Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Venerdì 10 Marzo 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Un po' di definizioni ...

Sia $D = \{d_1, \dots, d_r\} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme finito di vettori

Definizione (Span positivo generato da D)

$$PSpan(D) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i d_i, \qquad \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Definizione (Generatore positivo di $\mathbb{R}^n$)

Se $PSpan(D) = \mathbb{R}^n$, allora D è un generatore positivo di $\mathbb{R}^n$

Definizione (Base positiva di $\mathbb{R}^n$)

Una base positiva di $\mathbb{R}^n$ è un generatore positivo D minimale

Un po' di definizioni ...

Sia $D = \{d_1, \dots, d_r\} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme finito di vettori

Definizione (Span positivo generato da D)

$$PSpan(D) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i d_i, \qquad \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Definizione (Generatore positivo di $\mathbb{R}^n$)

Se $PSpan(D) = \mathbb{R}^n$, allora D è un generatore positivo di $\mathbb{R}^n$

Definizione (Base positiva di $\mathbb{R}^n$)

Una base positiva di $\mathbb{R}^n$ è un generatore positivo D minimale

Un po' di definizioni ...

Sia $D = \{d_1, \dots, d_r\} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme finito di vettori

Definizione (Span positivo generato da D)

$$PSpan(D) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i d_i, \qquad \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Definizione (Generatore positivo di $\mathbb{R}^n$)

Se $PSpan(D) = \mathbb{R}^n$, allora D è un generatore positivo di $\mathbb{R}^n$

Definizione (Base positiva di $\mathbb{R}^n$)

Una base positiva di $\mathbb{R}^n$ è un generatore positivo D minimale

... e qualche proprietà ...

$D = \{d_1, \ldots, d_r\} \subset \mathbb{R}^n$

- Se $PSpan(D) = \mathbb{R}^n$, allora D deve contenere $r-1$ generatori di $\mathbb{R}^n$
- Se D è una base positiva di $\mathbb{R}^n$, allora $n+1 \leq r \leq 2n$ in $\mathbb{R}^n$ sono basi positive, p.es.

$$
\begin{aligned}
D &= \{e_1, \ldots, e_n, \xi\}, \; \xi = -\sum_{i=1}^{n} e_i \\
D &= \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}
\end{aligned}
$$

- Se $PSpan(D) = \mathbb{R}^n$ e $v^\top d \geq 0$, per ogni $d \in D$, allora $v = 0$
- $PSpan(D) = \mathbb{R}^n$ **se e solo se**, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ $(v \neq 0)$, esiste $d \in D$: $v^\top d > 0$
- $PSpan(D) = \mathbb{R}^n$ **se e solo se** $\kappa(D) > 0$

Compass Search debole (CSd)

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $0 < \eta_{\max} < 1 < \phi_{\max}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k+1$; $D_k = \mathcal{G}_k \cup \mathcal{H}_k$ with

$PSpan(\mathcal{G}_k) = \mathbb{R}^n$, $|\mathcal{H}_k| < \infty$,

$\beta_{\min} \leq \|d\| \leq \beta_{\max}$, for all $d \in \mathcal{G}_k$, $\kappa(D_k) > \kappa_{\min}$

if $\exists\ \bar{d} \in D_k$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$, $\Delta \leftarrow \phi_k\Delta$, $\phi_k \in [1, \phi_{\max}]$

else

$\Delta \leftarrow \Delta/2$

endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Generating Set Search (GSS)

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $0 < \eta_{\max} < 1 < \phi_{\max}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k+1$; $D_k = \mathcal{G}_k \cup \mathcal{H}_k$ with

$PSpan(\mathcal{G}_k) = \mathbb{R}^n$, $|\mathcal{H}_k| < \infty$,
$\beta_{\min} \leq \|d\| \leq \beta_{\max}$, for all $d \in \mathcal{G}_k$, $\kappa(D_k) > \kappa_{\min}$

if $\exists\ \bar{d} \in D_k$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**
$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$, $\Delta \leftarrow \phi_k\Delta$, $\phi_k \in [1, \phi_{\max}]$
else
$\Delta \leftarrow \Delta/2$
endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Generating Set Search (GSS)

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $0 < \eta_{\max} < 1 < \phi_{\max}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$; $D_k = \mathcal{G}_k \cup \mathcal{H}_k$ with

