Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Venerdì 28 Aprile 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Introduzione

$$\min f_1(x), \dots, f_k(x)$$
$$s.t.\ x \in \mathcal{F}.$$

$x \in \Re^n$, $k > 1$, $f_i : \Re^n \to \Re$, $\mathcal{F} \subseteq \Re^n$.

- $\Re^n$ è lo "**spazio delle decisioni**"
- $\Re^k$ è lo "**spazio degli obiettivi**"

- $x \in \Re^n$ è un "**vettore di decisioni**"
- $z \in \Re^k$ è un "**vettore di obiettivi**"

Definiamo

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)) : \Re^n \to \Re^k$ **vettore delle f.obiettivo**
- $\mathcal{Z} = f(\mathcal{F})$ **regione ammissibile degli obiettivi**:

$$\mathcal{Z} = \{z \in \Re^k : z = f(x), x \in \mathcal{F}\}.$$

- z^{id} **vettore ideale** degli obiettivi:

$$z_i^{id} = \min f_i(x)$$

Ordinamento nello spazio k dimensionale

Possiamo definire nello spazio k dimensionale un ordinamento parziale non riflessivo.

Dovuto all'economista e sociologo italiano Vilfredo Pareto (1848-1923)

Dati due vettori z^1 e z^2 in $\Re^k$ diciamo che:

Ordinamento debole

Dati due vettori z^1 e z^2 in $\Re^k$ diciamo che:

z^1 *domina debolmente* (secondo Pareto) z^2 ($z^1 < z^2$) se

$$z_i^1 < z_i^2 \text{ per } \textbf{ogni } i = 1, \dots, k.$$

N.B. se $z^1 < z^2$ allora $z^1 \leq_P z^2$ ma, in generale, **non vale** il viceversa.

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo** (secondo Pareto) se:

non esiste alcun altro $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) \leq_P f(x^*)$$

Nello spazio degli obiettivi, l'insieme degli ottimi secondo Pareto Ω_P è noto con il nome di:

- "**frontiera efficiente**"
- "**frontiera di Pareto**"

Definizione di ottimalità debole

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo debole** (secondo Pareto) se:

non esiste alcun altro $x \in \mathcal{F}$ tale che

$$f(x) < f(x^*)$$

N.B. l'insieme degli ottimi di Pareto (Ω_P) è contenuto nell'insieme degli ottimi deboli di Pareto (Ω_D)

$$\Omega_P \subseteq \Omega_D.$$