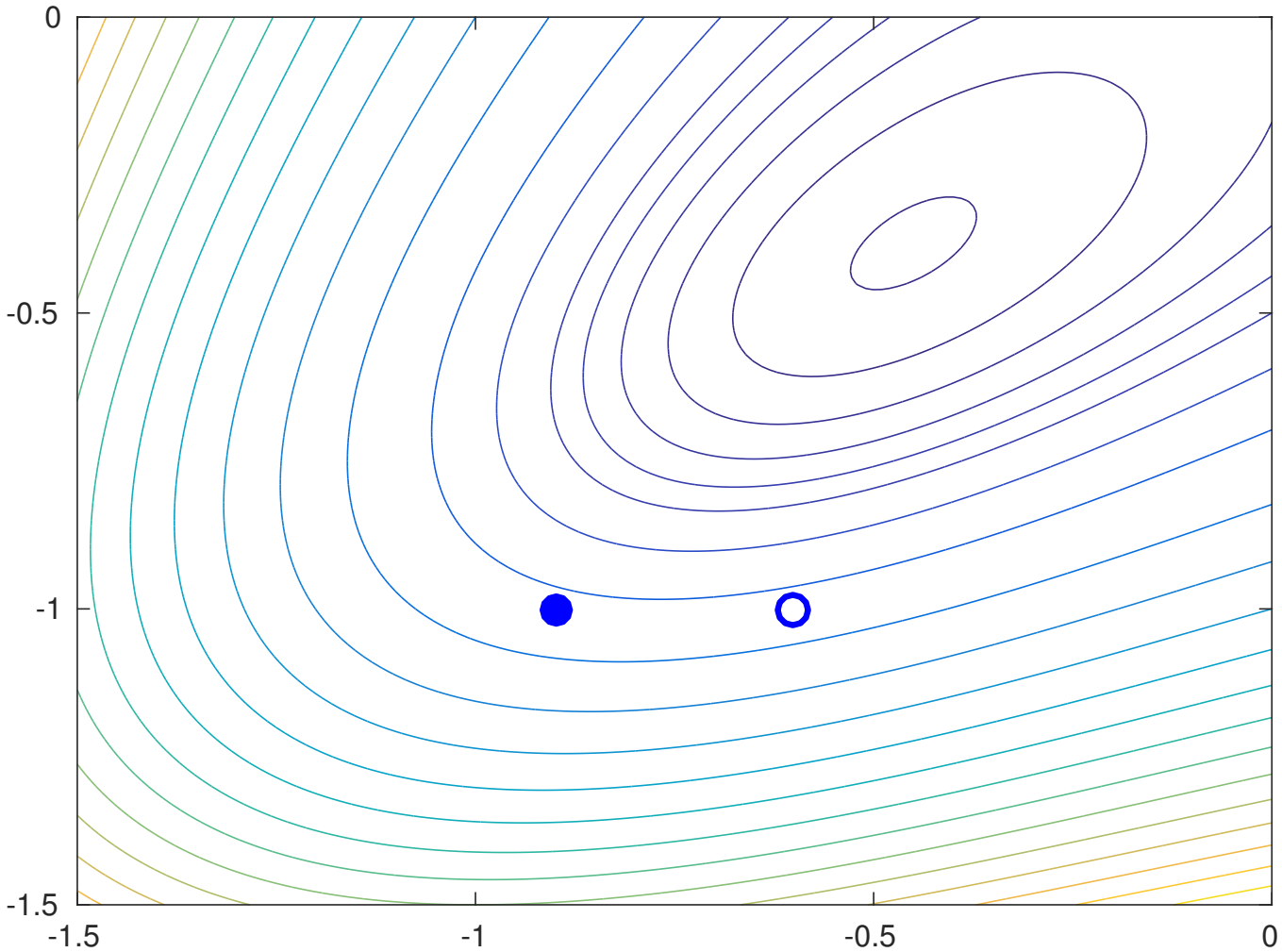
end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

