Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 11 Aprile 2017

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo globale** (secondo Pareto) se:

$$\nexists\, x \in \mathcal{F}\ t.c.\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo locale** (secondo Pareto) se:

esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)\ t.c.\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \ldots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo globale** (secondo Pareto) se:

$$\nexists\, x \in \mathcal{F}\ t.c.\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo locale** (secondo Pareto) se:

esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)\ t.c.\ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Definizione di ottimalità debole

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo globale debole** (secondo Pareto) se:

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \; t.c. \; f(x) < f(x^*)$$

Un punto $x^* \in \mathcal{F}$ è **ottimo locale debole** (secondo Pareto) se:

esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \; t.c. \; f(x) < f(x^*)$$

Caso convesso ed equivalenza

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min f_1(x), \dots, f_k(x) \\ s.t.\ x \in \mathcal{F}. \end{array}$$

siano f_i convesse su $\mathcal{F}$ convesso. Sotto queste ipotesi il problema è **convesso**

Proposizione

Per un problema multiobiettivo convesso ogni ottimo locale di Pareto è anche ottimo globale

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : \ f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1-\beta)x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : \; f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta) x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Dim. Sia x^* un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste $\epsilon > 0$ t.c.

$$\nexists\, x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : \; f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che x^* non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un $x^\circ \in \mathcal{F}$:

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta) x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni $\beta \in [0, 1]$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar\beta$ tale che $x_{\bar\beta} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar\beta f(x^\circ) + (1-\bar\beta) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar\beta f(x^\circ) + (1-\bar\beta) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle f_i segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1-\beta) f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore $\bar{\beta}$ tale che $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$.

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi $f(\hat{x}) = f(x^*)$ e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta} f(x^\circ) + (1-\bar{\beta}) f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$ il che è in contrasto con $f(x^*) \leq f(x^\circ)$.

Introduzione

Cominciamo con il considerare il problema multiobiettivo

$$\min_x \ f(x)$$
$$s.t.\ x \in \mathcal{F}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^\top$
- $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \ell \le x \le u\}$
- $-\infty < \ell_i < u_i < +\infty,\ i = 1, \dots, n$

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{aligned} C(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, f(x + \beta d) \le_P f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \end{aligned}$$

Condizione necessaria di ottimo (1)

Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale) di Pareto, allora $C(x) \cap F(x) = \emptyset$,

cioè, se x è ottimo, non possono esistere direzioni d contemporaneamente ammissibili e di discesa

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall \ y \in \mathcal{F}, \ \exists \ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c.} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall\ y \in \mathcal{F},\ \exists\ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall\, y \in \mathcal{F},\ \exists\, j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall \ y \in \mathcal{F}, \ \exists \ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall\ y \in \mathcal{F},\ \exists\ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (3)

Dato $x \in \mathcal{F}$, definiamo

$$\begin{aligned}\theta(x) &= \min_{y\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y-x) \;\le 0 \\ y(x) &= \arg\min_{y\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y-x)\end{aligned}$$

- Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $\theta(x) = 0$
- Viceversa, se $\theta(x) < 0$ allora x non può essere ottimo (locale) in quanto la direzione $y(x) - x$ è contemporaneamente ammissibile e di discesa

Condizione necessaria di ottimo (3)

Dato $x \in \mathcal{F}$, definiamo

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y-x) \ \leq 0 \\ y(x) &= \arg\min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y-x) \end{aligned}$$

- Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $\theta(x) = 0$
- Viceversa, se $\theta(x) < 0$ allora x non può essere ottimo (locale) in quanto la direzione $y(x) - x$ è contemporaneamente ammissibile e di discesa

Condizione necessaria di ottimo (3)

Dato $x \in \mathcal{F}$, definiamo

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \min_{y\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y-x) \ \le 0 \\ y(x) &= \arg\min_{y\in\mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y-x) \end{aligned}$$

- Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $\theta(x) = 0$
- Viceversa, se $\theta(x) < 0$ allora x non può essere ottimo (locale) in quanto la direzione $y(x) - x$ è contemporaneamente ammissibile e di discesa

Introduzione

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} &\min_x \; f(x) \\ &s.t. \; x \in \mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; g(x) \le 0\} \end{aligned}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^\top$
- $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^\top$

Introduciamo la funzione Lagrangiana del problema

$$L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x)$$

percui:

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x)$$

C.N. di Fritz-John (1)

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{aligned} C(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, f(x + \beta d) \leq_P f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale) di Pareto, allora $C(x) \cap F(x) = \emptyset$

Ora definiamo

$$\begin{aligned} C_0(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla g_i(x)^\top d < 0, \ i \in I_0(x)\} \subseteq C(x) \\ F_0(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, \ i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x) \end{aligned}$$

Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora (a maggior ragione) risulta $C_0(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

C.N. di Fritz-John (1)

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\
F(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \neq 0, f(x + \beta d) \leq_P f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\}
\end{aligned}
$$

Anche in questo caso, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale) di Pareto, allora $C(x) \cap F(x) = \emptyset$
Ora definiamo

$$
\begin{aligned}
C_0(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla g_i(x)^\top d < 0, \ i \in I_0(x)\} \subseteq C(x) \\
F_0(x) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, \ i = 1, \ldots, k\} \subseteq F(x)
\end{aligned}
$$

Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora (a maggior ragione) risulta $C_0(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

C.N. di Fritz-John (2)

Teorema

Condizione necessaria affinché un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ tali che:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$
$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$
$$(\lambda, \mu) \geq 0, \; (\lambda, \mu) \neq 0$$

N.B. nell'enunciato delle teorema nulla vieta che possano essere identicamente nulli i moltiplicatori λ_i associati alle funzioni obiettivo.

Se assumiamo che $\bar{x}$ oltre ad essere un ottimo secondo Pareto è anche un **punto regolare** per i vincoli, allora è possibile asserire che almeno uno dei moltiplicatori λ_i è strettamente positivo

C.N. di Karush-Kuhn-Tucker

Teorema

Sia $\bar{x} \in \mathcal{F}$ *un punto in cui sono* lin. indipendenti i gradienti dei vincoli attivi. *Condizione necessaria affinché* $\bar{x}$ *sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori* $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^m$ *tali che:*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$
$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$
$$(\lambda, \mu) \geq 0, \ \lambda \neq 0$$

Ottimizzazione multiobiettivo del protafoglio

Il problema di portfolio selection formulato da Markowitz (modello mean-variance) è un caso particolare di problema di ottimizzazione a due obiettivi

$$
\begin{aligned}
&\max\ (x^T R, -x^T Q x) \\
&s.t. \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \\
&\qquad 0 \leq x_i \leq 1,\ \ i = 1, \dots, n.
\end{aligned}
$$

Esempio numerico: EUROSTOXX50

- Consideriamo come possibili investimenti i **48 titoli** compresi nell'indice **EUROSTOXX**
  Total, Siemens, Basf, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, Bayer, Allianz, Daimler, Unilever, FRANCE TELECOM, Danone, Nokia, Unicredit, Enel, Axa, L'Oreal, ...
- Determinare il **vettore ideale** degli obiettivi
- Come si possono determinare delle soluzioni di Pareto ?

Esempio numerico: EUROSTOXX50

- Consideriamo come possibili investimenti i **48 titoli** compresi nell'indice **EUROSTOXX**
  Total, Siemens, Basf, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, Bayer, Allianz, Daimler, Unilever, FRANCE TELECOM, Danone, Nokia, Unicredit, Enel, Axa, L'Oreal, ...
- Determinare il **vettore ideale** degli obiettivi
- Come si possono determinare delle soluzioni di Pareto ?