

# Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi<sup>1</sup>

Venerdì 31 Marzo 2017

---

<sup>1</sup>Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

# Introduzione

Consideriamo il problema (con soli vincoli di **disuguaglianza**)

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \geq 0 \end{array}$$

- $\mathcal{F}$  regione ammissibile
- $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \text{Int}(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) > 0\}$
- Assumiamo  $\overset{\circ}{\mathcal{F}} \neq \emptyset$

# Funzione di Barriera

La più diffusa funzione di “barriera” per il problema considerato è:

$$P(x; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log g_i(x), \text{ dove}$$

$$b(x) = - \sum_{i=1}^m \log g_i(x) \text{ (termine di barriera)}$$

$$\nabla_x P(x; \mu) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^m \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla g_i(x)$$

## N.B.

- $b(x)$  (e quindi  $P(x; \mu)$ ) è definita per ogni  $x \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$
- Supponiamo  $b(x)$  (e quindi  $P(x; \mu)$ ) =  $+\infty$  per ogni  $x \notin \overset{\circ}{\mathcal{F}}$

Condizioni di KKT – p.ti staz. di  $P(x; \mu)$ 

P.ti di KKT

Sia  $(x, \lambda)$  tale che

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \lambda^\top \nabla g(x) &= 0 \\ g(x) &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \\ \lambda^\top g(x) &= 0 \end{aligned}$$

P.ti staz. di  $P(x; \mu)$ Sia  $x(\mu)$  tale che

$$\begin{aligned} \nabla f(x(\mu)) - \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mu) \nabla g_i(x(\mu)) &= 0 \\ \lambda_i(\mu) &= \frac{\mu}{g_i(x(\mu))} \end{aligned}$$

- $(x(\mu), \lambda(\mu))$  definiscono il **central-path**
- soddisfano tutte le condizioni di KKT **tranne**  $\lambda^\top g(x) = 0$
- però risulta:

$$\lambda_i(\mu) g_i(x(\mu)) = \mu$$

Condizioni di KKT – p.ti staz. di  $P(x; \mu)$ 

P.ti di KKT

Sia  $(x, \lambda)$  tale che

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \lambda^\top \nabla g(x) &= 0 \\ g(x) &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \\ \lambda^\top g(x) &= 0 \end{aligned}$$

P.ti staz. di  $P(x; \mu)$ Sia  $x(\mu)$  tale che

$$\begin{aligned} \nabla f(x(\mu)) - \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mu) \nabla g_i(x(\mu)) &= 0 \\ \lambda_i(\mu) &= \frac{\mu}{g_i(x(\mu))} \end{aligned}$$

- $(x(\mu), \lambda(\mu))$  definiscono il **central-path**
- soddisfano tutte le condizioni di KKT **tranne**  $\lambda^\top g(x) = 0$
- però risulta:

$$\lambda_i(\mu) g_i(x(\mu)) = \mu$$

## Metodo di soluzione

**Algoritmo** LOG-BARRIER**Dati:**  $\mu_0 > \mu_{tol} > 0$ ,  $\tau_0 > 0$ , maxit,  $x_0$  t.c.  $g(x_0) > 0$ **for**  $k = 0, 1, \dots, \text{maxit}$ Calcola  $x_k = x(\mu_k)$  t.c.  $\|\nabla P(x_k; \mu_k)\| \leq \tau_k$ if  $\mu_k < \mu_{tol}$  then $x^* \leftarrow x_k$ ,  $\lambda^* \leftarrow \mu_k/g(x_k)$ . STOP