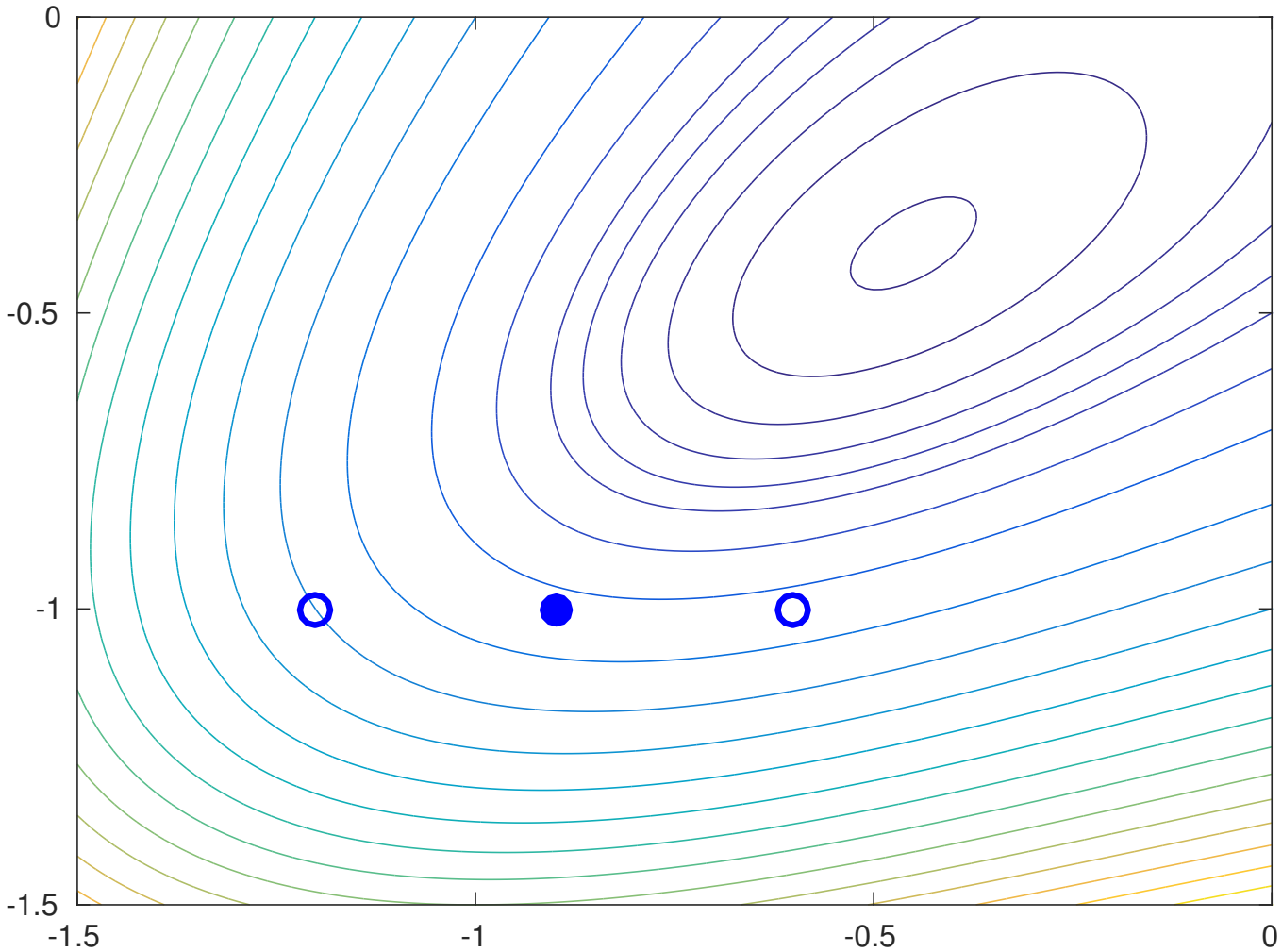
Esempio su Funzione di Broyden



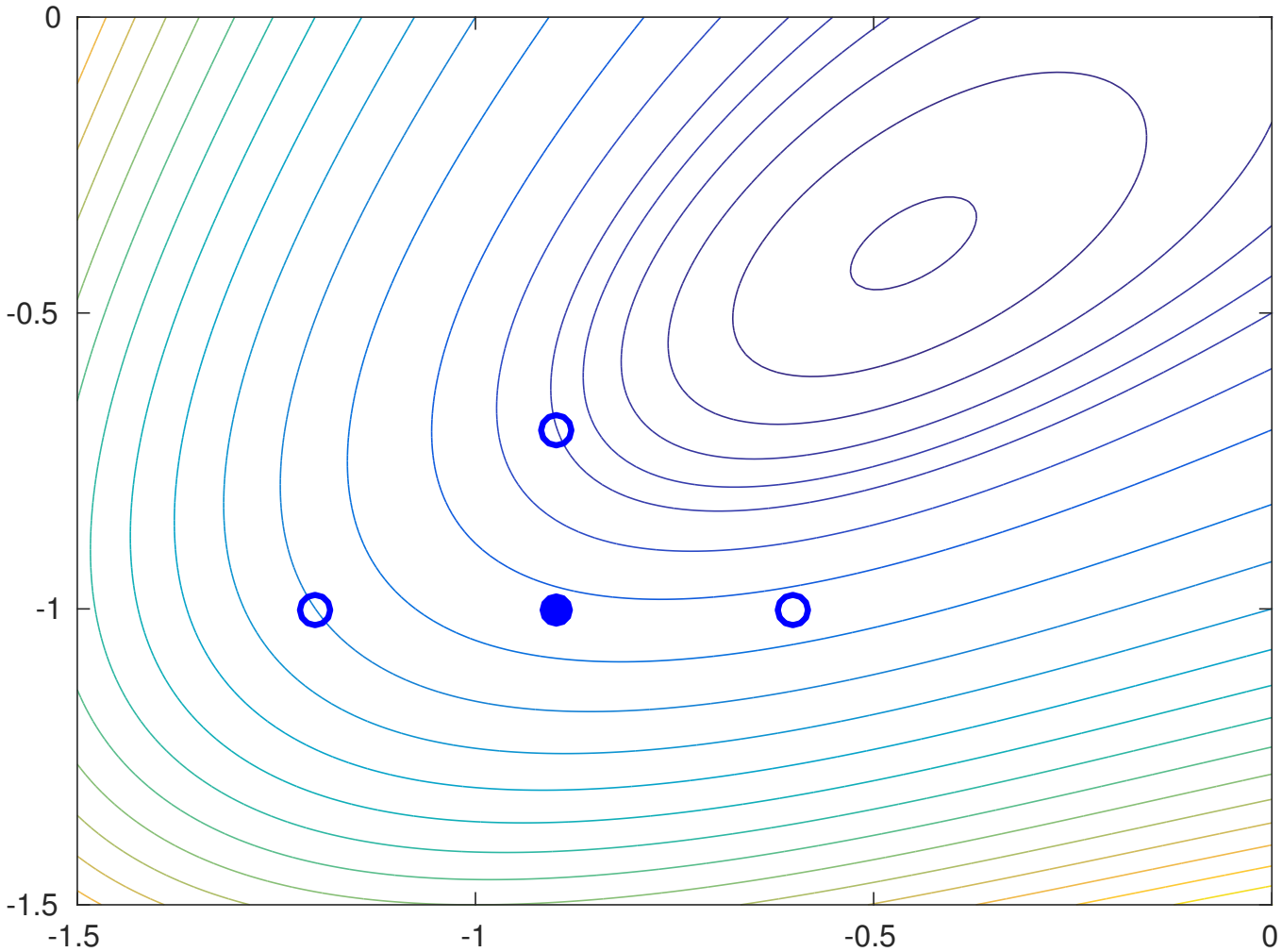
Esempio su Funzione di Broyden



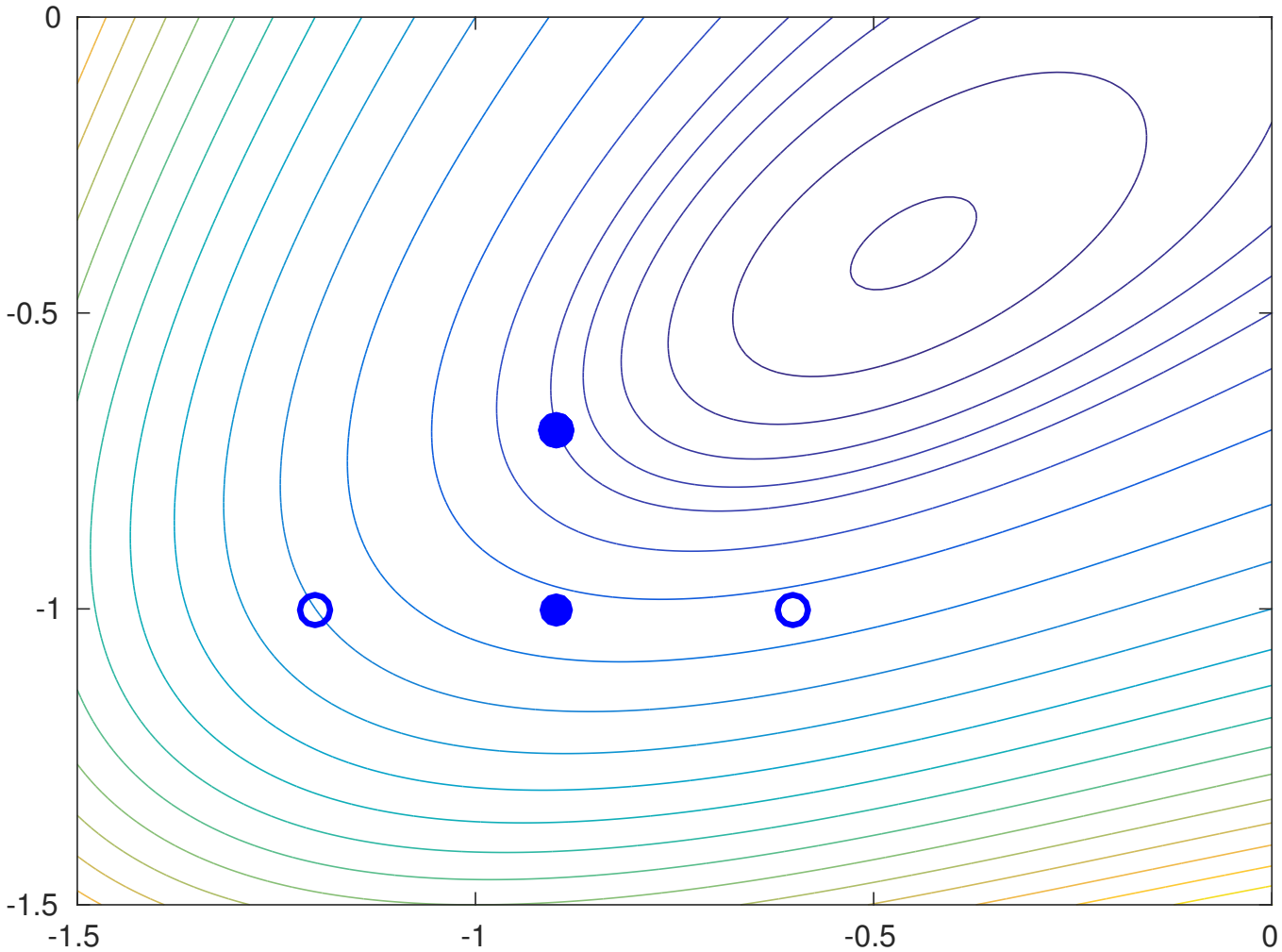
Esempio su Funzione di Broyden



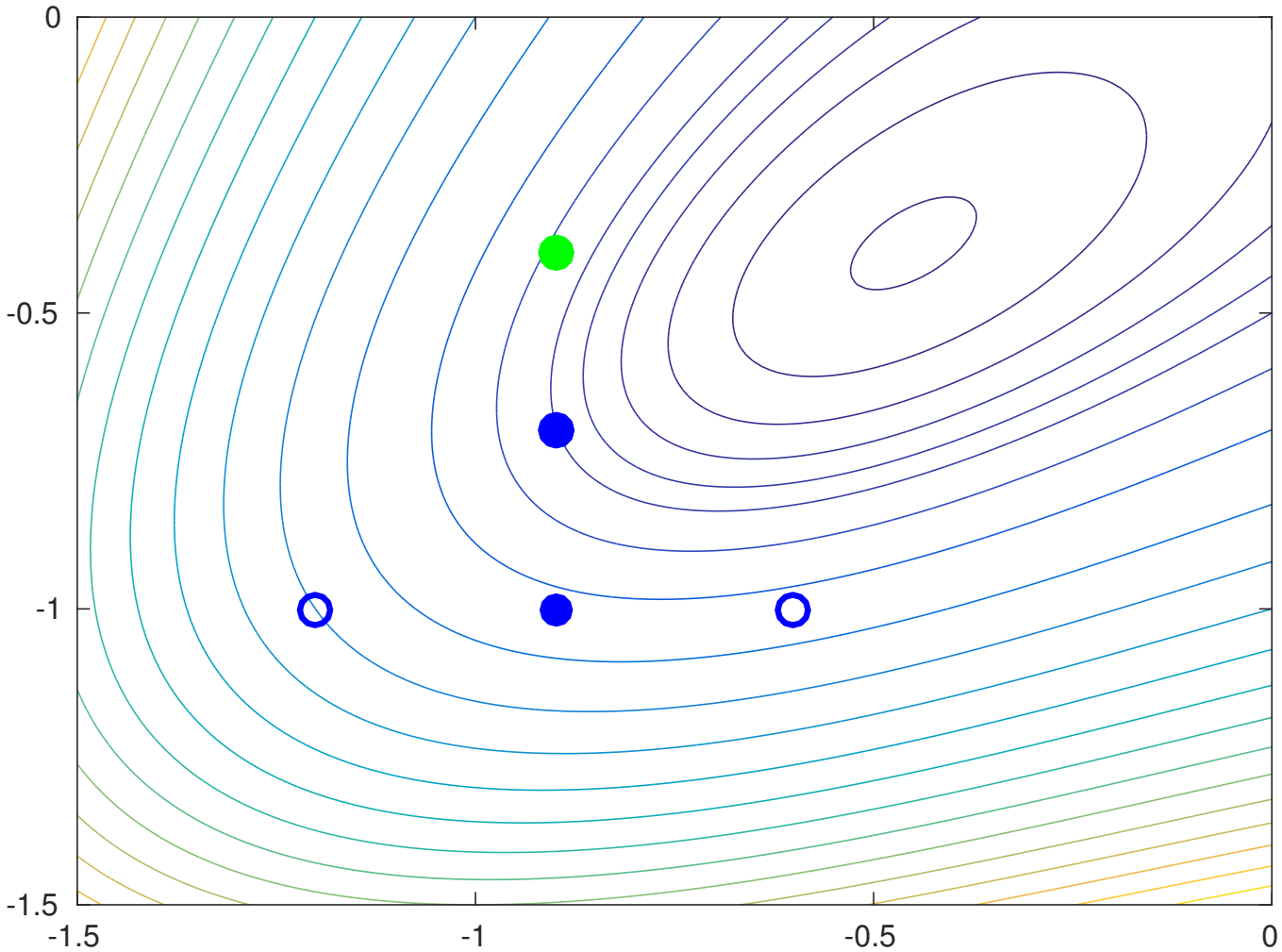
Esempio su Funzione di Broyden



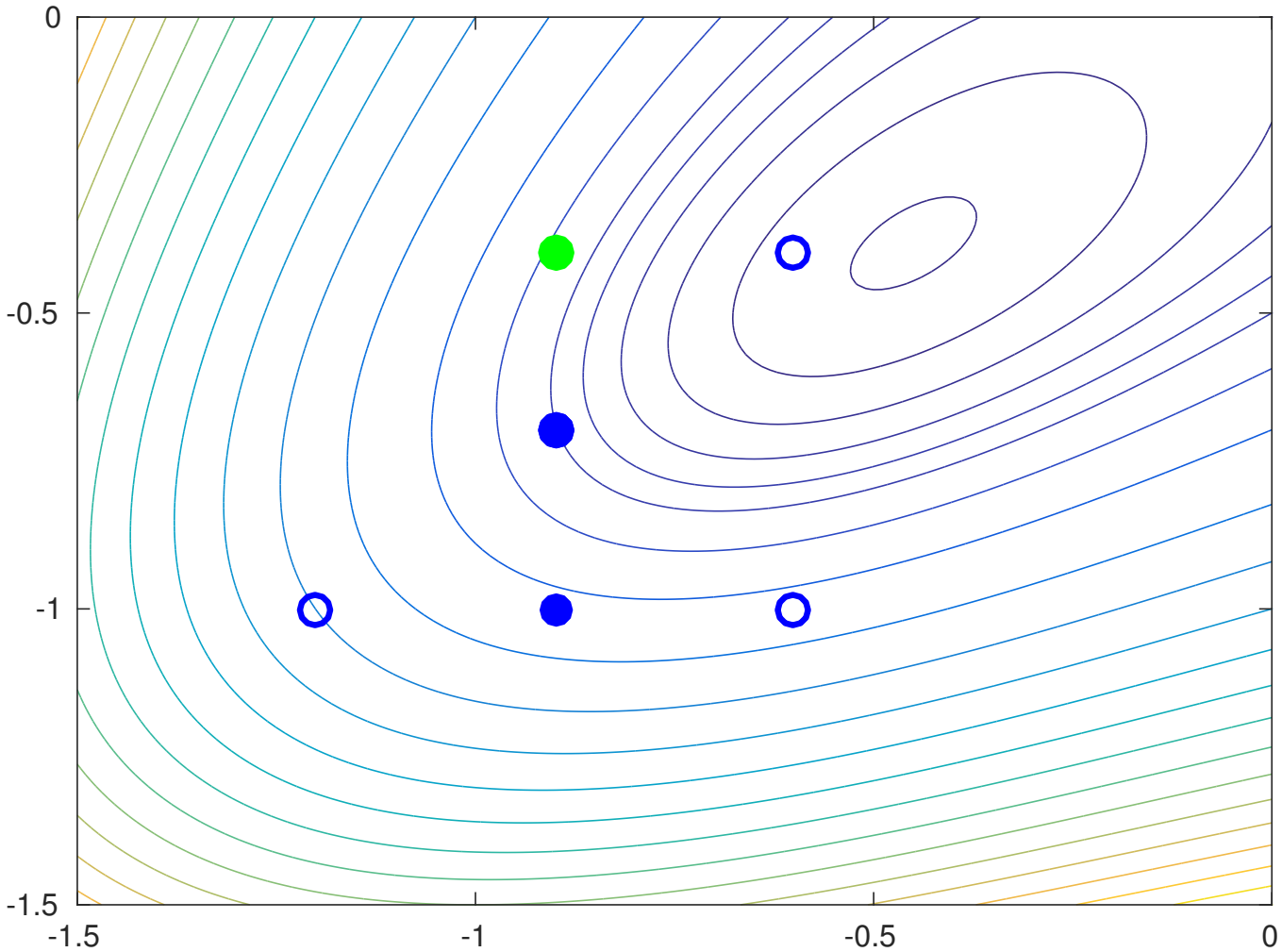
Esempio su Funzione di Broyden



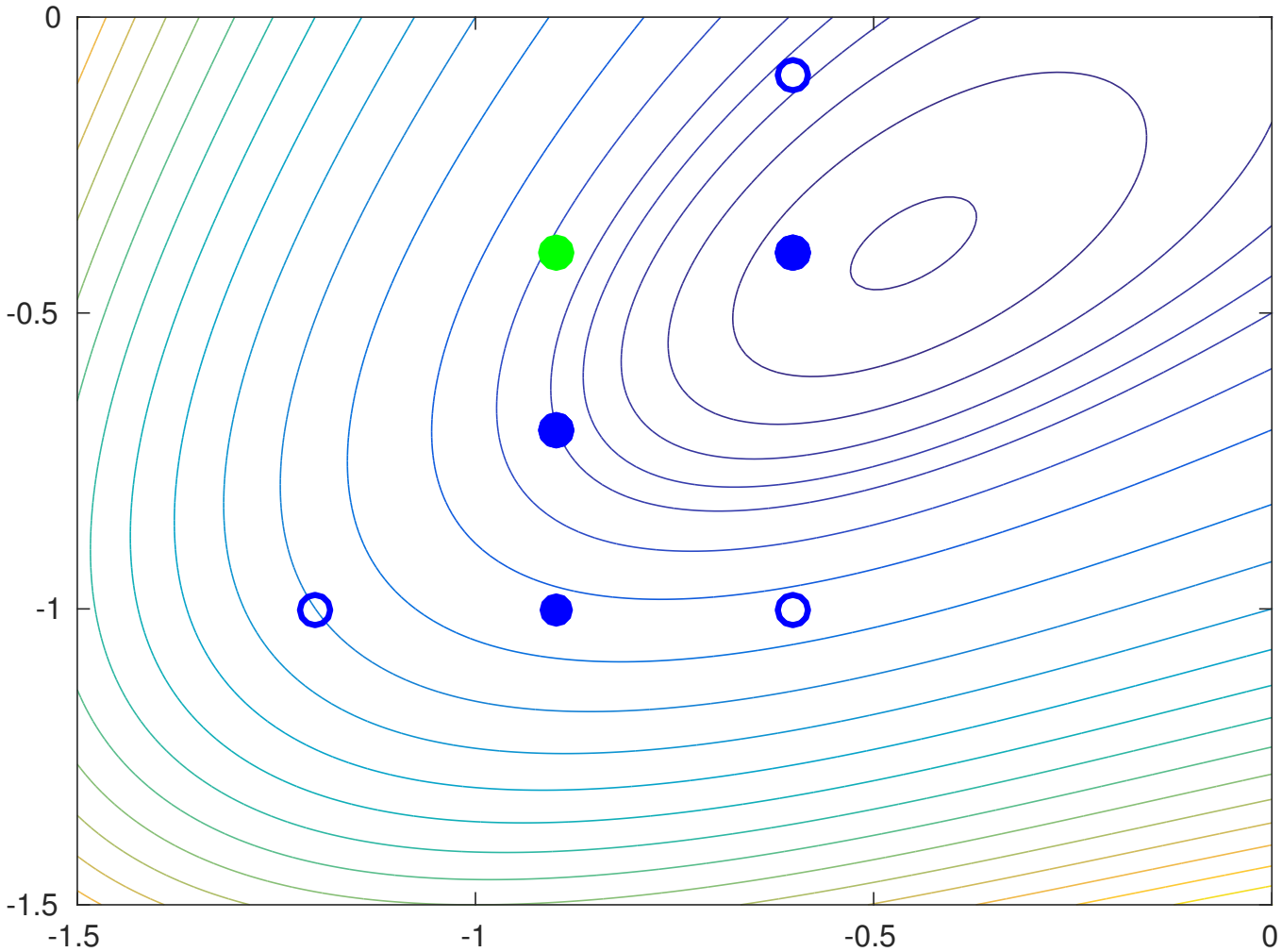
Esempio su Funzione di Broyden



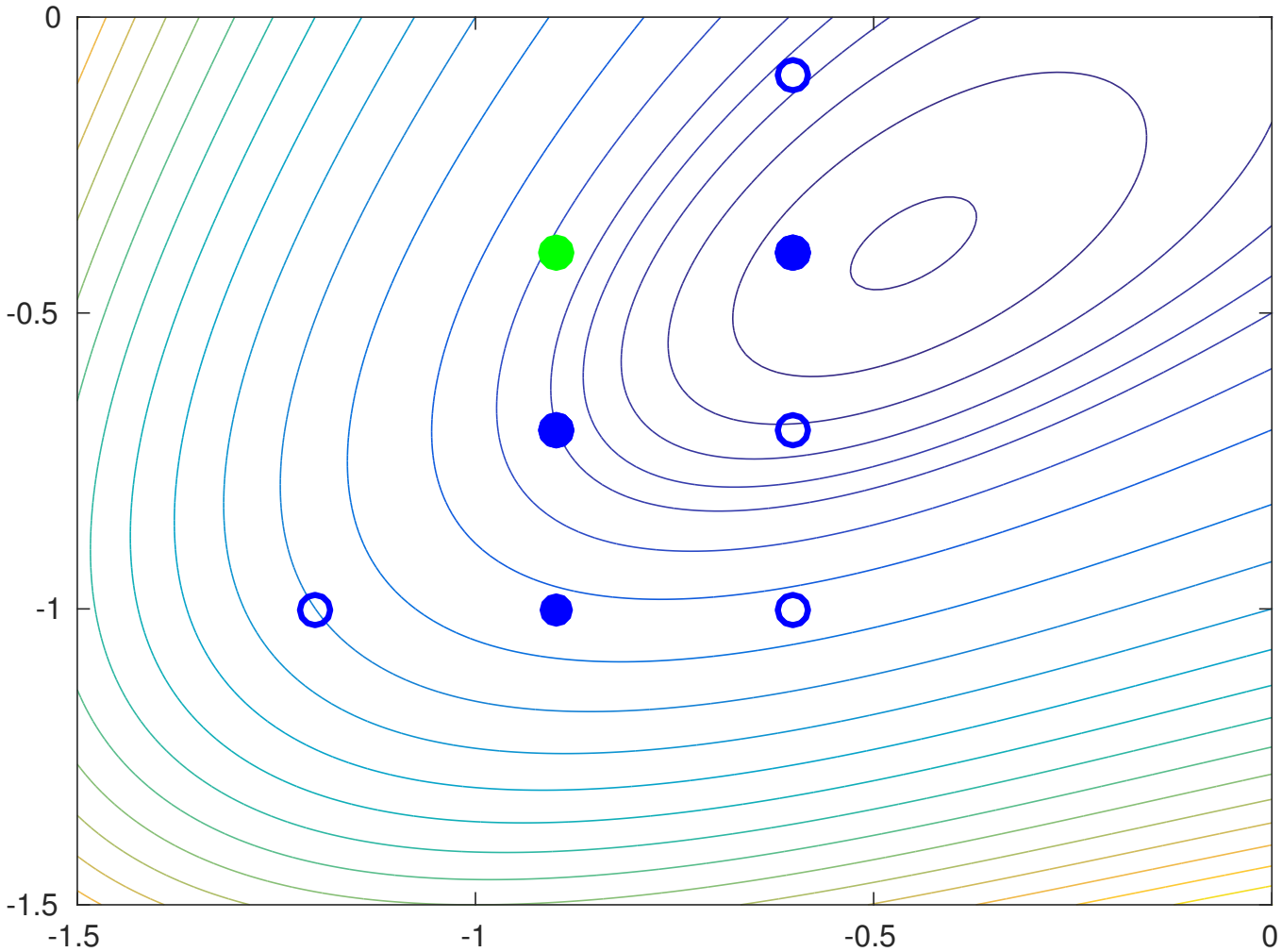
Esempio su Funzione di Broyden



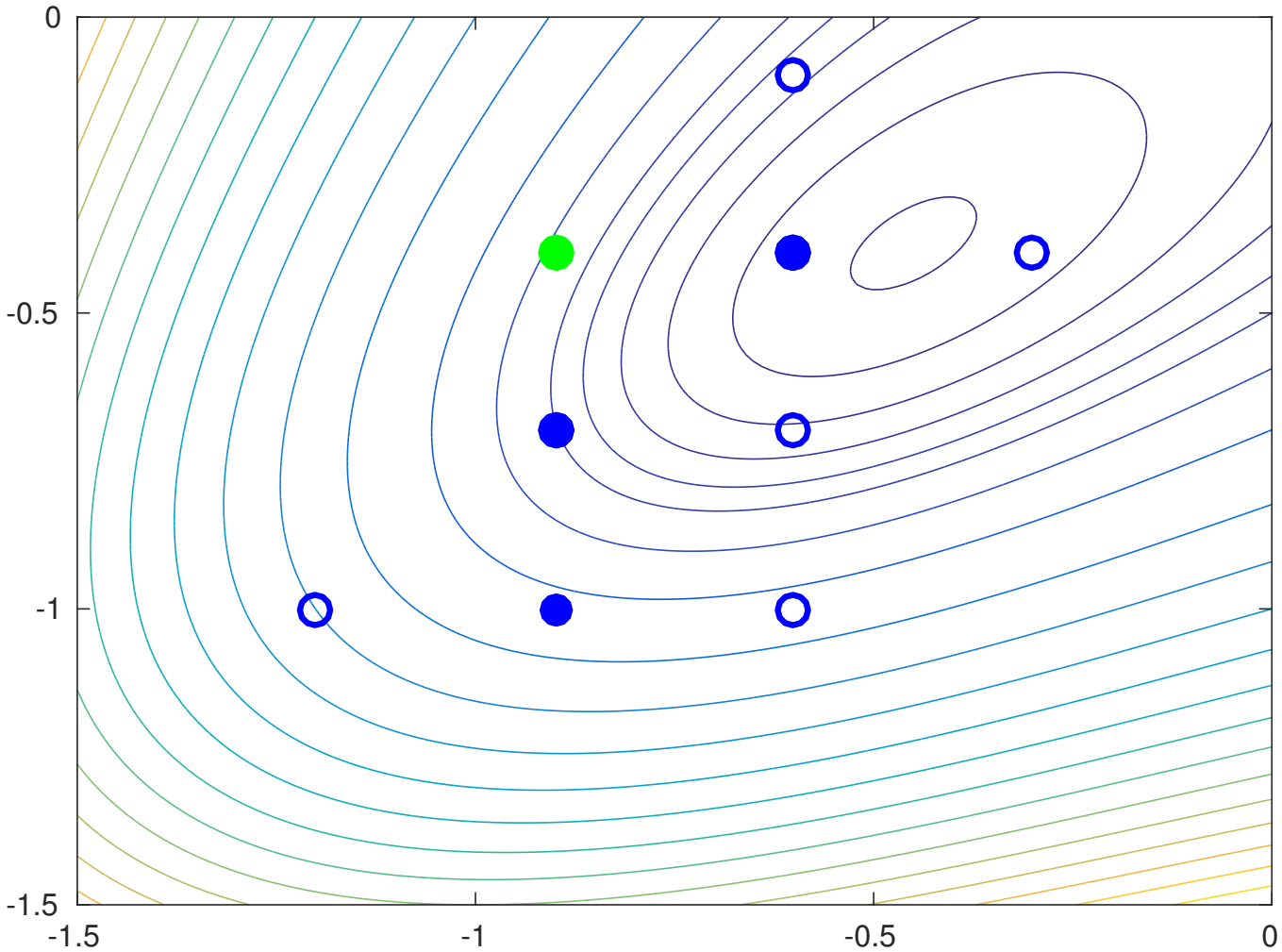
Esempio su Funzione di Broyden



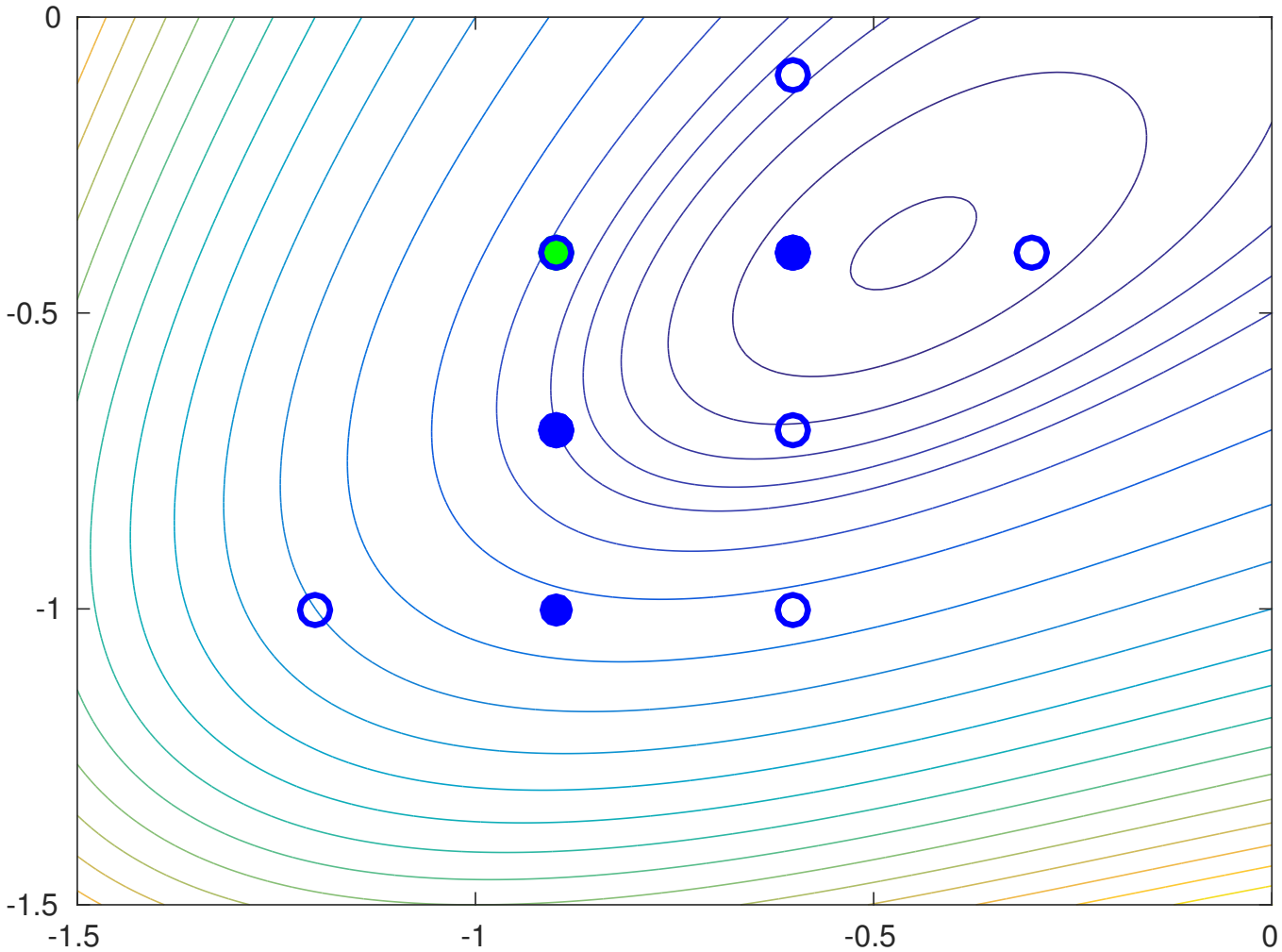
Esempio su Funzione di Broyden



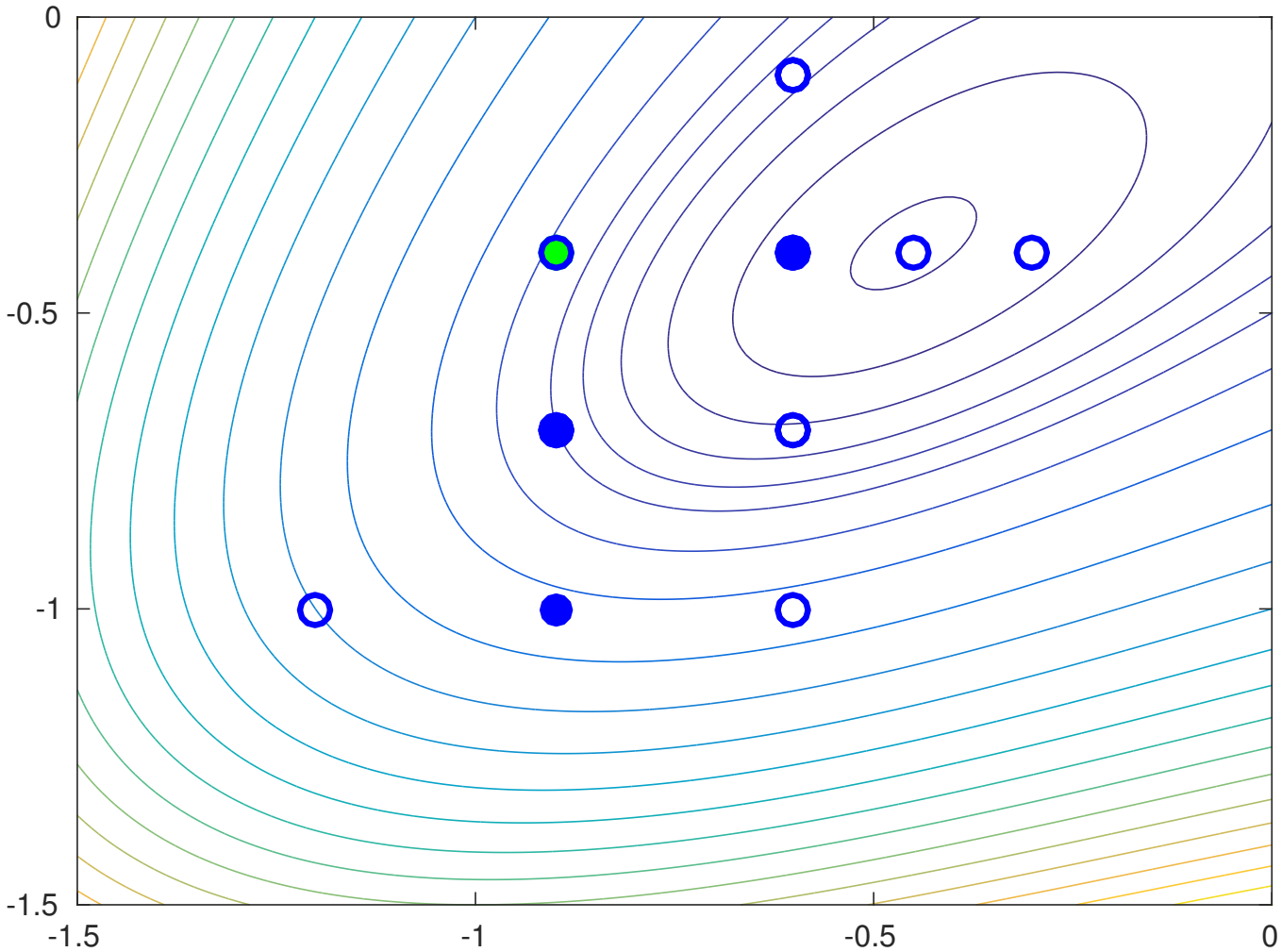
Esempio su Funzione di Broyden



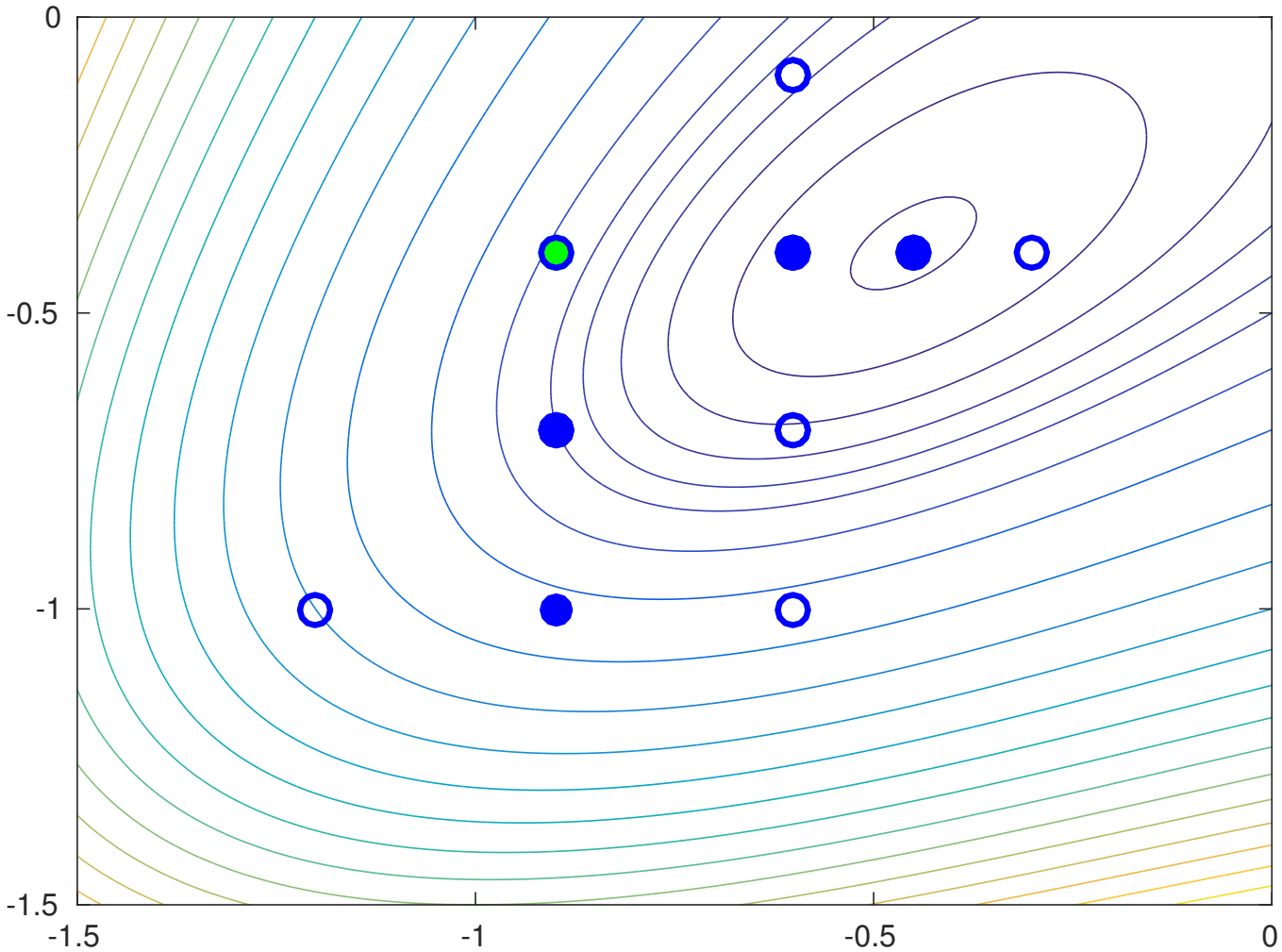
Esempio su Funzione di Broyden



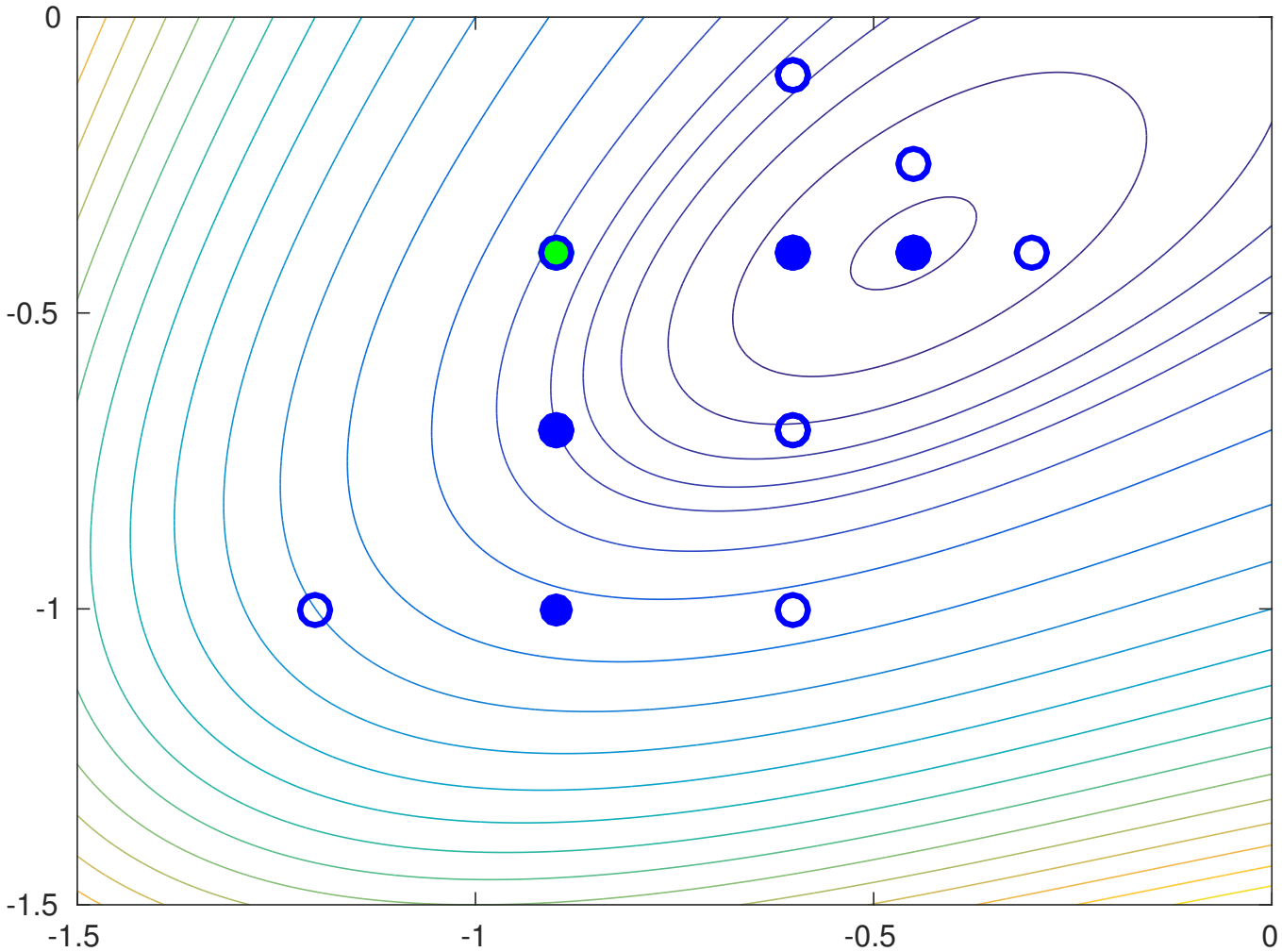
Esempio su Funzione di Broyden



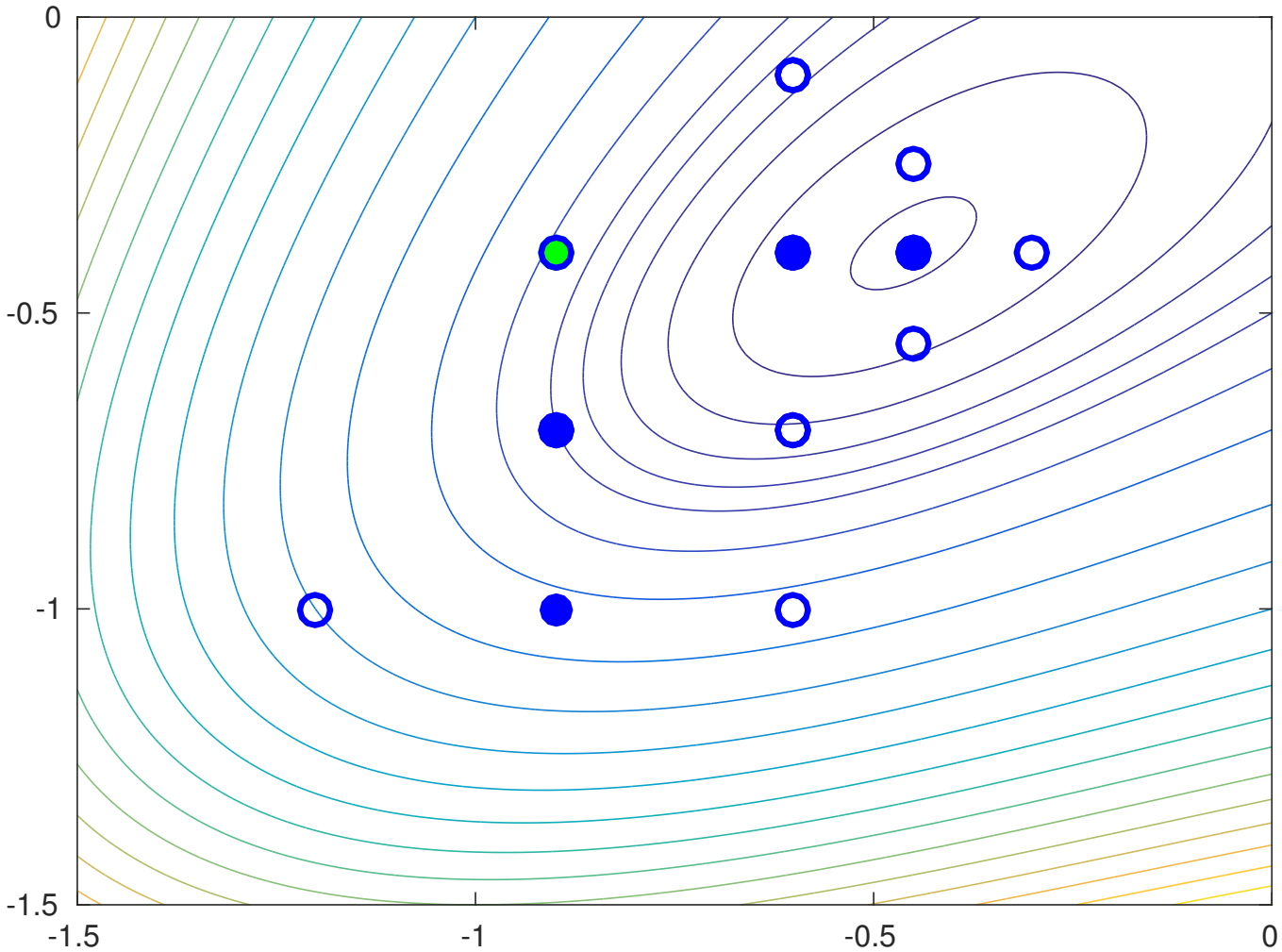
Esempio su Funzione di Broyden



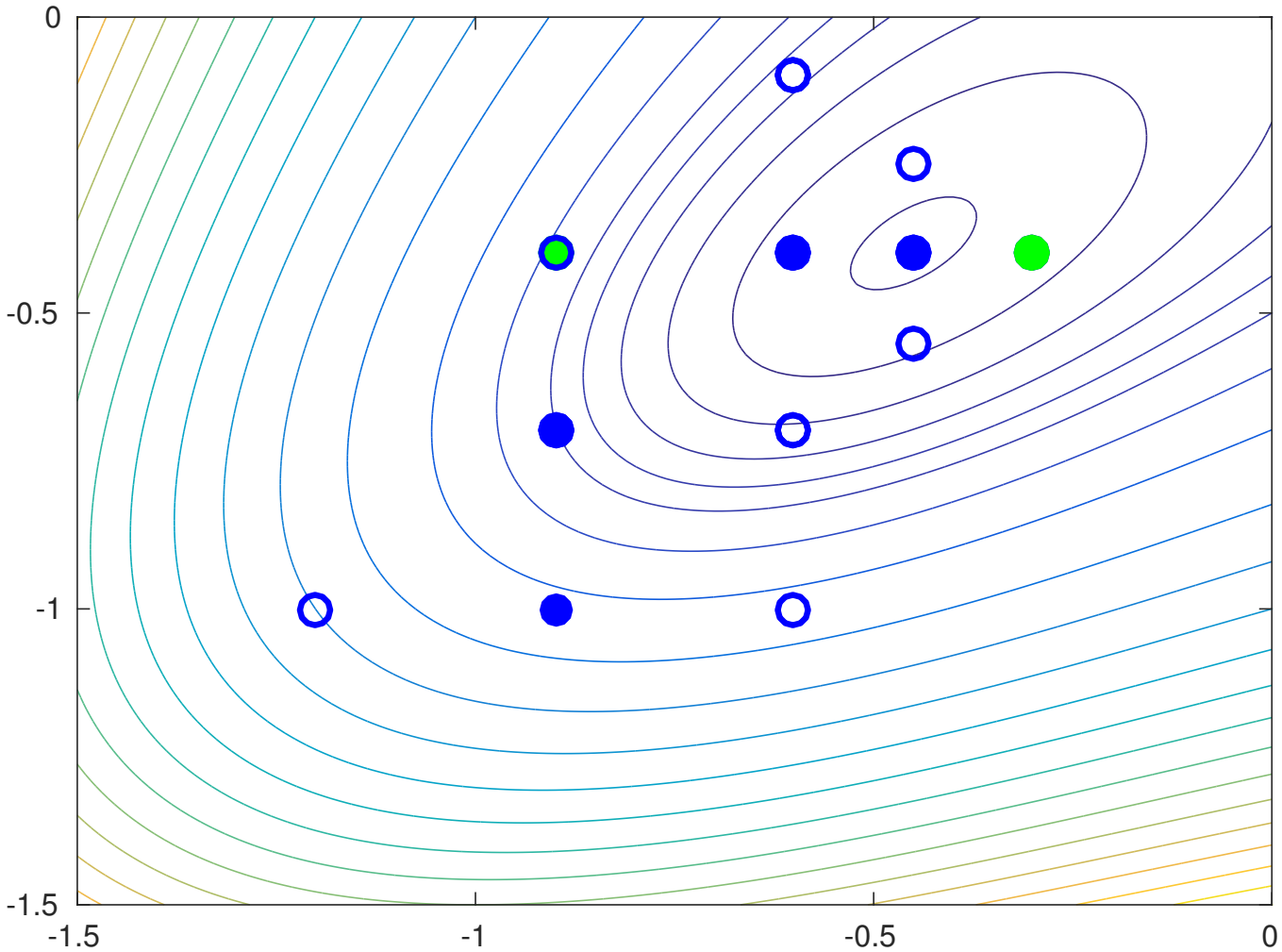
Esempio su Funzione di Broyden



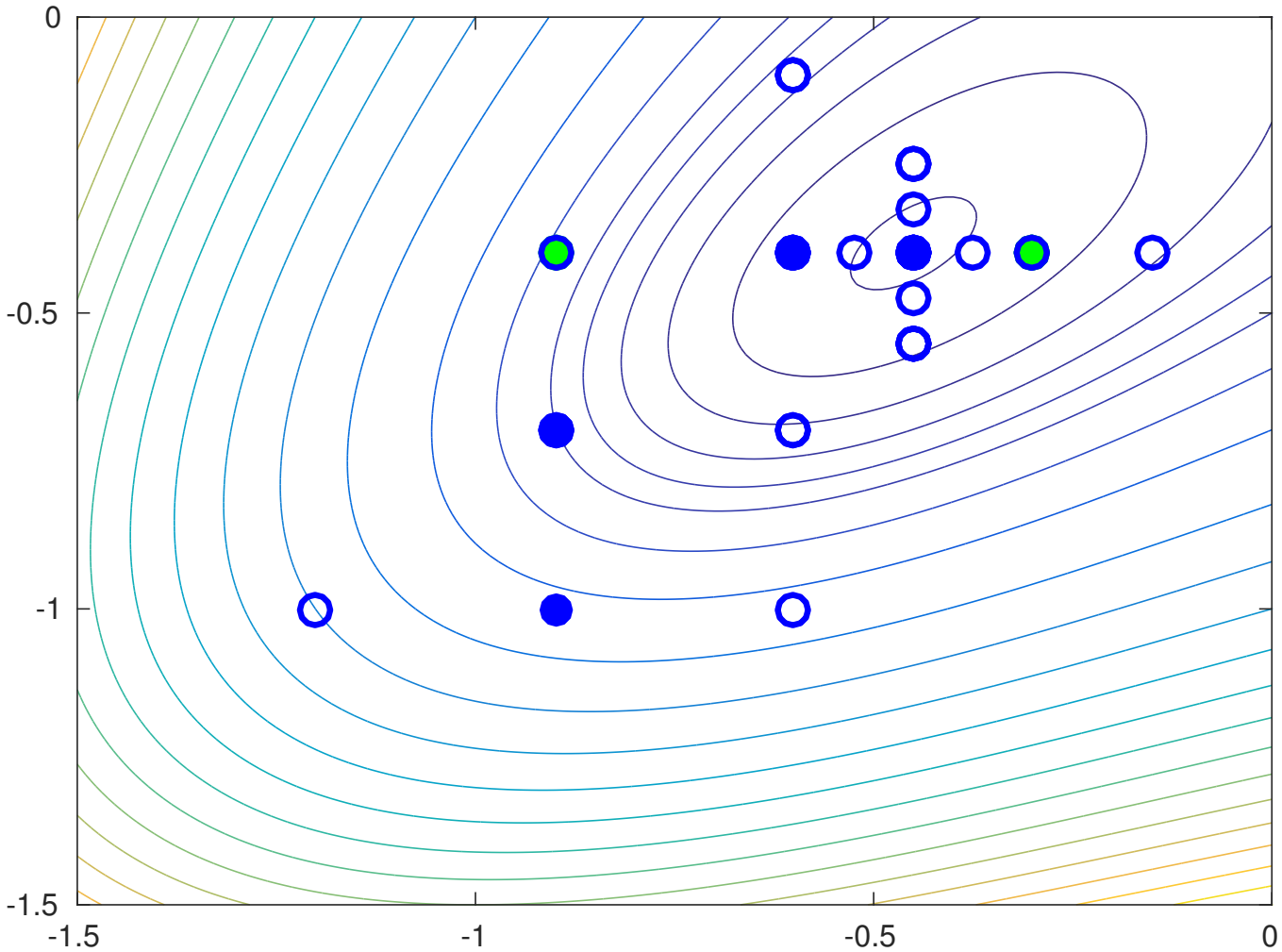
Esempio su Funzione di Broyden



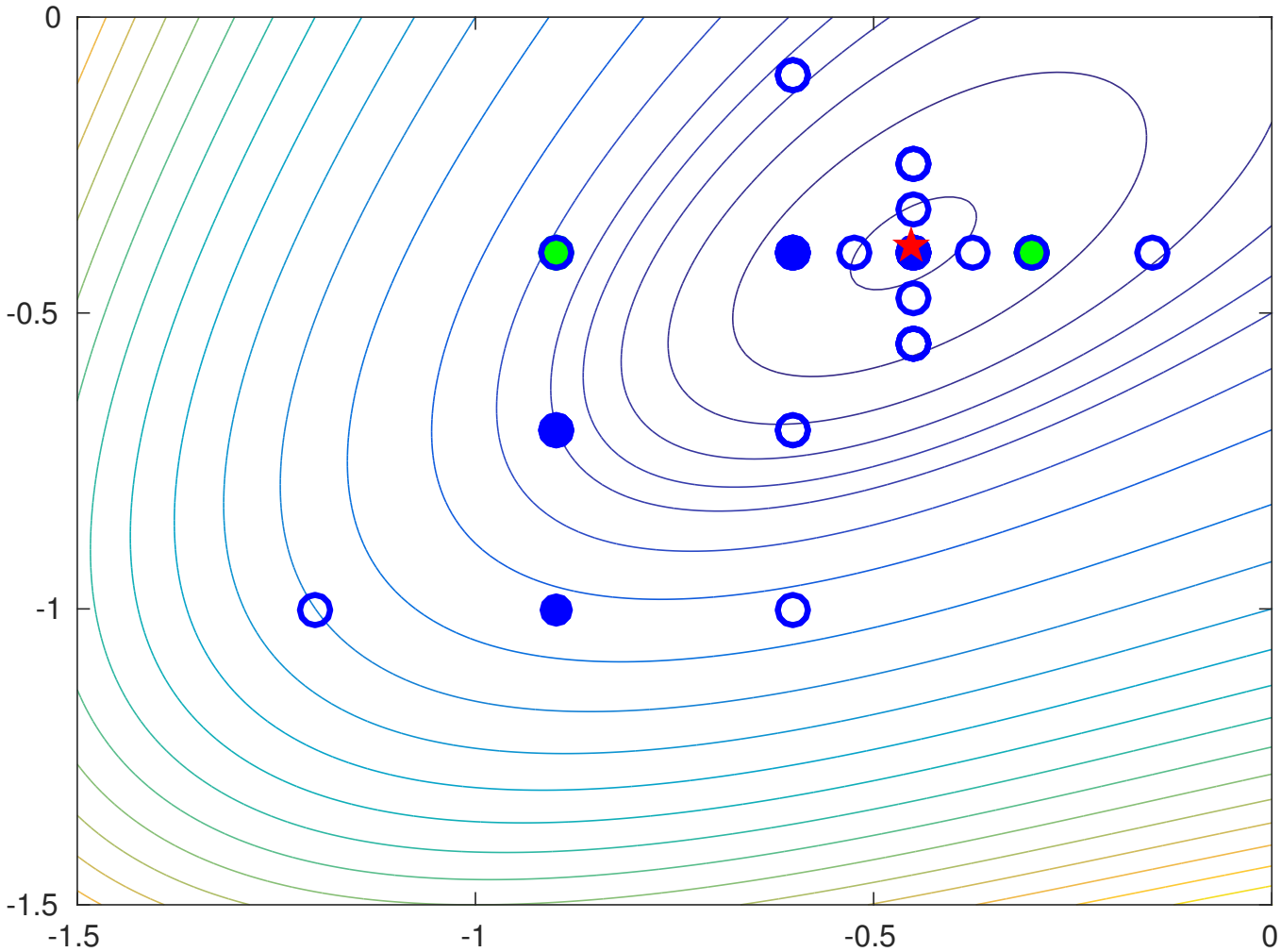
Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Convergenza di Hooke&Jeeves

Nota bene: Come per i metodi precedenti, nel metodo di H&J il passo è ridotto solo quando il punto corrente non cambia

Non stupisce che H&J abbia le medesime proprietà teoriche e cioè

- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$
- almeno un punto limite è stazionario
  - $\nabla f(\bar{x}) = 0$
  - $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$

Convergenza di Hooke&Jeeves

Nota bene: Come per i metodi precedenti, nel metodo di H&J il passo è ridotto solo quando il punto corrente non cambia

Non stupisce che H&J abbia le medesime proprietà teoriche e cioè

- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$
- almeno un punto limite è stazionario
  - $\nabla f(\bar{x}) = 0$
  - $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$

Convergenza di Hooke&Jeeves

Nota bene: Come per i metodi precedenti, nel metodo di H&J il passo è ridotto solo quando il punto corrente non cambia

Non stupisce che H&J abbia le medesime proprietà teoriche e cioè

- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$
- almeno un punto limite è stazionario
  - $\nabla f(\bar{x}) = 0$
  - $\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Dato un parametro μ, definiamo

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_{n+1})$$

Il metodo usa: $-1 < \mu_{ic} < 0 < \mu_{oc} < \mu_r < \mu_e$ e

$$\begin{array}{lllllll}
\text{(inner contraction)} & x^{ic} & = & x(\mu_{ic}), & f^{ic} & = & f(x^{ic}) \\
\text{(outer contraction)} & x^{oc} & = & x(\mu_{oc}), & f^{oc} & = & f(x^{oc}) \\
\text{(reflect)} & x^{r} & = & x(\mu_{r}), & f^{r} & = & f(x^{r}) \\
\text{(expand)} & x^{e} & = & x(\mu_{e}), & f^{e} & = & f(x^{e})
\end{array}$$

Il metodo di Nelder-Mead

Dato un parametro μ, definiamo

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_{n+1})$$

Il metodo usa: $-1 < \mu_{ic} < 0 < \mu_{oc} < \mu_r < \mu_e$ e

$$\begin{array}{lllllll}
\text{(inner contraction)} & x^{ic} & = & x(\mu_{ic}), & f^{ic} & = & f(x^{ic}) \\
\text{(outer contraction)} & x^{oc} & = & x(\mu_{oc}), & f^{oc} & = & f(x^{oc}) \\
\text{(reflect)} & x^{r} & = & x(\mu_{r}), & f^{r} & = & f(x^{r}) \\
\text{(expand)} & x^{e} & = & x(\mu_{e}), & f^{e} & = & f(x^{e})
\end{array}$$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

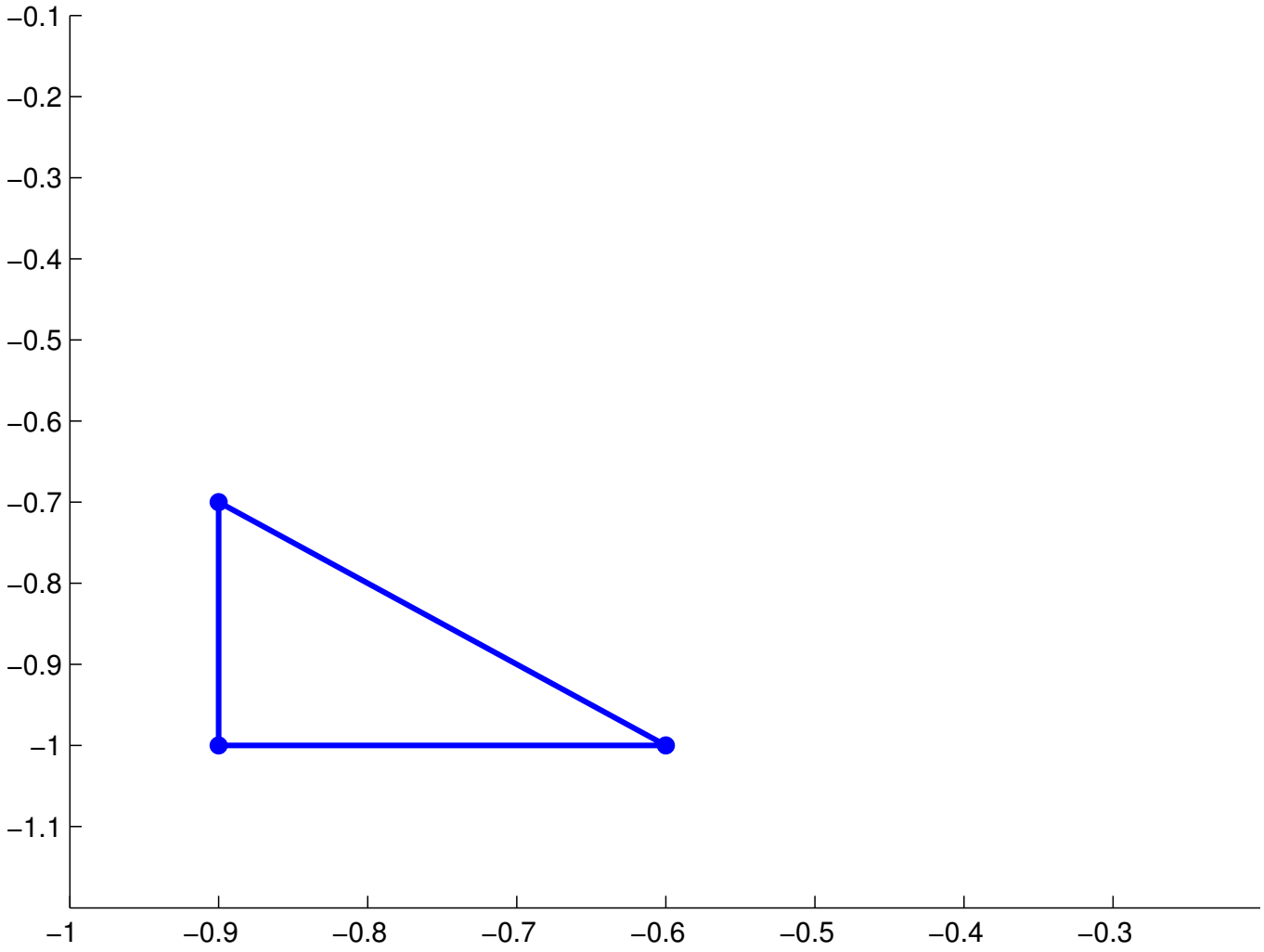
Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