$PSpan(\mathcal{G}_k) = \mathbb{R}^n$, $|\mathcal{H}_k| < \infty$,
$\beta_{\min} \leq \|d\| \leq \beta_{\max}$, for all $d \in \mathcal{G}_k$, $\kappa(D_k) > \kappa_{\min}$

if $\exists\ \bar{d} \in D_k$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**
$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$, $\Delta \leftarrow \phi_k\Delta$, $\phi_k \in [1, \phi_{\max}]$
else
$\Delta \leftarrow \Delta/2$
endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Generating Set Search (GSS)

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $0 < \eta_{\max} < 1 < \phi_{\max}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$; $D_k = \mathcal{G}_k \cup \mathcal{H}_k$ with

$PSpan(\mathcal{G}_k) = \mathbb{R}^n$, $|\mathcal{H}_k| < \infty$,
$\beta_{\min} \leq \|d\| \leq \beta_{\max}$, for all $d \in \mathcal{G}_k$, $\kappa(D_k) > \kappa_{\min}$

if $\exists\ \bar{d} \in D_k$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**
$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$, $\Delta \leftarrow \phi_k\Delta$, $\phi_k \in [1, \phi_{\max}]$
else
$\Delta \leftarrow \eta_k\Delta$, $\eta_k \in (0, \eta_{\max}]$
endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Generating Set Search (GSS)

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $0 < \eta_{\max} < 1 < \phi_{\max}$, $\gamma > 0$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k+1$; $D_k = \mathcal{G}_k \cup \mathcal{H}_k$ with

$PSpan(\mathcal{G}_k) = \mathbb{R}^n$, $|\mathcal{H}_k| < \infty$,
$\beta_{\min} \leq \|d\| \leq \beta_{\max}$, for all $d \in \mathcal{G}_k$, $\kappa(D_k) > \kappa_{\min}$

if $\exists\ \bar{d} \in D_k$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$, $\Delta \leftarrow \phi_k\Delta$, $\phi_k \in [1, \phi_{\max}]$

else

$\Delta \leftarrow \eta_k\Delta$, $\eta_k \in (0, \eta_{\max}]$

endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Generating Set Search (GSS)

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $0 < \eta_{\max} < 1$, $\gamma > 0$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$; $D_k = \mathcal{G}_k \cup \mathcal{H}_k$ with

$PSpan(\mathcal{G}_k) = \mathbb{R}^n$, $|\mathcal{H}_k| < \infty$,
$\beta_{\min} \leq \|d\| \leq \beta_{\max}$, for all $d \in \mathcal{G}_k$, $\kappa(D_k) > \kappa_{\min}$

if $\exists\ \bar{d} \in D_k$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) \leq f(x) - \gamma\Delta^2$ **then**
$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$, $\Delta \leftarrow \phi_k\Delta$, $\phi_k \geq 1$
else
$\Delta \leftarrow \eta_k\Delta$, $\eta_k \in (0, \eta_{\max}]$
endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Ricerca di linea senza derivate

$\vdots$

if $\exists\ d \in D$ t.c. $f(x + \Delta d) \leq f(x) - \gamma\Delta^2$ **then**

$\beta = \min\{\Delta 2^j :\ j = 0, 1, 2, \dots\}$ t.c.

$$\begin{aligned} f(x + \beta d) &\leq f(x) - \gamma\beta^2 \\ f(x + 2\beta d) &> f(x) - \gamma(2\beta)^2 \end{aligned}$$

$\Delta \leftarrow \beta$, $x \leftarrow x + \Delta d$

else $\Delta \leftarrow \Delta/2$ **endif**

$\vdots$

Ricerca di linea senza derivate

$\vdots$

if $\exists\ d \in D$ t.c. $f(x + \Delta d) \leq f(x) - \gamma \Delta^2$ **then**

$\beta = \min\{\Delta 2^j :\ j = 0, 1, 2, \dots\}$ t.c.

$$\begin{aligned} f(x + \beta d) &\leq f(x) - \gamma \beta^2 \\ f(x + 2\beta d) &> f(x) - \gamma (2\beta)^2 \end{aligned}$$

