Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 16 Marzo 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$
\begin{array}{llll}
\min\limits_{x} & f(x) & f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} & \\
c.v & h(x)=0 & h:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p & p \leq n \\
 & g(x)\leq 0 & g:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m &
\end{array}
\qquad (P_0)
$$

Sia $\mathcal{F}$ l'insieme ammissibile di (P_0)
Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x} & f(x) \\
c.v & h(x)=0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ll}
\min\limits_{x} & f(x) \\
c.v & g(x)\leq 0
\end{array}
$$

Problemi vincolati

Sia $x \in \mathbb{R}^n$, definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$

Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) + y_i^2 = 0, \;\; i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,y} & f(x) \\ c.v & g_i(x) = y_i, \;\; y_i \leq 0, \;\; i = 1, \dots, m \end{array}$$

Condizioni di ottimalità (richiami??)

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)

  Quindi, x^* **ammissibile**, e.g. $g(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$

Allora

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esiste un numero $\lambda_0^* \geq 0$ *e dei moltiplicatori* $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \ldots, \mu_p^*$, *non tutti nulli, tali che:*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \ldots, m.$$

Condizioni di ottimalità (richiami??)

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

e.g. $\left\{\nabla h_j(x^*),\ j = 1, \dots, p,\ \nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*)\right\}$ lin. indip.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ *tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_2 - x_1^3 \leq 0,\ \ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Condizioni di ottimalità (richiami??)

Supponiamo:

- f, g differenziabili e **convesse**
- h **affini**, e.g. $h_j(x) = a^\top x - b = 0$

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $x^* \in \mathcal{F}$ e esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

allora x^* è un minimo locale (globale) di (P_0)

Condizioni di ottimalità (richiami??)

Ci sono condizioni sufficienti di ottimo nel caso **non convesso**?
Supponiamo:

- f, g, h **due volte** continuamente differenziabili
- x^*, λ^*, μ^* soddisfano KKT

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$*, per ogni* $d \in Y^*$, $d \neq 0$

$$\begin{aligned} Y^* \quad = \quad \Big\{ d \in \mathbb{R}^n : \nabla h_j(x^*)^\top d = 0, j = 1, \ldots, p \\ \nabla g_i(x^*)^\top d = 0,\ \ i \in I_0(x^*), \lambda_i^* > 0, \\ \nabla g_i(x^*)^\top d \geq 0,\ \ i \in I_0(x^*), \lambda_i^* = 0 \Big\} \end{aligned}$$

allora x^* *è un minimo locale stretto di* (P_0)