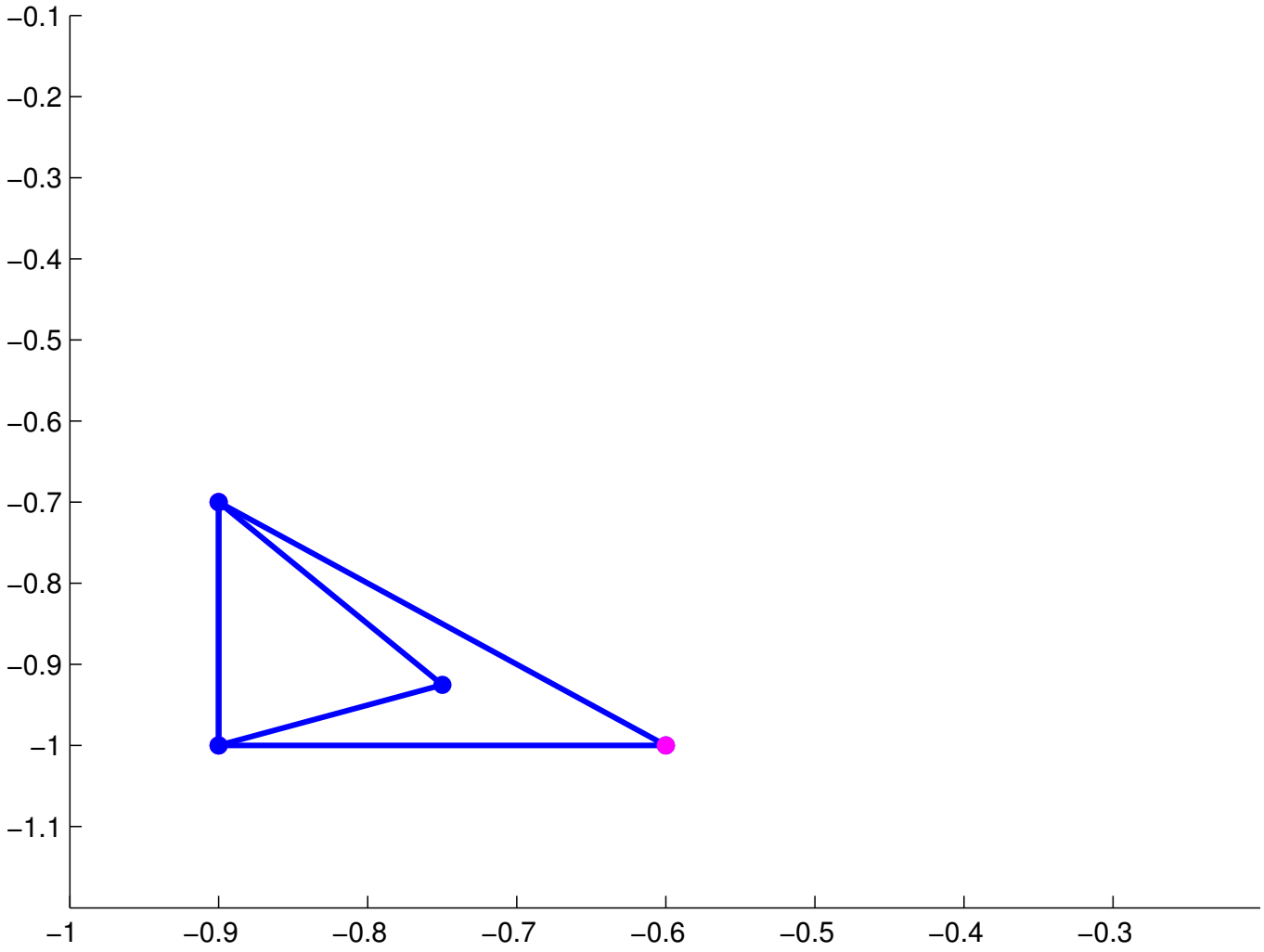
Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