$\Delta \leftarrow \beta$, $x \leftarrow x + \Delta d$

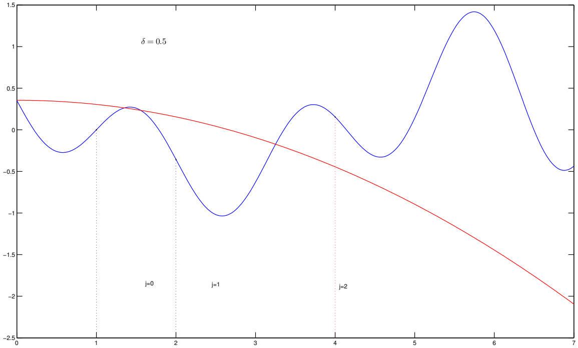
else $\Delta \leftarrow \Delta/2$ **endif**

$\vdots$

Ricerca di linea senza derivate

Siano

$$\begin{aligned}\psi(\beta) &= f(x+\beta d) \ e \\ \Psi(\beta) &= f(x) - \gamma\beta^2\end{aligned}$$



Proprietà teoriche

Se $L(x_0)$ è compatto, si può (facilmente) dimostrare che:

- La ricerca di linea restituisce un valore β finito
- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$

Se $L(x_0)$ è compatto e f continuamente differenziabile, allora

- $\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$ (ogni p.to limite è stazionario)

Proprietà teoriche

Se $L(x_0)$ è compatto, si può (facilmente) dimostrare che:

- La ricerca di linea restituisce un valore β finito
- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$

Se $L(x_0)$ è compatto e f continuamente differenziabile, allora

- $\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$ (ogni p.to limite è stazionario)

Proprietà teoriche

Se $L(x_0)$ è compatto, si può (facilmente) dimostrare che:

- La ricerca di linea restituisce un valore β finito
- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$

Se $L(x_0)$ è compatto e f continuamente differenziabile, allora

- $\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$ (ogni p.to limite è stazionario)

Proprietà teoriche

Se $L(x_0)$ è compatto, si può (facilmente) dimostrare che:

- La ricerca di linea restituisce un valore β finito
- $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0$

Se $L(x_0)$ è compatto e f continuamente differenziabile, allora

- $\lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$ (ogni p.to limite è stazionario)

Vi ricordo che ...

... abbiamo considerato il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ f(x)$$

- problema senza vincoli
- $f(x)$ continuamente differenziabile ma
- $\nabla f(x)$ non disponibile (o troppo costoso)
- ricerca di un minimo locale o punto stazionario

Situazioni più complesse

- presenza di vincoli
  - "facili" (limitazioni sulle var.)
  - "difficili" ($g(x) \leq 0$, nonlineari generali)
- $f(x)$ e/o $g(x)$ continue ma non differenziabili
- presenza di più funzioni obiettivo
- presenza di variabili "discrete"
- ricerca di un minimo globale

DFL (Derivative-Free Library), download gratuito di metodi che non usano derivate prime

`http://www.iasi.cnr.it/~liuzzi/DFL`

`http://www.dis.uniroma1.it/~lucidi/DFL`

Approfondimenti

- Introduction to Derivative-Free Optimization.
  A.R.Conn, K. Scheinberg, L.N. Vicente, MPS-SIAM series on Optimization

Optimization Game

- 6 funzioni non lineari, non-convesse e multimodali
- $x \in \mathbb{R}^n$ con differenti valori di n
- f.ob. nonlineare
- limitazioni inf. e sup. sulle variabili

Obiettivo: determinare valori "bassi" di funzione obiettivo per il maggior numero di coppie (funzione,n)

I problemi

Funzione	n.vars
Ackley	2,5,10,20,50
Michalewics	2,5,10
Perm1	2,5,10,20
Pinter1	2,5,10,20,50
Rastrigin	2,5,10,20,50
Schwefel	2,5,10,20,50

Tot. 27 problemi

Le regole del gioco

- Potete organizzarvi in **squadre** (da uno, due, tre, ...)
- **Non potete** passare informazioni tra squadre
- Potete discutere all'interno di una squadra
- Ogni squadra può fare domande (a me), ma la mia risposta è solo per la squadra che ha fato la domanda
- Potete usare uno o più solutori di quelli visti fin ora
- Memorizzate, per ogni coppia (funzione, n), il **punto** corrispondente al valore migliore determinato, oltre che il valore di f
- Se riuscite, memorizzate il **numero di calcoli di funzione** effettuati per determinare il valore migliore