

Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi¹

Venerdì 10 Marzo 2017

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Un po' di definizioni ...

Sia $D = \{d_1, \dots, d_r\} \subset \mathbb{R}^n$ un insieme finito di vettori

Definizione (Span positivo generato da D)

$$PSpan(D) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=1}^r \lambda_i d_i, \quad \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Definizione (Generatore positivo di \mathbb{R}^n)

Se $PSpan(D) = \mathbb{R}^n$, allora D è un generatore positivo di \mathbb{R}^n

Definizione (Base positiva di \mathbb{R}^n)

Una base positiva di \mathbb{R}^n è un generatore positivo D minimale

... e qualche proprietà ...

$$D = \{d_1, \dots, d_r\} \subset \mathbb{R}^n$$

- Se $P\text{Span}(D) = \mathbb{R}^n$, allora D deve contenere $r - 1$ generatori di \mathbb{R}^n
- Se D è una base positiva di \mathbb{R}^n , allora $n + 1 \leq r \leq 2n$ in \mathbb{R}^n sono basi positive, p.es.

$$D = \{e_1, \dots, e_n, \xi\}, \quad \xi = -\sum_{i=1}^n e_i$$

$$D = \{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$$

- Se $P\text{Span}(D) = \mathbb{R}^n$ e $v^\top d \geq 0$, per ogni $d \in D$, allora $v = 0$
- $P\text{Span}(D) = \mathbb{R}^n$ **se e solo se**, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ ($v \neq 0$), esiste $d \in D$: $v^\top d > 0$
- $P\text{Span}(D) = \mathbb{R}^n$ **se e solo se** $\kappa(D) > 0$

Compass Search debole (CSd) Generating Set Search (GSS)

INPUT: $x_0, \Delta_0, \Delta_{min}, \maxit, 0 < \eta_{max} < 1 < \phi_{max}$

$k \leftarrow 0, x \leftarrow x_0, \Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \maxit$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1; D_k = \mathcal{G}_k \cup \mathcal{H}_k$ with

$P\text{Span}(\mathcal{G}_k) = \mathbb{R}^n, |\mathcal{H}_k| < \infty,$

$\beta_{min} \leq \|d\| \leq \beta_{max},$ for all $d \in \mathcal{G}_k, \kappa(D_k) > \kappa_{min}$

if $\exists \bar{d} \in D_k$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}, \Delta \leftarrow \phi_k \Delta, \phi_k \in [1, \phi_{max}]$

else

$\Delta \leftarrow \Delta / 2\eta_k \Delta, \eta_k \in (0, \eta_{max}]$

endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Generating Set Search (GSS)

INPUT: $x_0, \Delta_0, \Delta_{min}, \text{maxit}, 0 < \eta_{max} < 1 < \phi_{max}, \gamma > 0$

$k \leftarrow 0, x \leftarrow x_0, \Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \text{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1; D_k = \mathcal{G}_k \cup \mathcal{H}_k$ with

$P\text{Span}(\mathcal{G}_k) = \mathbb{R}^n, |\mathcal{H}_k| < \infty,$

$\beta_{min} \leq \|d\| \leq \beta_{max},$ for all $d \in \mathcal{G}_k, \kappa(D_k) > \kappa_{min}$

if $\exists \bar{d} \in D_k$ s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x) \leq f(x) - \gamma\Delta^2$ **then**

$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}, \Delta \leftarrow \phi_k\Delta, \phi_k \in [1, \phi_{max}] \phi_k \geq 1$

else

$\Delta \leftarrow \eta_k\Delta, \eta_k \in (0, \eta_{max}]$

endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Ricerca di linea senza derivate

⋮

if $\exists d \in D$ t.c. $f(x + \Delta d) \leq f(x) - \gamma \Delta^2$ **then** $\beta = \min\{\Delta 2^j : j = 0, 1, 2, \dots\}$ t.c.