endif

**endfor****Return:** miglior coppia trovata  $(x^*, \lambda^*)$

## Metodo di soluzione

**Algoritmo** LOG-BARRIER

**Dati:**  $\mu_0 > \mu_{tol} > 0$ ,  $\tau_0 > 0$ , maxit,  $x_0$  t.c.  $g(x_0) > 0$

**for**  $k = 0, 1, \dots, \text{maxit}$

Calcola  $x_k = x(\mu_k)$  t.c.  $\|\nabla P(x_k; \mu_k)\| \leq \tau_k$

**if**  $\mu_k < \mu_{tol}$  **then**

$x^* \leftarrow x_k$ ,  $\lambda^* \leftarrow \mu_k/g(x_k)$ , STOP

**endif**

Scegli  $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$

**endfor**

**Return:** miglior coppia trovata  $(x^*, \lambda^*)$

## Metodo di soluzione

**Algoritmo LOG-BARRIER**

**Dati:**  $\mu_0 > \mu_{tol} > 0$ ,  $\tau_0 > 0$ , maxit,  $x_0$  t.c.  $g(x_0) > 0$

**for**  $k = 0, 1, \dots, \text{maxit}$

Calcola  $x_k = x(\mu_k)$  t.c.  $\|\nabla P(x_k; \mu_k)\| \leq \tau_k$

**if**  $\mu_k < \mu_{tol}$  **then**

$x^* \leftarrow x_k$ ,  $\lambda^* \leftarrow \mu_k/g(x_k)$ , STOP

**endif**

Scegli  $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$

**endfor**

**Return:** miglior coppia trovata  $(x^*, \lambda^*)$

## Metodo di soluzione

**Algoritmo LOG-BARRIER**

**Dati:**  $\mu_0 > \mu_{tol} > 0$ ,  $\tau_0 > 0$ , maxit,  $x_0$  t.c.  $g(x_0) > 0$

**for**  $k = 0, 1, \dots, \text{maxit}$

Calcola  $x_k = x(\mu_k)$  t.c.  $\|\nabla P(x_k; \mu_k)\| \leq \tau_k$

**if**  $\mu_k < \mu_{tol}$  **then**

$x^* \leftarrow x_k$ ,  $\lambda^* \leftarrow \mu_k/g(x_k)$ , STOP

**endif**

Scegli  $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$

**endfor**

**Return:** miglior coppia trovata  $(x^*, \lambda^*)$

## Teoricamente ...

### Proposizione

$\overset{\circ}{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ ,  $(x^*, \lambda^*)$  soluzione locale del problema vincolato che soddisfa LICQ<sup>a</sup>, stretta complementarità e SOSC<sup>b</sup>. Allora:

- $\nabla_{xx}^2 P(x; \mu)$  è definita positiva per  $\mu$  suff. piccolo
- esiste, unica e cont. differenziabile la funzione  $x(\mu)$  (minimo locale di  $P$  in un intorno di  $x^*$  e per  $\mu$  suff. piccoli)
- $\lim_{\mu \downarrow 0} x(\mu) = x^*$
- $\lim_{\mu \downarrow 0} \lambda(\mu) = \lambda^*$

---

<sup>a</sup>Linear Independence Constraint Qualification

<sup>b</sup>Second Order Sufficient Condition

Cioè LOG-BARRIER, sotto opportune ipotesi, converge alla coppia di KKT  $(x^*, \lambda^*)$

## Teoricamente ...

## Proposizione

$\overset{\circ}{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ ,  $(x^*, \lambda^*)$  soluzione locale del problema vincolato che soddisfa LICQ<sup>a</sup>, stretta complementarità e SOSC<sup>b</sup>. Allora:

- $\nabla_{xx}^2 P(x; \mu)$  è definita positiva per  $\mu$  suff. piccolo
- esiste, unica e cont. differenziabile la funzione  $x(\mu)$  (minimo locale di  $P$  in un intorno di  $x^*$  e per  $\mu$  suff. piccoli)
- $\lim_{\mu \downarrow 0} x(\mu) = x^*$
- $\lim_{\mu \downarrow 0} \lambda(\mu) = \lambda^*$

---

<sup>a</sup>Linear Independence Constraint Qualification

<sup>b</sup>Second Order Sufficient Condition

Cioè LOG-BARRIER, sotto opportune ipotesi, converge alla coppia di KKT  $(x^*, \lambda^*)$

# Vincoli di uguaglianza

Consideriamo il problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g(x) \geq 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned}$$

La funzione di “barriera” è in questo caso:

$$P(x; \mu, \epsilon) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log g_i(x) + \frac{1}{\epsilon} \|h(x)\|^2$$

oppure

$$\begin{aligned} P(x; \mu) &= f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log g_i(x) + \frac{1}{2\mu} \|h(x)\|^2 \\ \nabla_x P(x; \mu) &= \nabla f(x) - \sum_{i=1}^m \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla g_i(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^p h_i(x) \nabla h_i(x) \end{aligned}$$

# Vincoli di uguaglianza

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \geq 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

La funzione di “barriera” è in questo caso:

$$P(x; \mu, \epsilon) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log g_i(x) + \frac{1}{\epsilon} \|h(x)\|^2$$

oppure

$$P(x; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log g_i(x) + \frac{1}{2\mu} \|h(x)\|^2$$

$$\nabla_x P(x; \mu) = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^m \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla g_i(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^p h_i(x) \nabla h_i(x)$$

# Punto iniziale

Siccome,

$$P(x; \mu) < +\infty \text{ se e solo se } g(x) > 0,$$

allora ...

per poter utilizzare la funzione  $P(x; \mu)$  in un algoritmo di soluzione per il problema vincolato è **necessario** conoscere un punto  $x_0$  tale che  $g(x_0) > 0$  (cfr. LOG-BARRIER).

# Punto iniziale

Siccome,

$$P(x; \mu) < +\infty \text{ se e solo se } g(x) > 0,$$

allora ...

per poter utilizzare la funzione  $P(x; \mu)$  in un algoritmo di soluzione per il problema vincolato è **necessario** conoscere un punto  $x_0$  tale che  $g(x_0) > 0$  (cfr. LOG-BARRIER).

