# Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

A.A. 2017-18 – 2 Aprile 2019

prova d'esame

1. (**8 punti**) Dato il problema di controllo ottimo lineare-quadratico:

$$
\begin{aligned}
&\min \ \frac{1}{2}\int_0^T \left[2x_1(t)^2 + t^2 x_2(t)^2 + e^{-t}(u_1(t)^2 + u_2(t)^2) + u_3(t)^2\right] dt \\
&\dot{x}_1(t) = \frac{2}{t+1} x_2(t) + u_1(t) \\
&\dot{x}_2(t) = x_3(t) + \sin(t)\ u_2(t) \\
&\dot{x}_3(t) = -x_1(t) - t x_2(t) + (t+1)x_3(t) + u_3(t) \\
&x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 1.
\end{aligned}
$$

   (a) (**1 punto**) Scrivere le matrici $A, B, Q, R$ del problema.

   (b) (**2 punti**) Scrivere le condizioni di ottimalità in forma matriciale.

   (c) (**2 punti**) Scrivere l'equazione differenziale di Riccati.

   (d) (**1 punto**) Dire a quante equazioni differenziali indipendenti dà luogo l'equazione di Riccati.

   (e) (**2 punti**) Dire se per $T \to \infty$ l'equazione di Riccati ha una soluzione costante.

2. (**8 punti**) Dato il problema di PNL

$$
\begin{aligned}
&\min \ x_1 - x_2 \\
&s.t. \ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 4 \\
&\qquad (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 4
\end{aligned}
$$

   (a) (**3 punti**) Rappresentare sul piano cartesiano la regione ammissibile del problema.

   (b) (**2 punti**) Motivare l'esistenza di una soluzione globale e determinarla per via grafica.

   (c) (**3 punti**) Determinare tutti i punti di KKT del problema.

3. (**8 punti**) Dato il problema con più obiettivi

$$
\begin{aligned}
&\min \ x; -y \\
&s.t. \ (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 4 \\
&\qquad (x-2)^2 + (y+1)^2 \geq 4 \\
&\qquad x \leq 2
\end{aligned}
$$

   (a) (**4 punti**) aiutandosi con una rappresentazione grafica, determinare il vettore ideale $z^{id}$ degli obiettivi e le soluzioni ammissibili $x_1^{id}$ e $x_2^{id}$ che lo determinano;

   (b) (**4 punti**) determinare almeno una soluzione di Pareto distinta dalle soluzioni $x_1^{id}$ e $x_2^{id}$ utilizzando il metodo degli $\epsilon$-vincoli e risolvendo graficamente il problema scalarizzato.

4. (**8 punti**) Sia dato il problema non vincolato $\min_{x,y} f(x,y) = x^2 - x + 2y^2 - 2y$ e l'insieme di direzioni

$$
D_{\oplus} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.
$$

   Sia, inoltre, $\bar{x} = (0,\ 0)^\top$.

   (a) (**4 punti**) Calcolare il gradiente di $f$ in $\bar{x}$ e determinare una direzione $\bar{d} \in D_{\oplus}$ tale che:

$$
\bar{d}^\top \nabla f(\bar{x}) \leq \min_{d \in D_{\oplus}} d^\top \nabla f(\bar{x}).
$$

   (b) (**4 punti**) Dato $\Delta_0 = 1$, determinare un punto $\tilde{x} = \bar{x} + \Delta_0 d$ con $d \in D_{\oplus}$ tale che:

$$
f(\tilde{x}) \leq \min_{d \in D_{\oplus}} f(\bar{x} + \Delta_0 d)
$$