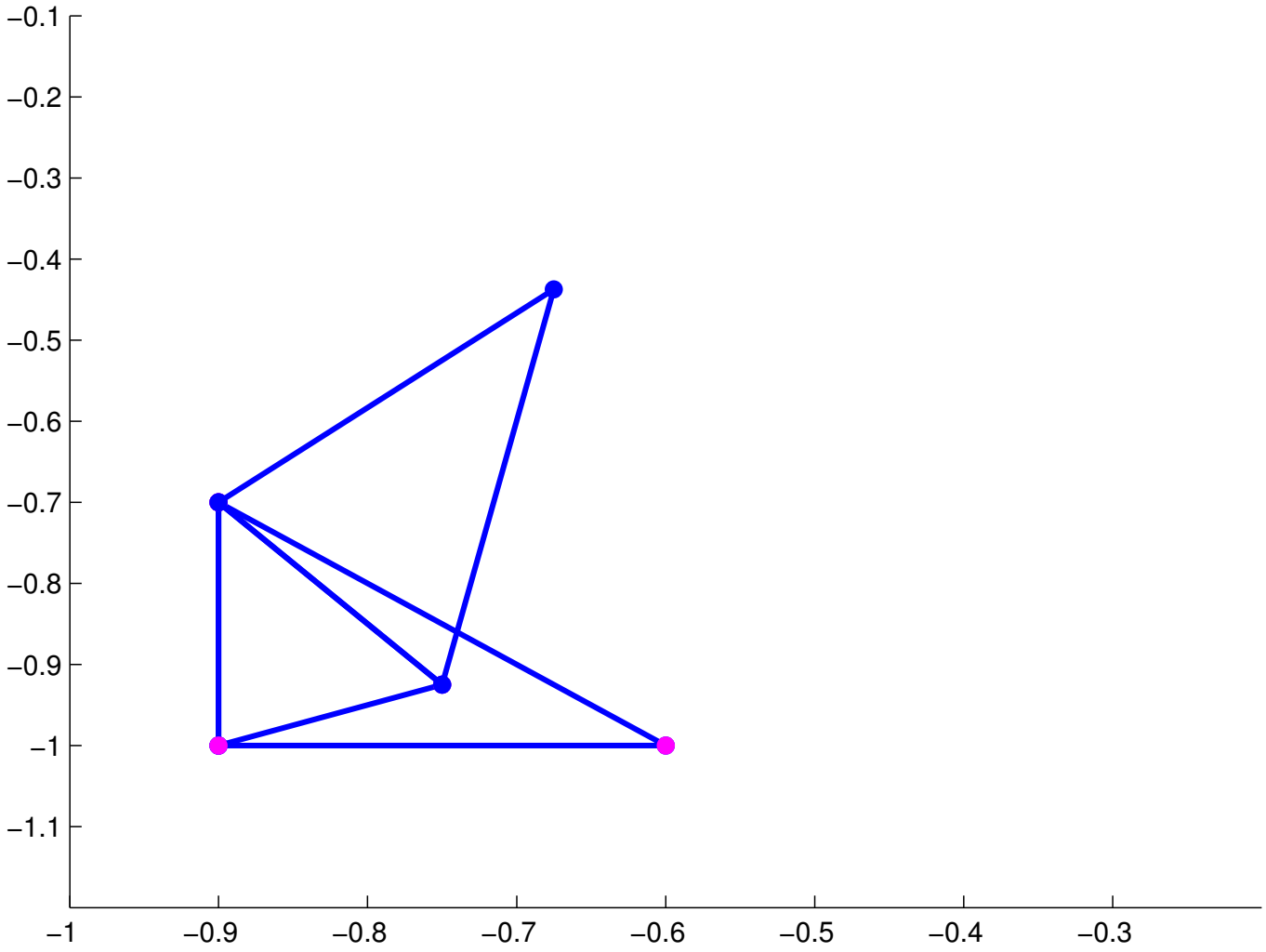
Esempio su Funzione di Broyden



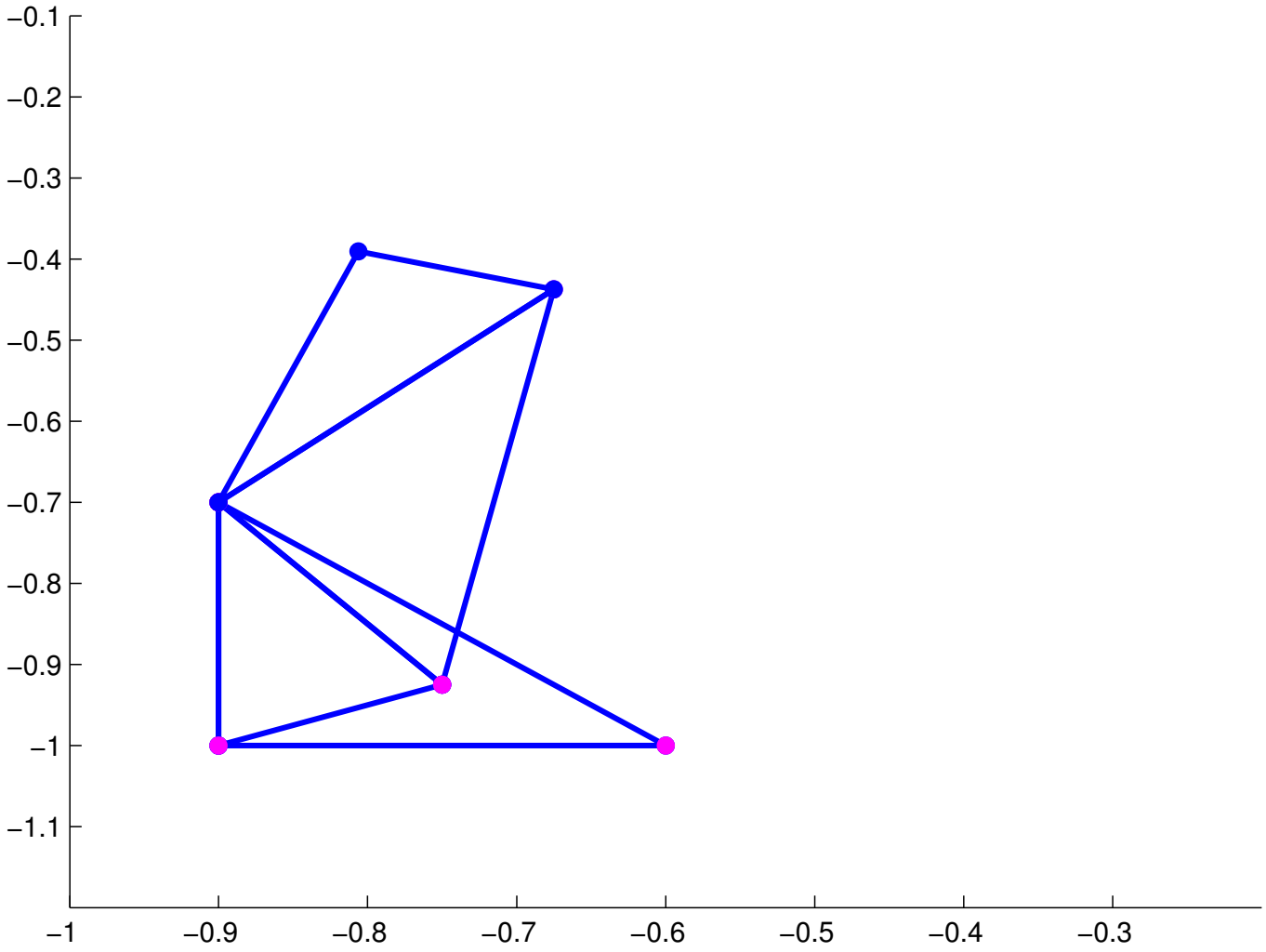
Esempio su Funzione di Broyden



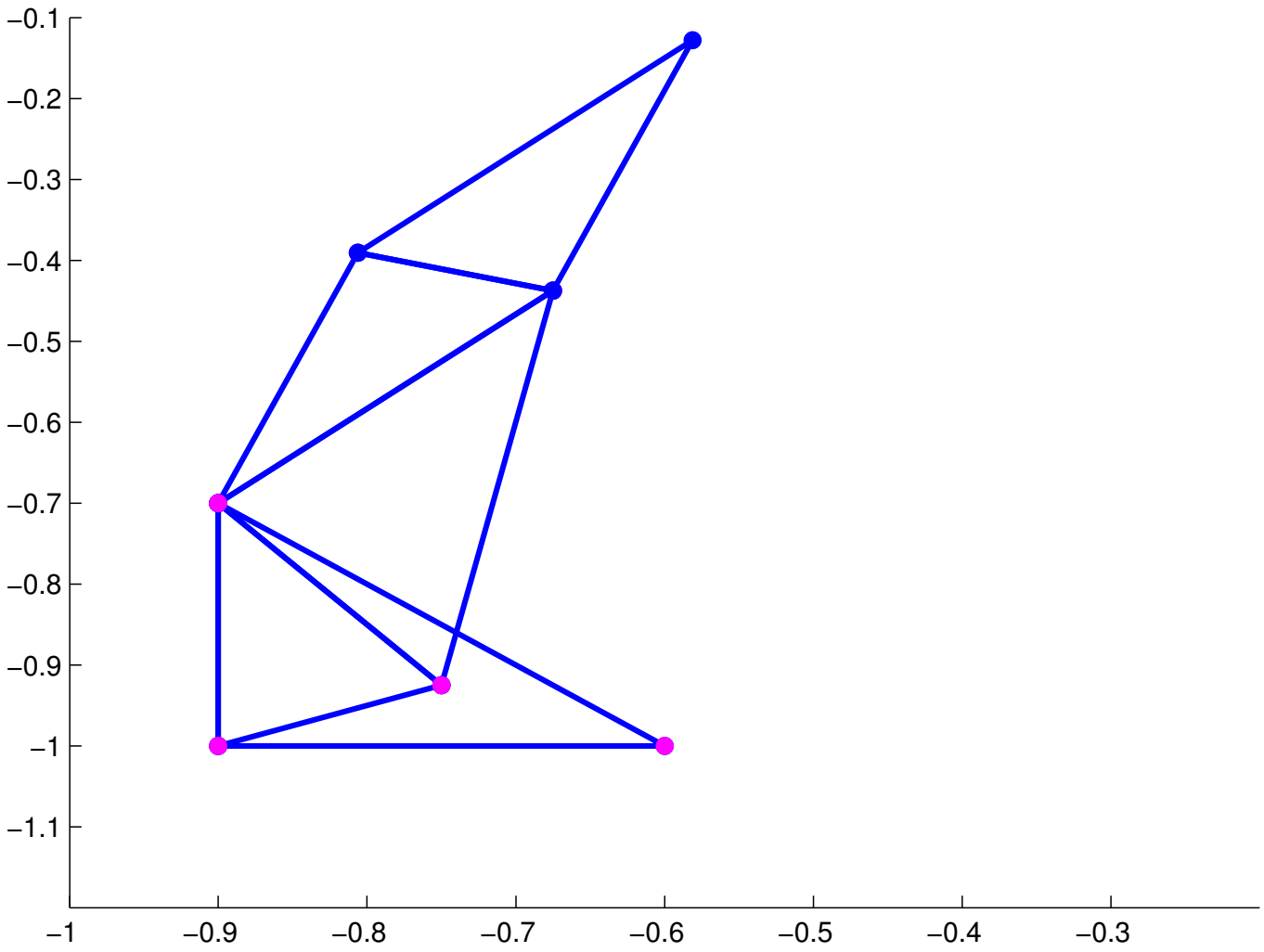
Esempio su Funzione di Broyden



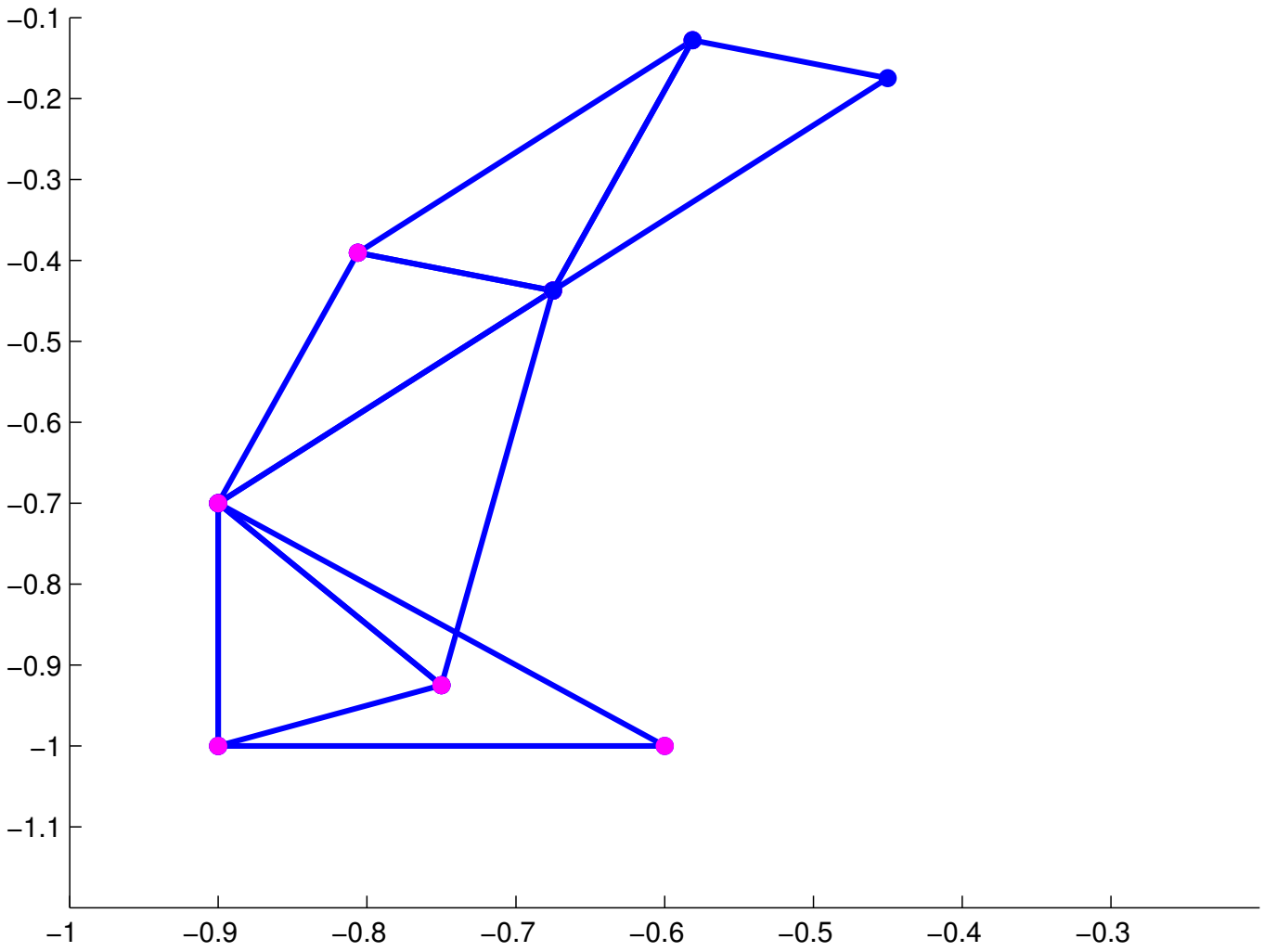
Esempio su Funzione di Broyden



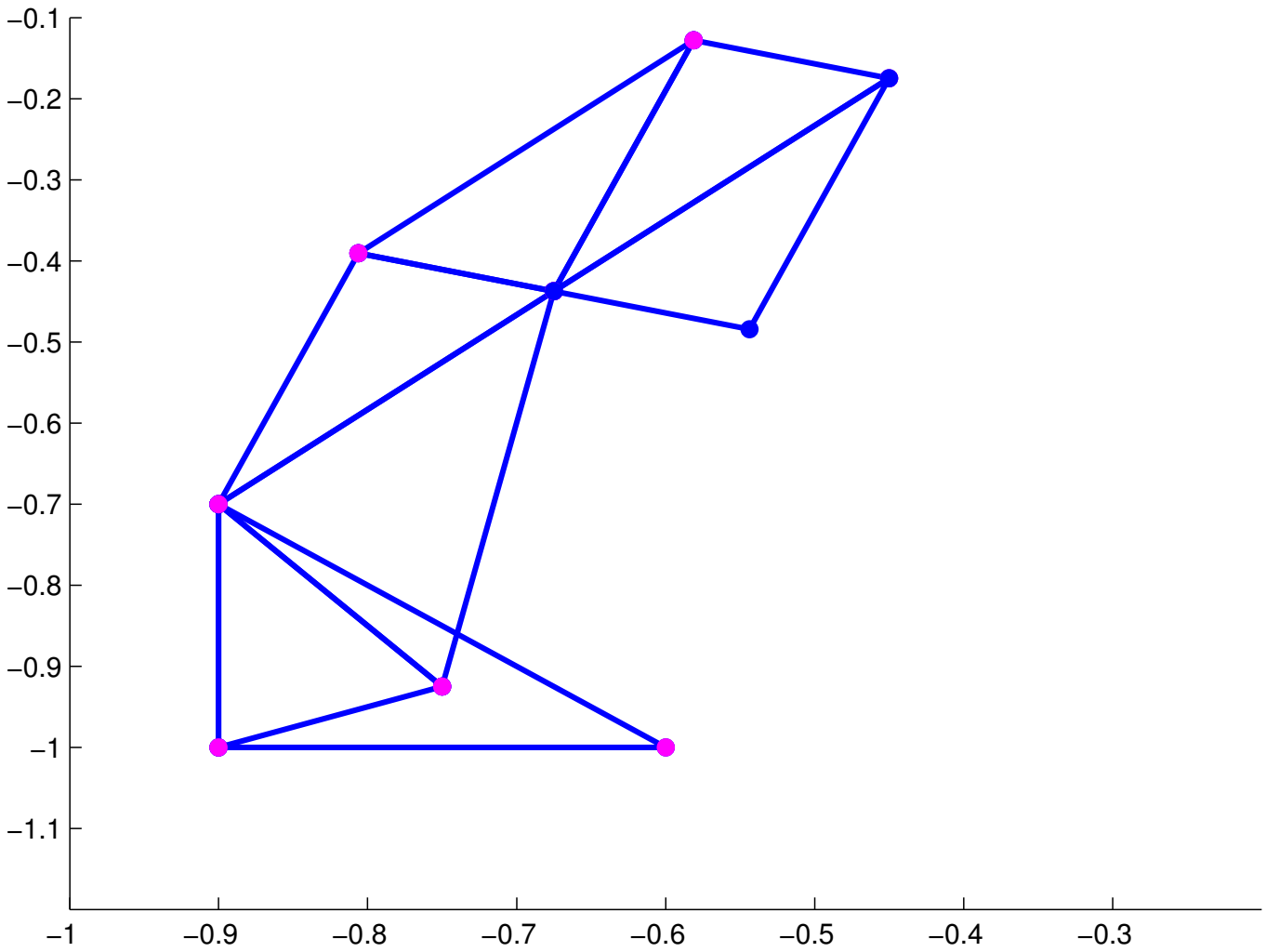
Esempio su Funzione di Broyden



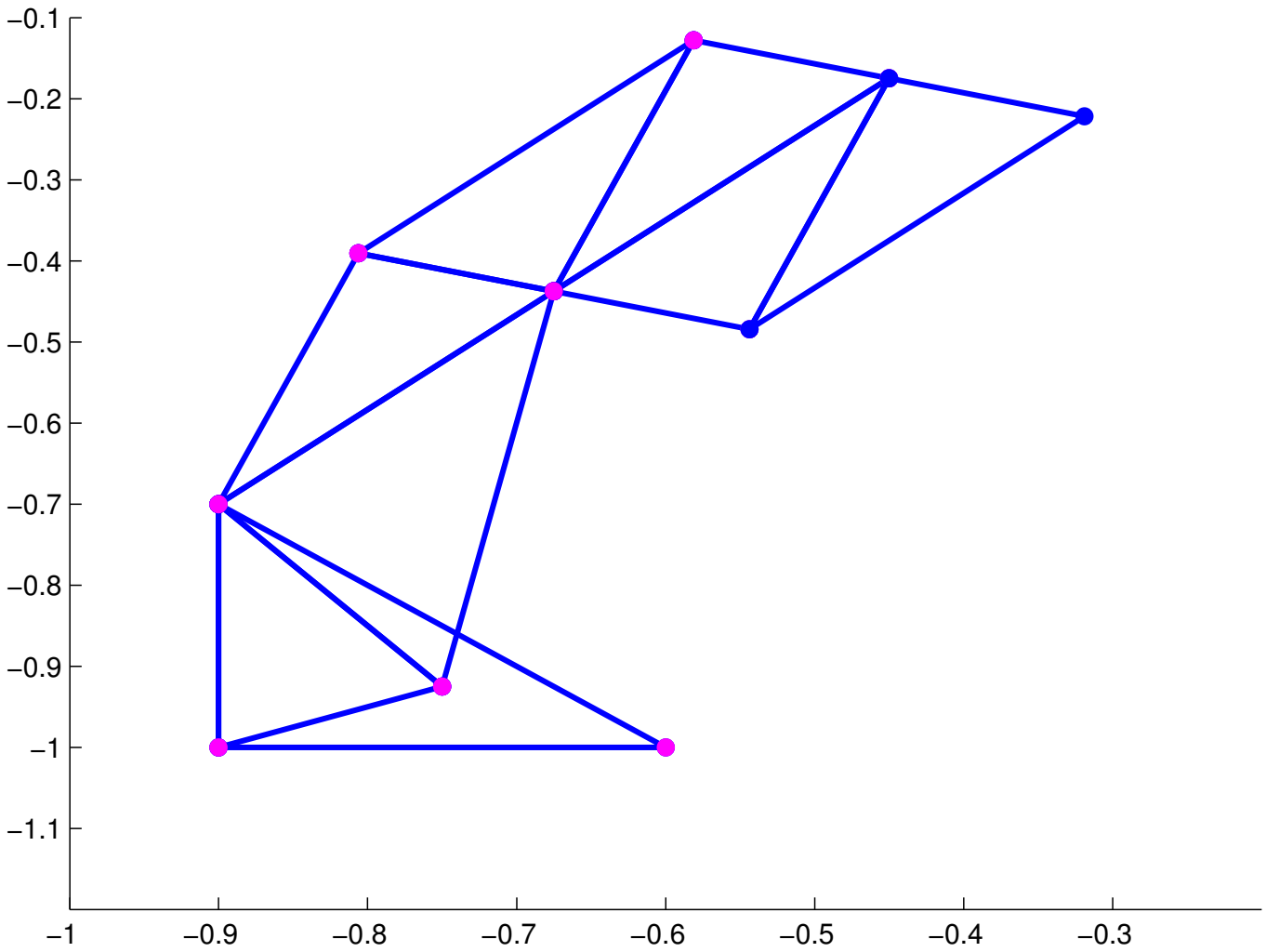
Esempio su Funzione di Broyden



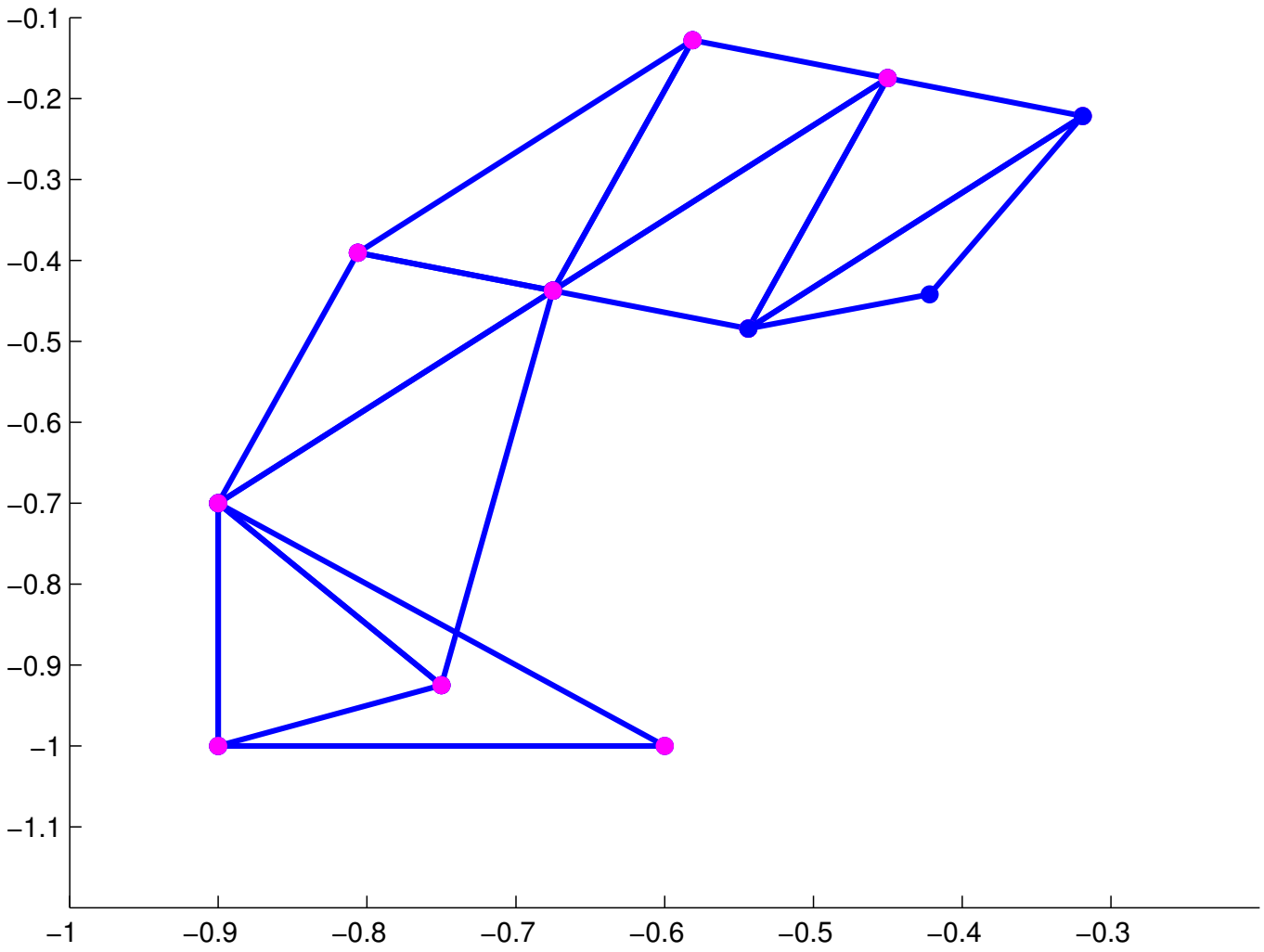
Esempio su Funzione di Broyden



