Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Venerdì 28 Aprile 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Introduzione

$$\begin{array}{c} \min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

$x \in \Re^n,\ k > 1,\ f_i : \Re^n \to \Re,\ \mathcal{F} \subseteq \Re^n.$

- $\Re^n$ è lo "**spazio delle decisioni**"
- $\Re^k$ è lo "**spazio degli obiettivi**"

- $x \in \Re^n$ è un "**vettore di decisioni**"
- $z \in \Re^k$ è un "**vettore di obiettivi**"

Introduzione

$$\min f_1(x), \dots, f_k(x)$$
$$s.t.\ x \in \mathcal{F}.$$

$x \in \Re^n$, $k > 1$, $f_i : \Re^n \to \Re$, $\mathcal{F} \subseteq \Re^n$.

- $\Re^n$ è lo "**spazio delle decisioni**"
- $\Re^k$ è lo "**spazio degli obiettivi**"
- $x \in \Re^n$ è un "**vettore di decisioni**"
- $z \in \Re^k$ è un "**vettore di obiettivi**"

Introduzione

$$\min f_1(x), \ldots, f_k(x)$$
$$s.t.\ x \in \mathcal{F}.$$

$x \in \Re^n$, $k > 1$, $f_i : \Re^n \to \Re$, $\mathcal{F} \subseteq \Re^n$.

- $\Re^n$ è lo "**spazio delle decisioni**"
- $\Re^k$ è lo "**spazio degli obiettivi**"

- $x \in \Re^n$ è un "**vettore di decisioni**"
- $z \in \Re^k$ è un "**vettore di obiettivi**"

Introduzione

Definiamo

- $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)) : \Re^n \to \Re^k$ **vettore delle f.obiettivo**
- $\mathcal{Z} = f(\mathcal{F})$ **regione ammissibile degli obiettivi**:

$$\mathcal{Z} = \{z \in \Re^k : z = f(x), x \in \mathcal{F}\}.$$

- z^{id} **vettore ideale** degli obiettivi:

$$z_i^{id} = \min_{x \in \mathcal{F}} f_i(x)$$

  per ogni $i = 1, \ldots, k$.

N.B. assumiamo che $z^{id} \notin \mathcal{Z}$, cioè che le funzioni obiettivo siano in contrasto fra di loro.

Ordinamento nello spazio k dimensionale

Possiamo definire nello spazio k dimensionale un ordinamento parziale non riflessivo.

Dovuto all'economista e sociologo italiano Vilfredo Pareto (1848-1923)

Ordinamento nello spazio k dimensionale

Dati due vettori z^1 e z^2 in $\Re^k$ diciamo che:

z^1 *domina* (secondo Pareto) z^2 ($z^1 \leq_P z^2$) se

$z_i^1 \leq z_i^2$ per **ogni** $i = 1, \dots, k$, e

$z_j^1 < z_j^2$ per **qualche** $j \in \{1, \dots, k\}$.

N.B. l'ordinamento è **solo parziale**, quindi esistono coppie di vettori z^1, z^2 tali che **non risulta**

$$\text{ne} \quad z^1 \leq_P z^2 \quad \text{ne} \quad z^2 \leq_P z^1 \quad !!$$

In questo caso si dice che z^1 e z^2 sono vettori **non dominati** tra loro

Ordinamento nello spazio k dimensionale

Dati due vettori z^1 e z^2 in $\Re^k$ diciamo che:

z^1 *domina* (secondo Pareto) z^2 ($z^1 \leq_P z^2$) se

$z_i^1 \leq z_i^2$ per **ogni** $i = 1, \dots, k$, e

$z_j^1 < z_j^2$ per **qualche** $j \in \{1, \dots, k\}$.

N.B. l'ordinamento è **solo parziale**, quindi esistono coppie di vettori z^1, z^2 tali che **non risulta**

$$\text{ne} \quad z^1 \leq_P z^2 \quad \text{ne} \quad z^2 \leq_P z^1 \quad !!$$

In questo caso si dice che z^1 e z^2 sono vettori **non dominati** tra loro

Ordinamento debole

Dati due vettori z^1 e z^2 in $\Re^k$ diciamo che:

z^1 *domina debolmente* (secondo Pareto) z^2 ($z^1 < z^2$) se

$$z_i^1 < z_i^2 \text{ per } \textbf{ogni } i = 1, \ldots, k.$$

N.B. se $z^1 < z^2$ allora $z^1 \leq_P z^2$ ma, in generale, **non vale** il viceversa.

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\min f_1(x), \dots, f_k(x)$$
$$s.t.\ x \in \mathcal{F}.$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo** (secondo Pareto) se:

non esiste alcun altro $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) \leq_P f(x^*)$$

Nello spazio degli obiettivi, l'insieme degli ottimi secondo Pareto Ω_P è noto con il nome di:

- "**frontiera efficiente**"
- "**frontiera di Pareto**"

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo** (secondo Pareto) se:

non esiste alcun altro $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) \leq_P f(x^*)$$

Nello spazio degli obiettivi, l'insieme degli ottimi secondo Pareto Ω_P è noto con il nome di:

- "**frontiera efficiente**"
- "**frontiera di Pareto**"

Definizione di ottimalità debole

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo debole** (secondo Pareto) se:

non esiste alcun altro $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) < f(x^*)$$

N.B. l'insieme degli ottimi di Pareto (Ω_P) è contenuto nell'insieme degli ottimi deboli di Pareto (Ω_D)

$$\Omega_P \subseteq \Omega_D.$$