## Variabili slack

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \geq 0
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{ll}
 \min_{x,s} & f(x) \\
 \text{c.v.} & g_i(x) - s_i = 0 \\
 & s_i \geq 0
 \end{array}$$

$$P(x, s; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^m (g_i(x) - s_i)^2$$

Metodi Interni - Manfredo Sinigaglia

Il problema è sempre definito anche quando  $g(x) < 0$

## Variabili slack

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} \min_{x,s} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) - s_i = 0 \\ & \boxed{s_i \geq 0} \end{array}$$

$$P(x, s; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^m (g_i(x) - s_i)^2$$

Metodi interni – inammissibili

**N.B.**  $P(x; \mu)$  è definita anche quando  $g(x) \not\geq 0$

## Variabili slack

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \geq 0
 \end{array}
 \rightsquigarrow
 \begin{array}{ll}
 \min_{x,s} & f(x) \\
 \text{c.v.} & g_i(x) - s_i = 0 \\
 & \boxed{s_i \geq 0}
 \end{array}$$

$$P(x, s; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^m (g_i(x) - s_i)^2$$

Metodi interni – inammissibili

**N.B.**  $P(x; \mu)$  è definita anche quando  $g(x) \not\geq 0$

## Variabili slack

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} \min_{x,s} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) - s_i = 0 \\ & \boxed{s_i \geq 0} \end{array}$$

$$P(x, s; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^m (g_i(x) - s_i)^2$$

Metodi interni – inammissibili

**N.B.**  $P(x; \mu)$  è definita anche quando  $g(x) \not\geq 0$

## Relazione con KKT

$$\begin{aligned} \min_{x,s} \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g_i(x) - s_i = 0 \\ & s_i \geq 0 \end{aligned}$$

Funzione Lagrangiana:  $L(x, \rho, \lambda) = f(x) + \rho^\top (g - s) - \lambda^\top s$

Cond. di KKT:

$$\begin{aligned} \nabla_x L &= \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \rho_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \nabla_s L &= -\rho - \lambda = 0 \Rightarrow \rho = -\lambda \\ g - s &= 0 \\ \lambda &\geq 0, s \geq 0, \lambda^\top s = 0 \end{aligned}$$

## Relazione con KKT

$$\begin{aligned} \min_{x,s} \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g_i(x) - s_i = 0 \\ & s_i \geq 0 \end{aligned}$$

Funzione Lagrangiana:  $L(x, \rho, \lambda) = f(x) + \rho^\top (g - s) - \lambda^\top s$

Cond. di KKT:

$$\begin{aligned} \nabla_x L &= \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \rho_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \nabla_s L &= -\rho - \lambda = 0 \Rightarrow \rho = -\lambda \\ g - s &= 0 \\ \lambda &\geq 0, s \geq 0, \lambda^\top s = 0 \end{aligned}$$

## Relazione con KKT

$$\begin{aligned} \min_{x,s} \quad & f(x) \\ \text{c.v.} \quad & g_i(x) - s_i = 0 \\ & s_i \geq 0 \end{aligned}$$

Funzione Lagrangiana:  $L(x, \rho, \lambda) = f(x) + \rho^\top (g - s) - \lambda^\top s$

Cond. di KKT:

$$\begin{aligned} \nabla_x L &= \nabla f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \nabla_s L &= -\rho - \lambda = 0 \rightarrow \rho = -\lambda \\ g - s &= 0 \\ \lambda &\geq 0, s \geq 0, \lambda^\top s = 0 \end{aligned}$$

## Relazione con KKT

$$\min_{x,s} P(x, s; \mu)$$

$$P(x, s; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^m (g_i(x) - s_i)^2$$

$$\nabla_x P = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} \nabla g_i(x) = 0$$

$$\nabla_{s_i} P = -\frac{\mu}{s_i} - \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} = 0 \Rightarrow \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} = -\frac{\mu}{s_i} = -\lambda_i$$

$$\lambda_i s_i = \mu, \quad g_i(x) - s_i = -\frac{\mu^2}{s_i} = -\lambda_i \mu$$

## Relazione con KKT

$$\min_{x,s} P(x, s; \mu)$$

$$P(x, s; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^m (g_i(x) - s_i)^2$$

$$\nabla_x P = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} \nabla g_i(x) = 0$$

$$\nabla_{s_i} P = -\frac{\mu}{s_i} - \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} = 0 \Rightarrow \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} = -\frac{\mu}{s_i} = -\lambda_i$$

$$\lambda_i s_i = \mu, \quad g_i(x) - s_i = -\frac{\mu^2}{s_i} = -\lambda_i \mu$$

## Relazione con KKT

$$\min_{x,s} P(x, s; \mu)$$

$$P(x, s; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^m \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^m (g_i(x) - s_i)^2$$

$$\nabla_x P = \nabla f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$$

$$\nabla_{s_i} P = -\frac{\mu}{s_i} - \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} = 0 \rightarrow \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} = -\frac{\mu}{s_i} = -\lambda_i$$

$$\lambda_i s_i = \mu, \quad g_i(x) - s_i = -\frac{\mu^2}{s_i} = -\lambda_i \mu$$