

# Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi<sup>1</sup>

Giovedì 11 Aprile 2017

---

<sup>1</sup>Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

# Definizione di ottimalità secondo Pareto

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min & f_1(x), \dots, f_k(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è **ottimo globale** (secondo Pareto) se:

$$\nexists x \in \mathcal{F} \text{ t.c. } f(x) \leq_P f(x^*)$$

Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è **ottimo locale** (secondo Pareto) se:

esiste un  $\epsilon > 0$  tale che

$$\nexists x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \text{ t.c. } f(x) \leq_P f(x^*)$$

# Definizione di ottimalità debole

Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è **ottimo globale debole** (secondo Pareto) se:

$$\nexists x \in \mathcal{F} \text{ t.c. } f(x) < f(x^*)$$

Un punto  $x^* \in \mathcal{F}$  è **ottimo locale debole** (secondo Pareto) se:  
esiste un  $\epsilon > 0$  tale che

$$\nexists x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) \text{ t.c. } f(x) < f(x^*)$$

# Caso convesso ed equivalenza

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min & f_1(x), \dots, f_k(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

siano  $f_i$  convesse su  $\mathcal{F}$  convesso. Sotto queste ipotesi il problema è **convesso**

## Proposizione

*Per un problema multiobiettivo convesso ogni ottimo locale di Pareto è anche ottimo globale*

## Caso convesso ed equivalenza

**Dim.** Sia  $x^*$  un ottimo locale di Pareto. Quindi esiste  $\epsilon > 0$  t.c.

$$\nexists x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon) : f(x) \leq_P f(x^*)$$

Supponiamo ora (per assurdo) che  $x^*$  non sia ottimo globale di Pareto. Allora, deve esistere un  $x^\circ \in \mathcal{F}$ :

$$f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$$

Dalla convessità di  $\mathcal{F}$  segue che il punto

$$x_\beta = \beta x^\circ + (1 - \beta)x^* \in \mathcal{F}$$

per ogni  $\beta \in [0, 1]$ .

## Caso convesso ed equivalenza

Inoltre, dalla convessità delle  $f_i$  segue che

$$f(x_\beta) \leq \beta f(x^\circ) + (1 - \beta)f(x^*)$$

È inoltre possibile determinare un valore  $\bar{\beta}$  tale che  $x_{\bar{\beta}} = \hat{x} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$ .

$$f(\hat{x}) \leq \bar{\beta}f(x^\circ) + (1 - \bar{\beta})f(x^*) \leq f(x^*)$$

Quindi  $f(\hat{x}) = f(x^*)$  e possiamo scrivere

$$f(x^*) \leq \bar{\beta}f(x^\circ) + (1 - \bar{\beta})f(x^*), \text{ ovvero } f(x^*) \leq f(x^\circ).$$

Ma  $f(x^\circ) \leq_P f(x^*)$  il che è in contrasto con  $f(x^*) \leq f(x^\circ)$ .

# Introduzione

Cominciamo con il considerare il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min_x & f(x) \\ \text{s.t.} & x \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$
- $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ell \leq x \leq u\}$
- $-\infty < \ell_i < u_i < +\infty, i = 1, \dots, n$

Dato  $x \in \mathcal{F}$  definiamo

$$C(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\}$$

$$F(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \neq 0, f(x + \beta d) \leq_P f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\}$$

# Condizione necessaria di ottimo (1)

Se  $x \in \mathcal{F}$  è ottimo (locale) di Pareto, allora  $C(x) \cap F(x) = \emptyset$ ,  
cioè, se  $x$  è ottimo, non possono esistere direzioni  $d$   
contemporaneamente ammissibili e di discesa



## Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di  $\mathcal{F}$  segue che

$$C(x) = \{d : d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se  $x \in \mathcal{F}$  è ottimo (locale), allora  $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$   
ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c.} \quad \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c.} \quad \max_{i=1, \dots, k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall y \in \mathcal{F}, \exists j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

## Condizione necessaria di ottimo (3)

Dato  $x \in \mathcal{F}$ , definiamo

$$\theta(x) = \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1, \dots, k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) \leq 0$$

$$y(x) = \arg \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1, \dots, k} \nabla f_i(x)^\top (y - x)$$

- Se  $x \in \mathcal{F}$  è ottimo (locale), allora  $\theta(x) = 0$
- Viceversa, se  $\theta(x) < 0$  allora  $x$  non può essere ottimo (locale) in quanto la direzione  $y(x) - x$  è contemporaneamente ammissibile e di discesa

# Introduzione

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{aligned} \min_x & f(x) \\ \text{s.t. } & x \in \mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^T$
- $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^T$

Introduciamo la funzione Lagrangiana del problema

$$L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j g_j(x)$$

perciui:

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^m \mu_j \nabla g_j(x)$$

# C.N. di Fritz-John (1)

Dato  $x \in \mathcal{F}$  definiamo

$$C(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\}$$

$$F(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \neq 0, f(x + \beta d) \leq_P f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\}$$

Anche in questo caso, se  $x \in \mathcal{F}$  è ottimo (locale) di Pareto, allora

$$C(x) \cap F(x) = \emptyset$$

Ora definiamo

$$C_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x)^\top d < 0, i \in I_0(x)\} \subseteq C(x)$$

$$F_0(x) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

Se  $x \in \mathcal{F}$  è ottimo (locale), allora (a maggior ragione) risulta

$$C_0(x) \cap F_0(x) = \emptyset$$

## C.N. di Fritz-John (2)

## Teorema

*Condizione necessaria affinché un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  tali che:*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$

$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \geq 0, (\lambda, \mu) \neq 0$$

**N.B.** nell'enunciato delle teorema nulla vieta che possano essere identicamente nulli i moltiplicatori  $\lambda_i$  associati alle funzioni obiettivo.

Se assumiamo che  $\bar{x}$  oltre ad essere un ottimo secondo Pareto è anche un **punto regolare** per i vincoli, allora è possibile asserire che almeno uno dei moltiplicatori  $\lambda_i$  è strettamente positivo

## C.N. di Karush-Kuhn-Tucker

## Teorema

*Sia  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  un punto in cui sono lin. indipendenti i gradienti dei vincoli attivi. Condizione necessaria affinché  $\bar{x}$  sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^m$  tali che:*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$

$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$

$$(\lambda, \mu) \geq 0, \lambda \neq 0$$

# Ottimizzazione multiobiettivo del portafoglio

Il problema di portfolio selection formulato da Markowitz (modello mean-variance) è un caso particolare di problema di ottimizzazione a due obiettivi

$$\max (x^T R, -x^T Qx)$$

$$s.t. \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

## Esempio numerico: EUROSTOXX50

- Consideriamo come possibili investimenti i **48 titoli** compresi nell'indice **EUROSTOXX**  
Total, Siemens, Basf, Sanofi-Aventis, BNP Paribas, Bayer, Allianz, Daimler, Unilever, FRANCE TELECOM, Danone, Nokia, Unicredit, Enel, Axa, L'Oreal, ...
- Determinare il **vettore ideale** degli obiettivi
- Come si possono determinare delle soluzioni di Pareto ?