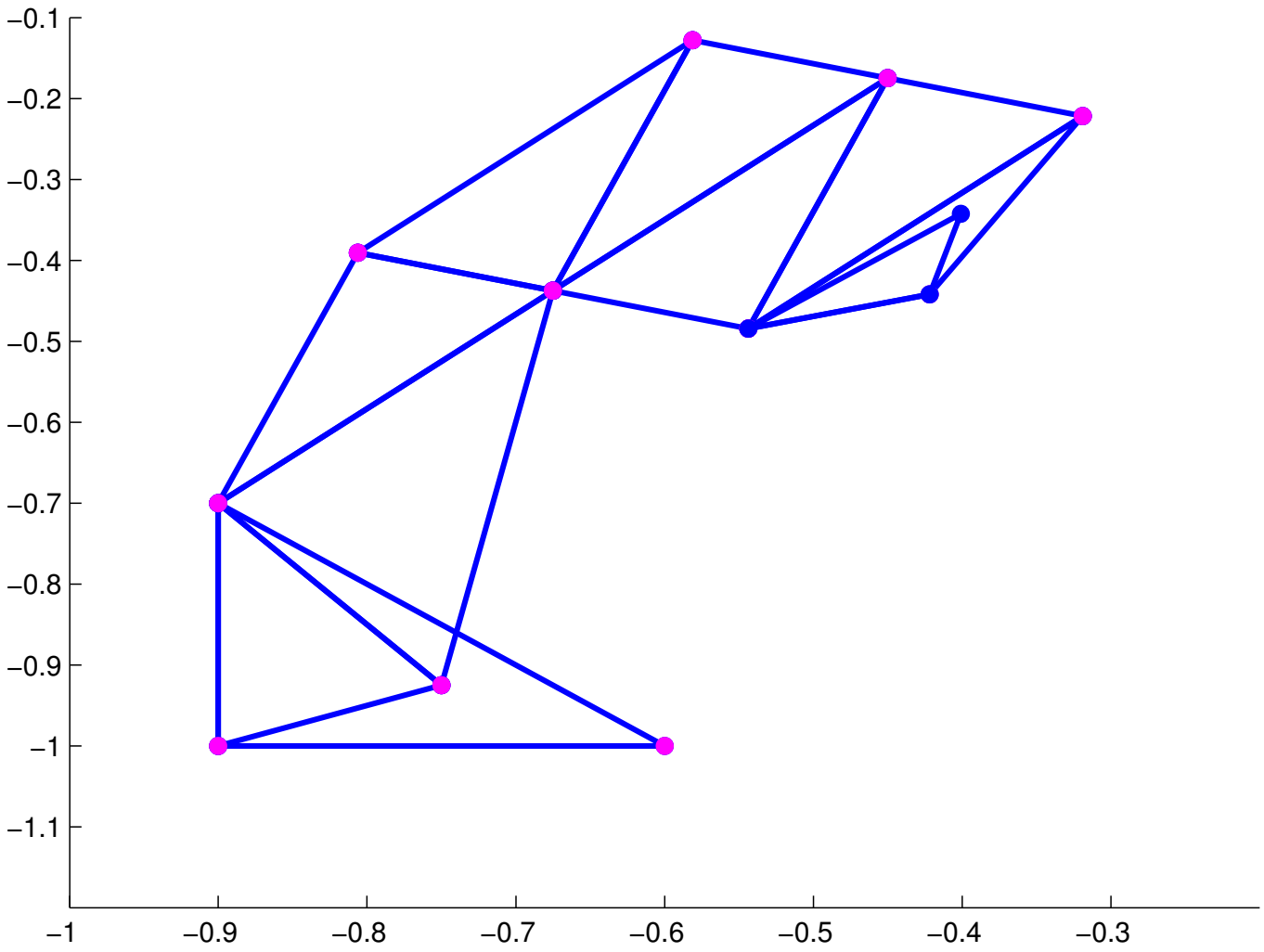
Esempio su Funzione di Broyden



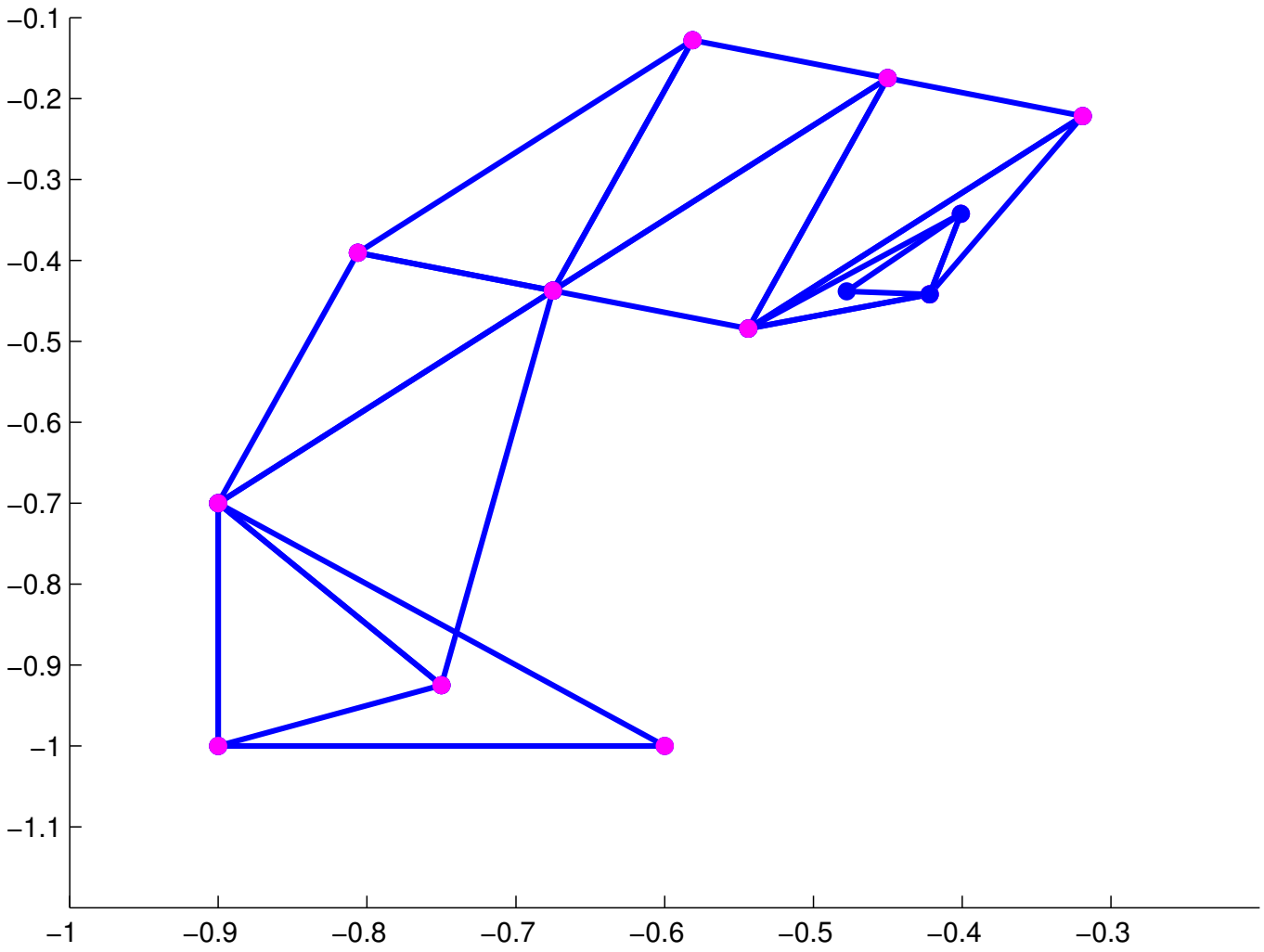
Esempio su Funzione di Broyden



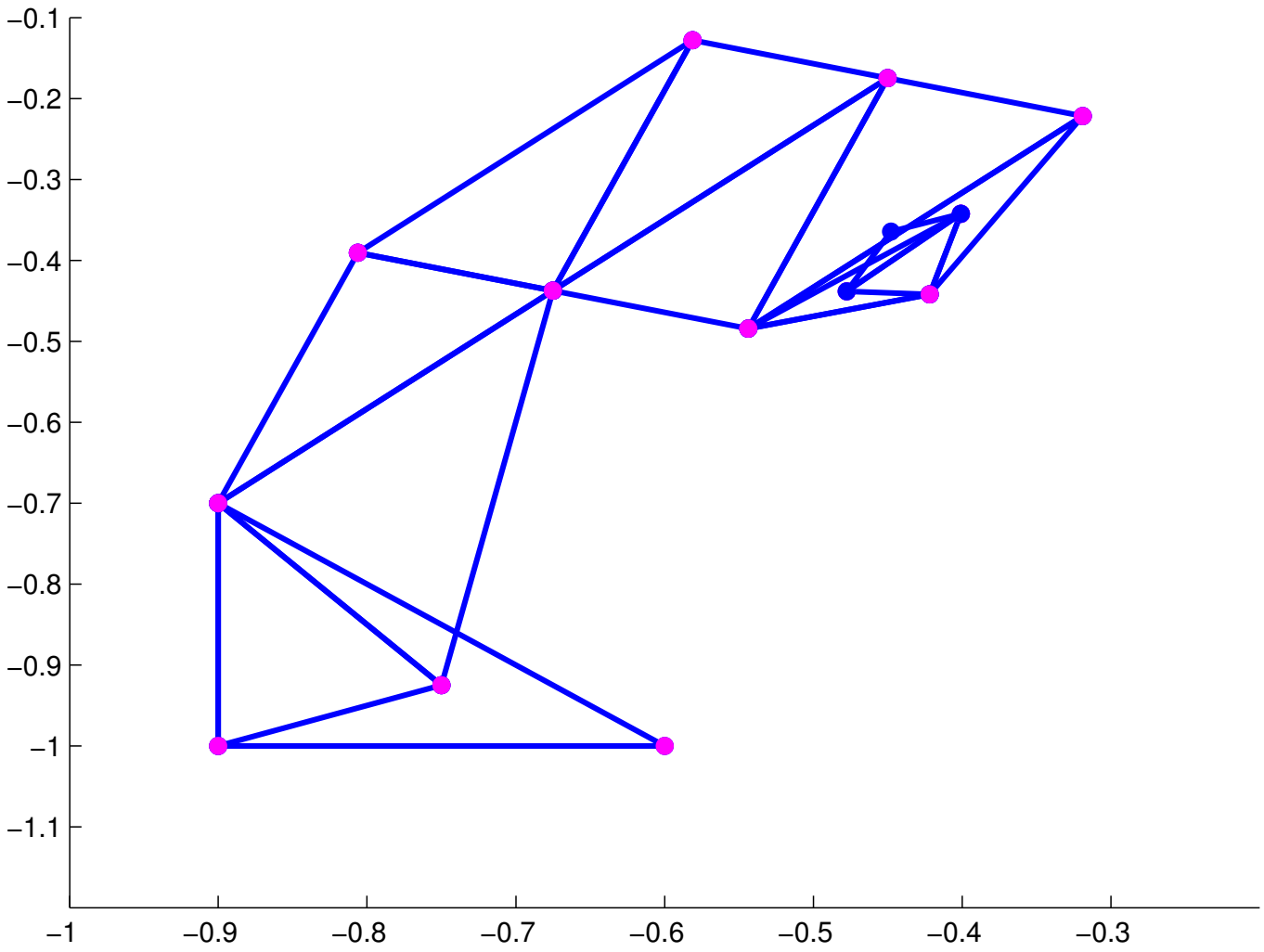
Esempio su Funzione di Broyden



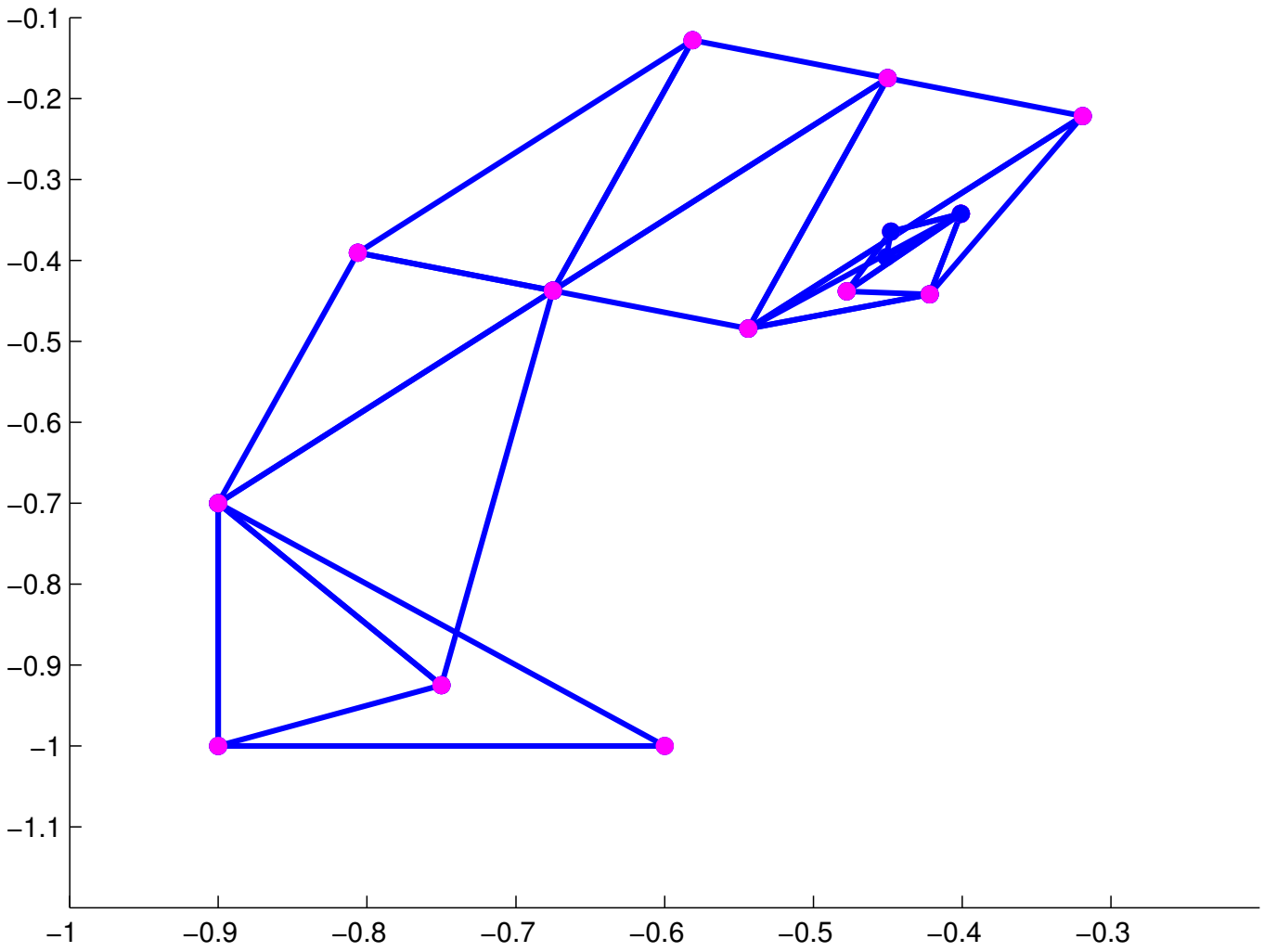
Esempio su Funzione di Broyden



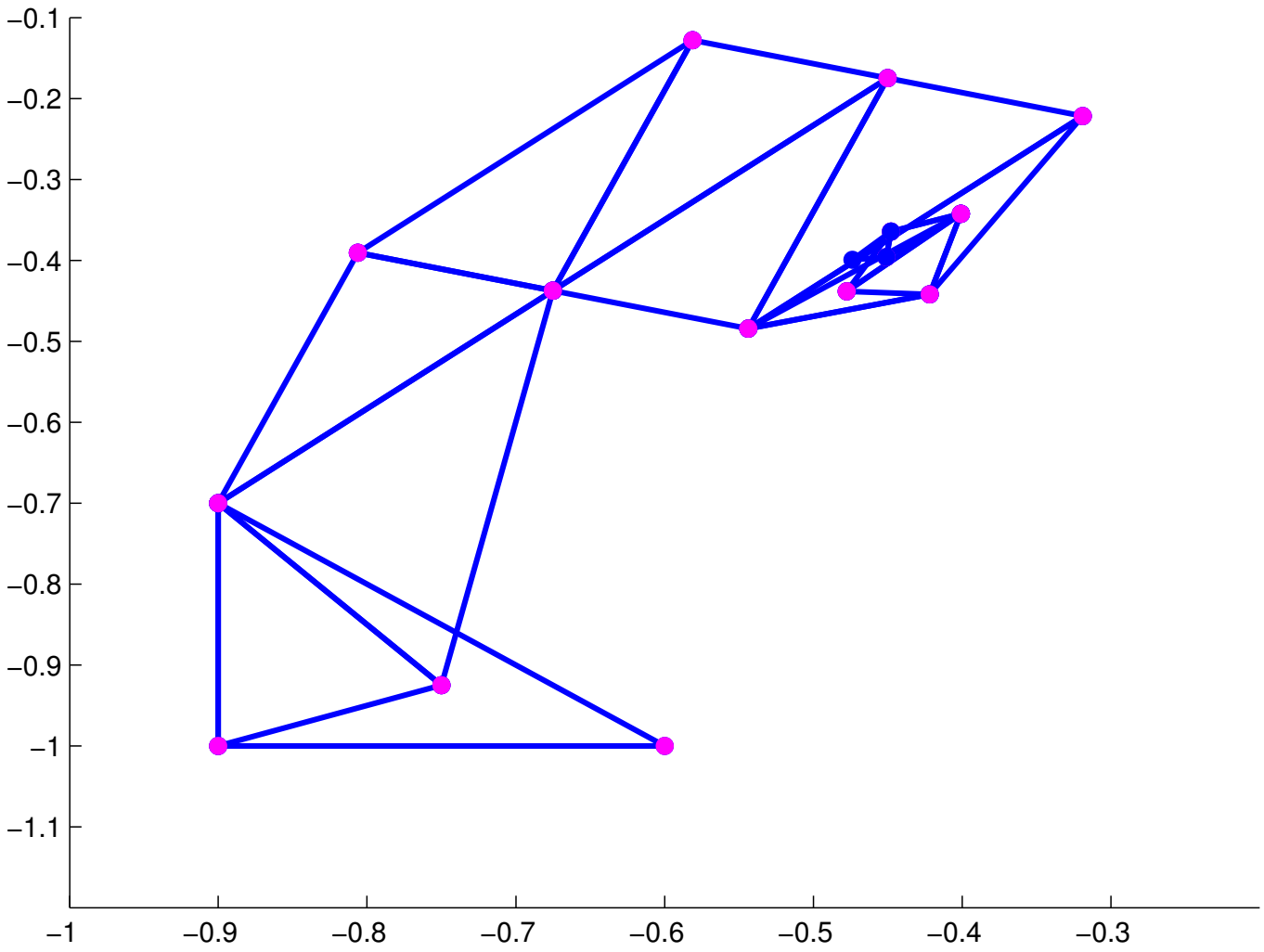
Esempio su Funzione di Broyden



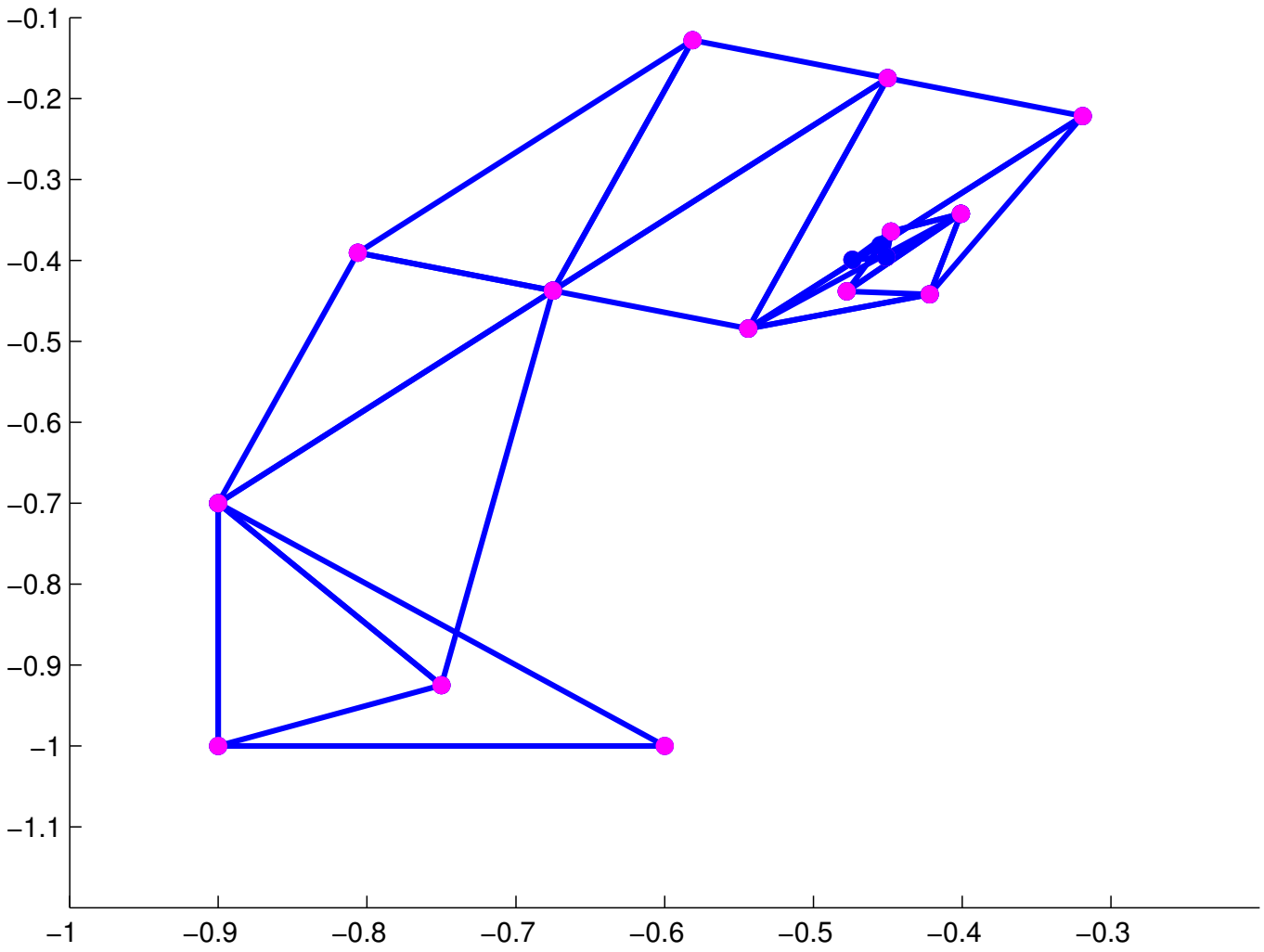
Esempio su Funzione di Broyden



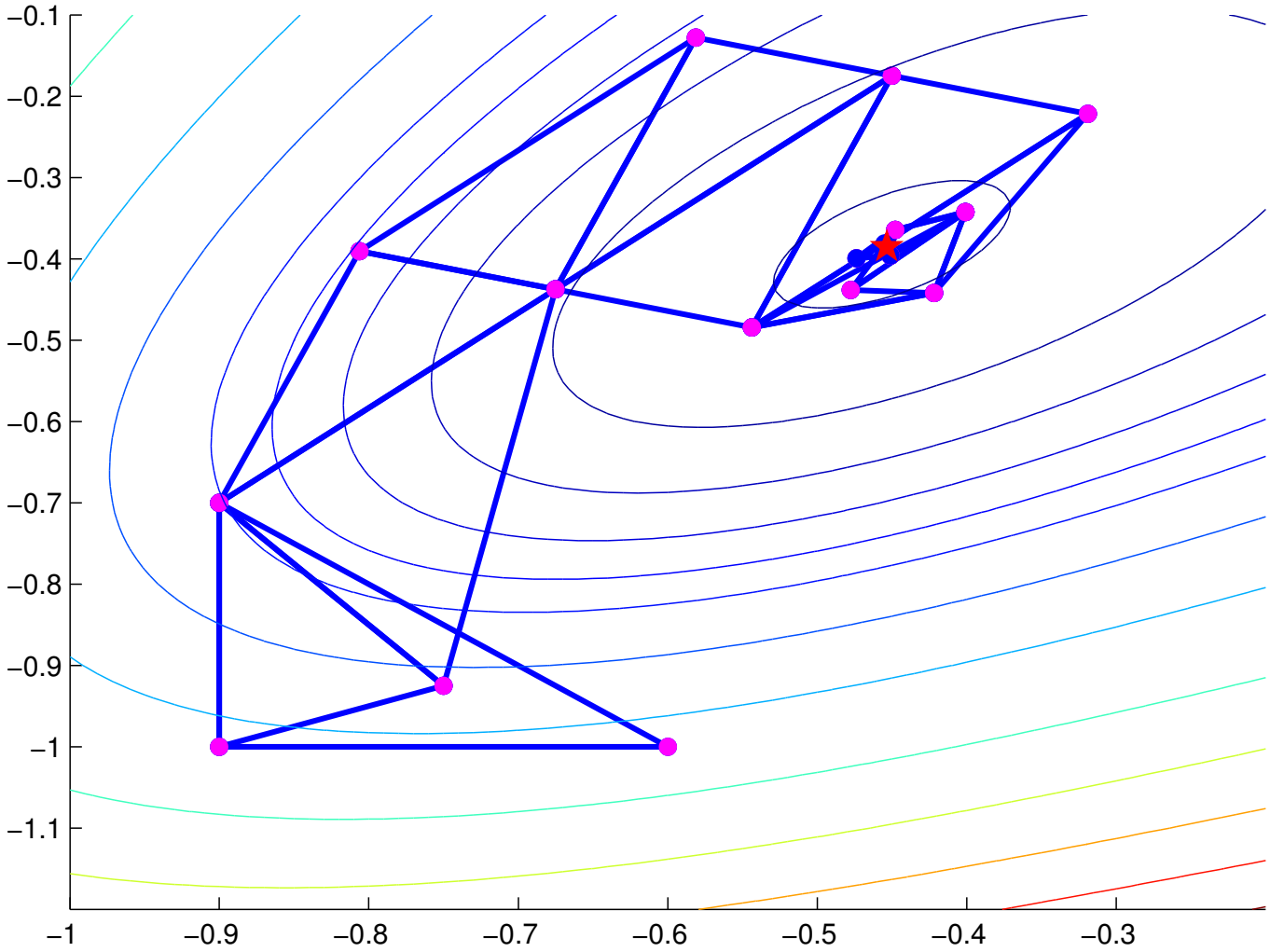
Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

