Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Venerdì 31 Marzo 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Introduzione

Consideriamo il problema (con soli vincoli di **disuguaglianza**)

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v. & g(x) \geq 0 \end{array}$$

- $\mathcal{F}$ regione ammissibile
- $\mathring{\mathcal{F}} = Int(\mathcal{F}) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) > 0\}$
- Assumiamo $\mathring{\mathcal{F}} \neq \emptyset$

Funzione di Barriera

La più diffusa funzione di "barriera" per il problema considerato è:

$$\begin{aligned} P(x;\mu) &= f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \log g_i(x), \text{ dove} \\ b(x) &= -\sum_{i=1}^{m} \log g_i(x) \text{ (termine di barriera)} \\ \nabla_x P(x;\mu) &= \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla g_i(x) \end{aligned}$$

N.B.

- $b(x)$ (e quindi $P(x;\mu)$) è definita per ogni $x \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$
- Supponiamo $b(x)$ (e quindi $P(x;\mu)$) $= +\infty$ per ogni $x \notin \overset{\circ}{\mathcal{F}}$

Condizioni di KKT – p.ti staz. di $P(x;\mu)$

P.ti di KKT

Sia (x,λ) tale che

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \lambda^\top \nabla g(x) &= 0 \\ g(x) &\geq 0 \\ \lambda &\geq 0 \\ \lambda^\top g(x) &= 0 \end{aligned}$$

P.ti staz. di $P(x;\mu)$

Sia $x(\mu)$ tale che

$$\nabla f(x(\mu)) - \sum_{i=1}^m \lambda_i(\mu) \nabla g_i(x(\mu)) = 0$$

$$\lambda_i(\mu) = \frac{\mu}{g_i(x(\mu))}$$

- $(x(\mu),\lambda(\mu))$ definiscono il **central-path**
- soddisfano tutte le condizioni di KKT **tranne** $\lambda^\top g(x) = 0$
- però risulta:

$$\lambda_i(\mu) g_i(x(\mu)) = \mu$$

Metodo di soluzione

Algoritmo `LOG-BARRIER`

Dati: $\mu_\circ > \mu_{tol} > 0$, $\tau_0 > 0$, $\texttt{maxit}$, x_0 t.c. $g(x_0) > 0$

for $k = 0, 1, \dots, \texttt{maxit}$

Calcola $x_k = x(\mu_k)$ t.c. $\|\nabla P(x_k; \mu_k)\| \leq \tau_k$

if $\mu_k < \mu_{tol}$ **then**

$x^* \leftarrow x_k$, $\lambda^* \leftarrow \mu_k / g(x_k)$, STOP

endif

Scegli $\mu_{k+1} \in (0, \mu_k)$

endfor

Return: miglior coppia trovata (x^*, λ^*)

Teoricamente ...

Proposizione

$\overset{\circ}{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, (x^*, λ^*) *soluzione locale del problema vincolato che soddisfa LICQ*[a]*, stretta complementarità e SOSC*[b]*. Allora:*

- $\nabla^2_{xx} P(x;\mu)$ *è definita positiva per* μ *suff. piccolo*
- *esiste, unica e cont. differenziabile la funzione* $x(\mu)$ *(minimo locale di* P *in un intorno di* x^* *e per* μ *suff. piccoli)*
- $\lim_{\mu \downarrow 0} x(\mu) = x^*$
- $\lim_{\mu \downarrow 0} \lambda(\mu) = \lambda^*$

---

[a] Linear Independence Constraint Qualification
[b] Second Order Sufficient Condition

Cioè `LOG-BARRIER`, sotto opportune ipotesi, converge alla coppia di KKT (x^*, λ^*)

Vincoli di uguaglianza

Consideriamo il problema

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v. & g(x) \geq 0 \\ & h(x) = 0 \end{array}$$

La funzione di "barriera" è in questo caso:

$$P(x;\mu,\epsilon) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \log g_i(x) + \frac{1}{\epsilon}\|h(x)\|^2$$

oppure

$$\begin{aligned} P(x;\mu) &= f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \log g_i(x) + \frac{1}{2\mu}\|h(x)\|^2 \\ \nabla_x P(x;\mu) &= \nabla f(x) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu}{g_i(x)} \nabla g_i(x) + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^{p} h_i(x) \nabla h_i(x) \end{aligned}$$

Punto iniziale

Siccome,

$$P(x;\mu) < +\infty \text{ se e solo se } g(x) > 0,$$

allora ...

per poter utilizzare la funzione $P(x;\mu)$ in un algoritmo di soluzione per il problema vincolato è **necessario** conoscere un punto x_0 tale che $g(x_0) > 0$ (cfr. `LOG-BARRIER`).

Variabili slack

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v. & g(x) \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ll} \min\limits_{x,s} & f(x) \\ c.v. & g_i(x) - s_i = 0 \\ & \boxed{s_i \geq 0} \end{array}$$

$$P(x, s; \mu) = f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^{m} (g_i(x) - s_i)^2$$

$\boxed{\text{Metodi interni – inammissibili}}$

N.B. $P(x; \mu)$ è definita anche quando $g(x) \not\geq 0$

Relazione con KKT

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x,s} & f(x) \\ c.v. & g_i(x) - s_i = 0 \\ & s_i \geq 0 \end{array}$$

Funzione Lagrangiana: $L(x, \rho, \lambda) = f(x) + \rho^\top (g - s) - \lambda^\top s$

Cond. di KKT:

$$\begin{array}{rcl} \nabla_x L & = & \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \rho_i - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ \nabla_s L & = & -\rho - \lambda = 0 \Rightarrow \rho = -\lambda \\ g - s & = & 0 \\ \lambda & \geq & 0, \;\; s \geq 0, \;\; \lambda^\top s = 0 \end{array}$$

Relazione con KKT

$$\min_{x,s} \quad P(x,s;\mu)$$

$$\begin{aligned}
P(x,s;\mu) &= f(x) - \mu \sum_{i=1}^{m} \log s_i + \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^{m} (g_i(x) - s_i)^2 \\
\nabla_x P &= \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\
\nabla_{s_i} P &= -\frac{\mu}{s_i} - \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} = 0 \Rightarrow \frac{g_i(x) - s_i}{\mu} = -\frac{\mu}{s_i} = -\lambda_i \\
\lambda_i s_i &= \mu, \quad g_i(x) - s_i = -\frac{\mu^2}{s_i} = -\lambda_i \mu
\end{aligned}$$