$$f(x + \beta d) \leq f(x) - \gamma \beta^2$$

$$f(x + 2\beta d) > f(x) - \gamma (2\beta)^2$$

$$\Delta \leftarrow \beta, x \leftarrow x + \Delta d$$

else $\Delta \leftarrow \Delta/2$ **endif**

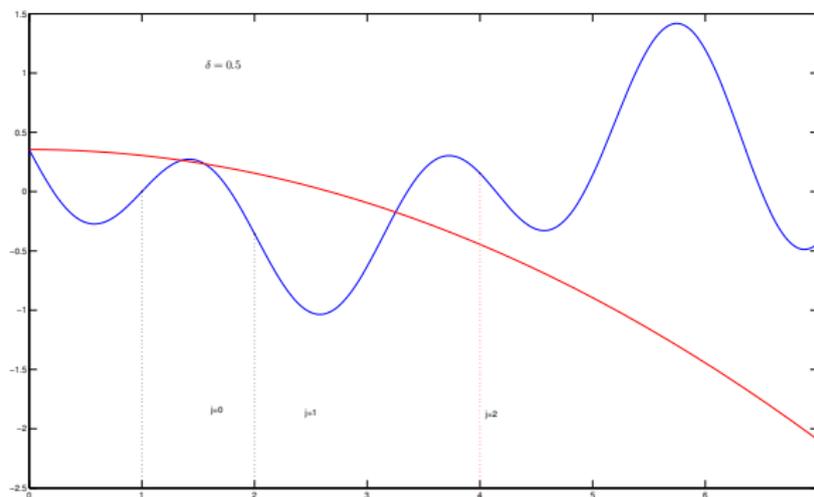
⋮

Ricerca di linea senza derivate

Siano

$$\psi(\beta) = f(x + \beta d) \text{ e}$$

$$\Psi(\beta) = f(x) - \gamma\beta^2$$



Proprietà teoriche

Se $L(x_0)$ è compatto, si può (facilmente) dimostrare che:

- La ricerca di linea restituisce un valore β finito
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_k = 0$

Se $L(x_0)$ è compatto e f continuamente differenziabile, allora

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$ (ogni p.to limite è stazionario)

Vi ricordo che ...

... abbiamo considerato il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- problema senza vincoli
- $f(x)$ continuamente differenziabile ma
- $\nabla f(x)$ non disponibile (o troppo costoso)
- ricerca di un minimo locale o punto stazionario

Situazioni più complesse

- presenza di vincoli
 - “facili” (limitazioni sulle var.)
 - “difficili” ($g(x) \leq 0$, nonlineari generali)
- $f(x)$ e/o $g(x)$ continue ma non differenziabili
- presenza di più funzioni obiettivo
- presenza di variabili “discrete”
- ricerca di un minimo globale

DFL (Derivative-Free Library), download gratuito di metodi che non usano derivate prime

<http://www.iasi.cnr.it/~liuzzi/DFL>

<http://www.dis.uniroma1.it/~lucidi/DFL>

Approfondimenti

- Introduction to Derivative-Free Optimization.
A.R.Conn, K. Scheinberg, L.N. Vicente, MPS-SIAM series on Optimization

Optimization Game

- 6 funzioni non lineari, non-convesse e multimodali
- $x \in \mathbb{R}^n$ con differenti valori di n
- f.ob. nonlineare
- limitazioni inf. e sup. sulle variabili

Obiettivo: determinare valori “bassi” di funzione obiettivo per il maggior numero di coppie (funzione, n)

I problemi

Funzione	n.vars
Ackley	2,5,10,20,50
Michalewics	2,5,10
Perm1	2,5,10,20
Pinter1	2,5,10,20,50
Rastrigin	2,5,10,20,50
Schwefel	2,5,10,20,50

Tot. 27 problemi

Le regole del gioco

- Potete organizzarvi in **squadre** (da uno, due, tre, ...)
- **Non potete** passare informazioni tra squadre
- Potete discutere all'interno di una squadra
- Ogni squadra può fare domande (a me), ma la mia risposta è solo per la squadra che ha fatto la domanda
- Potete usare uno o più solutori di quelli visti fin ora
- Memorizzate, per ogni coppia (funzione, n), il **punto** corrispondente al valore migliore determinato, oltre che il valore di f
- Se riuscite, memorizzate il **numero di calcoli di funzione** effettuati per determinare il valore migliore