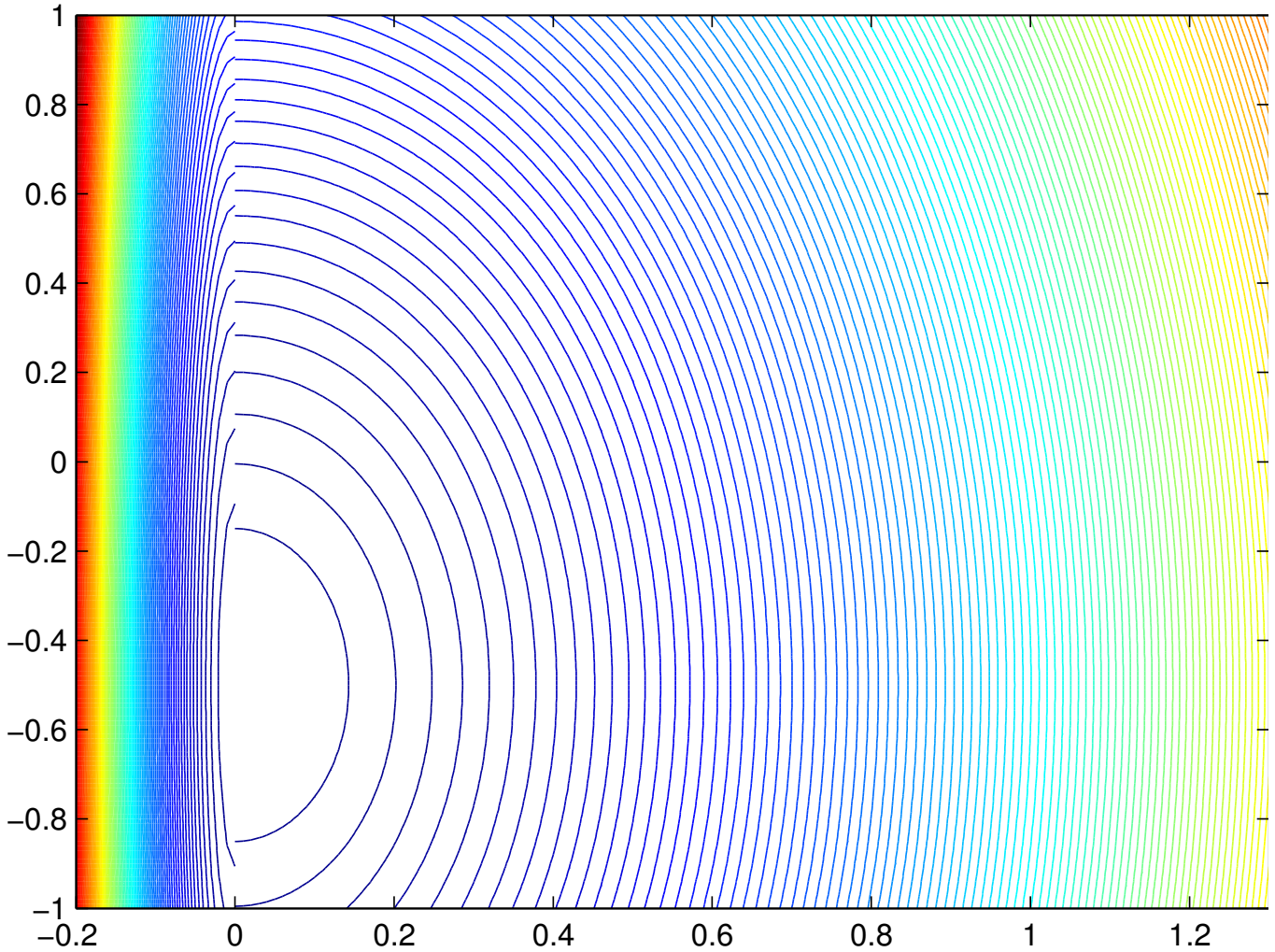
La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

La funzione di McKinnon

Per $\tau = 2$, $\theta = 6$, $\phi = 60$, la funzione è

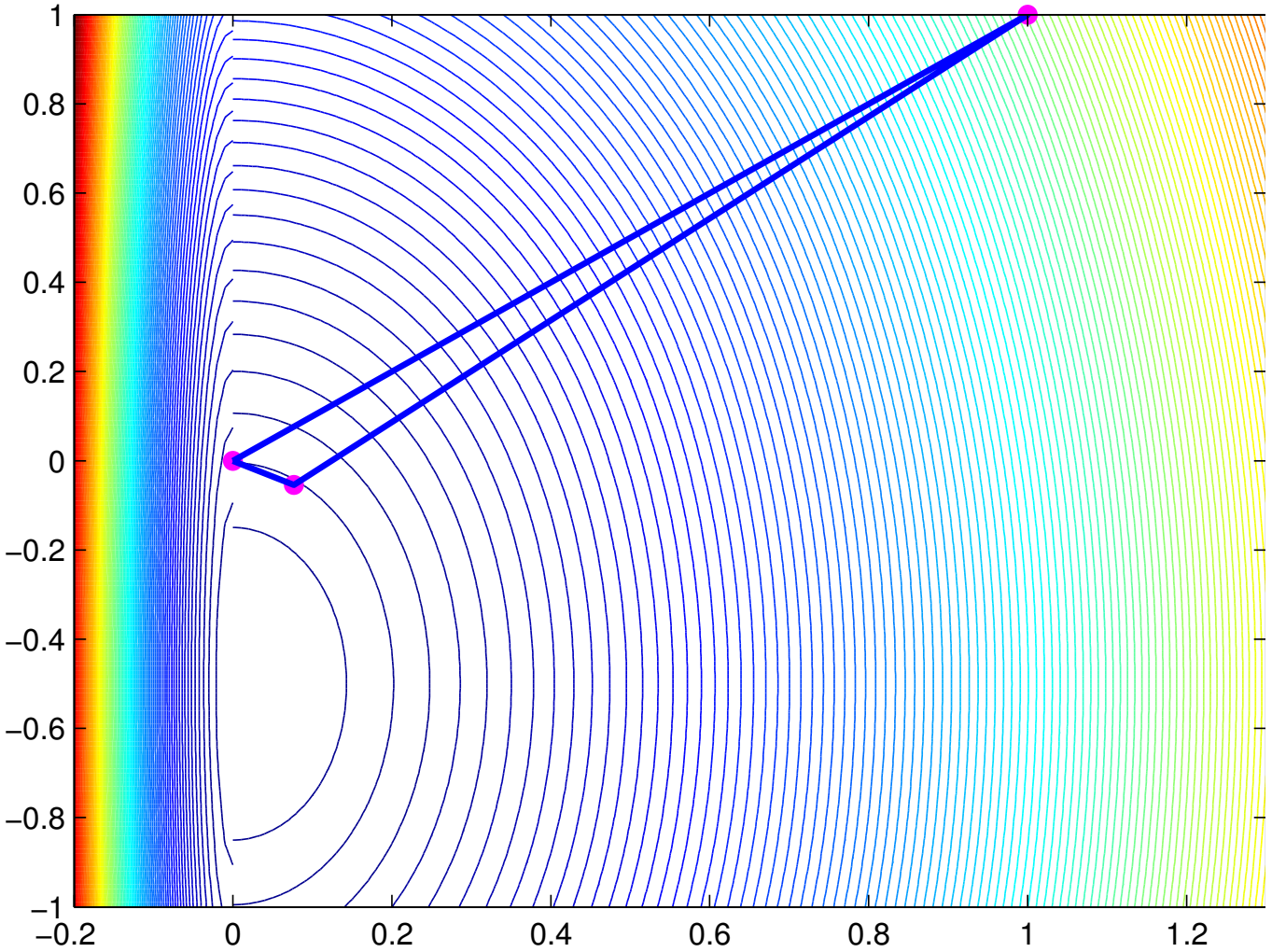


La funzione di McKinnon

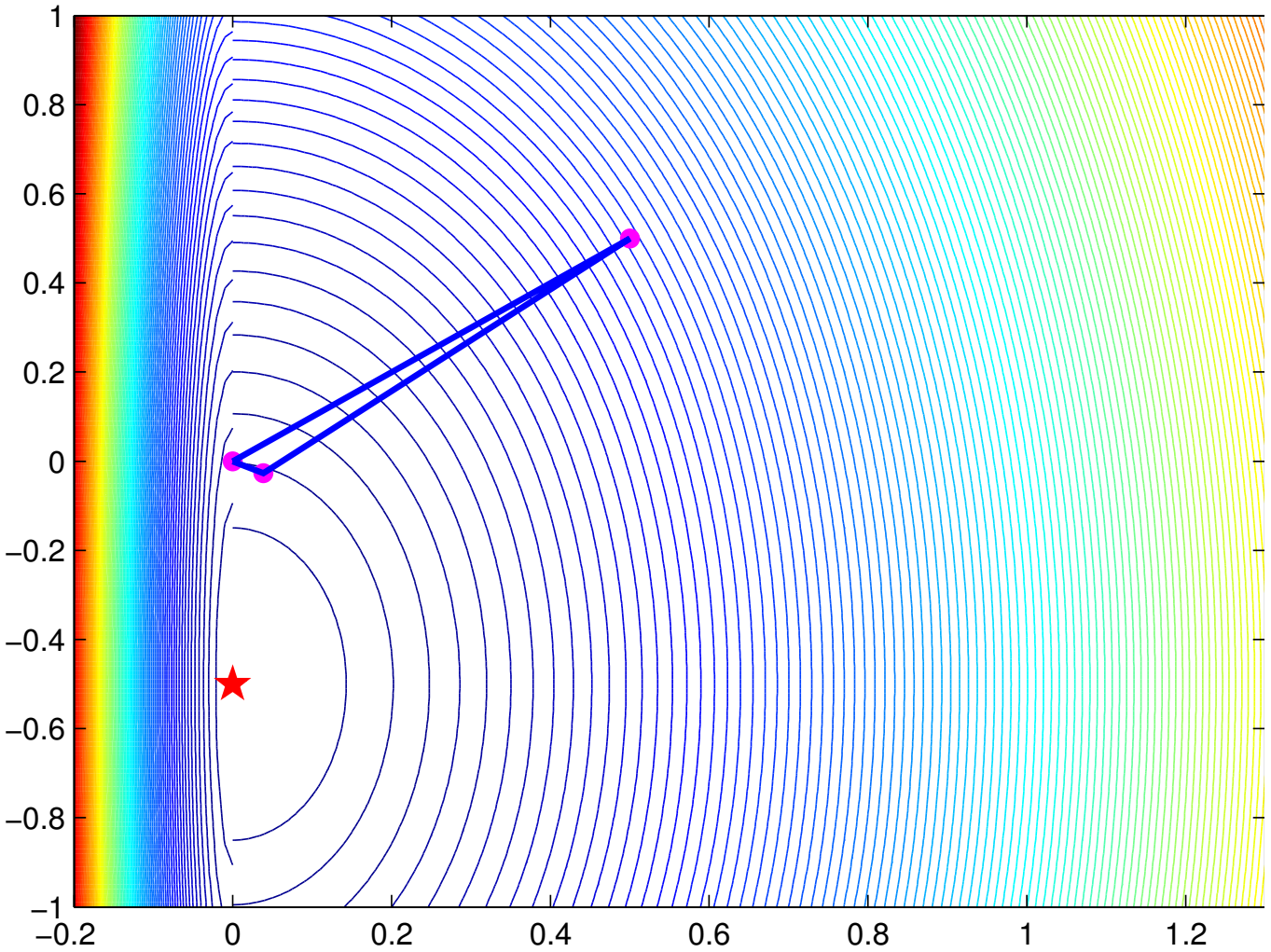
Se inizializziamo il metodo di Nelder-Mead con il simplesso

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{33}}{88} \\ \frac{1-\sqrt{33}}{88} \end{pmatrix}, \right\}$$

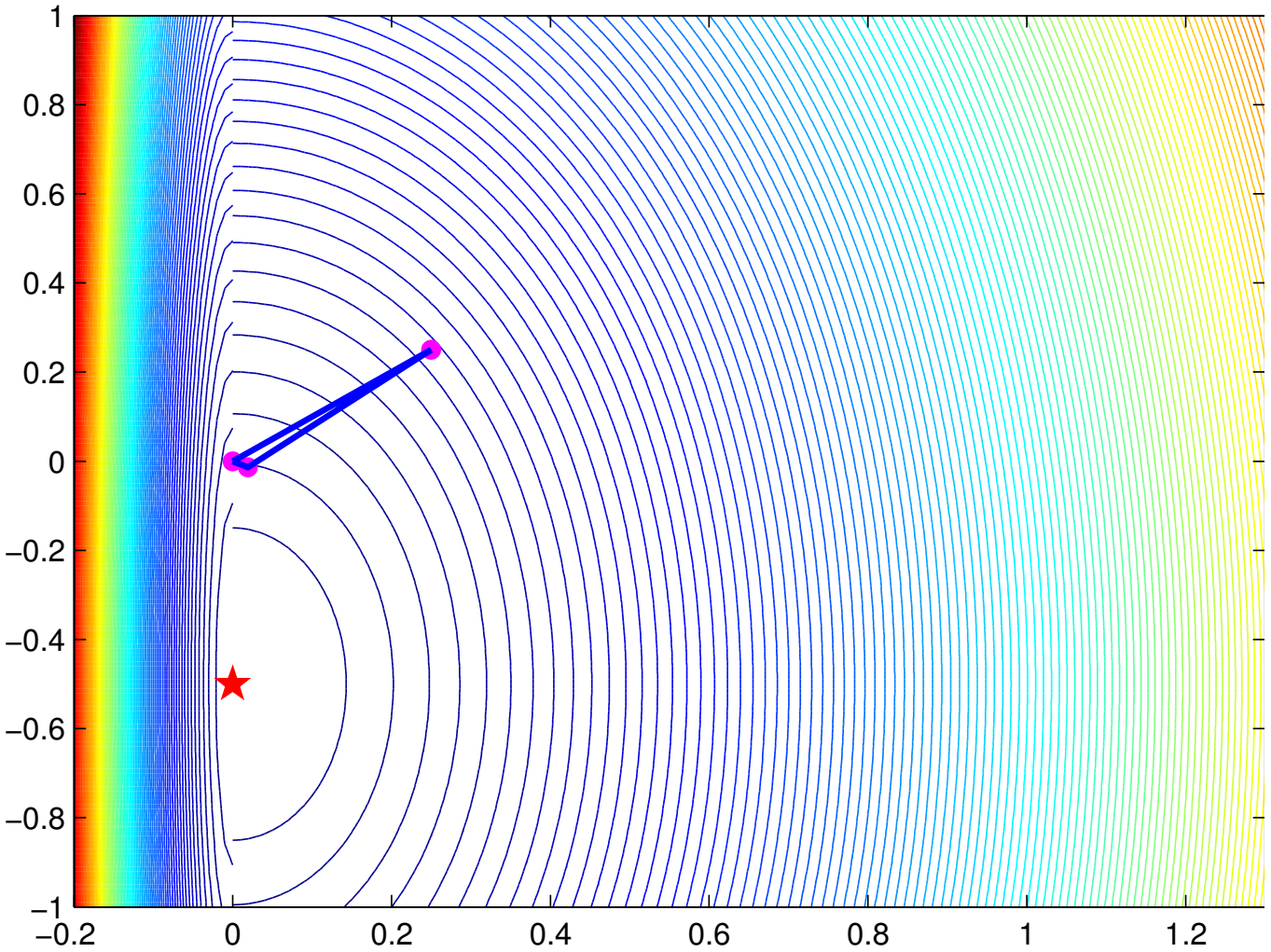
La funzione di McKinnon



La funzione di McKinnon



La funzione di McKinnon



La funzione di McKinnon