Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 8 Marzo 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Il problema

Obiettivo: minimizzare una funzione $f(x)$ di n variabili reali per la quale non è data una procedura che restituisce le derivate di f in un punto x

- Metodi che usano il gradiente (naturalmente **approssimato**)
- Metodi che **NON** usano approssimazioni del gradiente

Il problema

Obiettivo: minimizzare una funzione $f(x)$ di n variabili reali per la quale non è data una procedura che restituisce le derivate di f in un punto x

- Metodi che usano il gradiente (naturalmente **approssimato**)
- Metodi che **NON** usano approssimazioni del gradiente

Il problema

Obiettivo: minimizzare una funzione $f(x)$ di n variabili reali per la quale non è data una procedura che restituisce le derivate di f in un punto x

- Metodi che usano il gradiente (naturalmente **approssimato**)
- Metodi che **NON** usano approssimazioni del gradiente

Formule di approssimazione delle derivate

- differenze finite in avanti (FFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x+\epsilon e_i) - f(x)}{\epsilon} \quad \text{con } e_i \ i\text{-esima colonna di } I$$

- differenze finite all'indietro (BFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x) - f(x-\epsilon e_i)}{\epsilon}$$

- differenze finite centrali (CFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x+\epsilon e_i) - f(x-\epsilon e_i)}{2\epsilon}$$

Formule di approssimazione delle derivate

- differenze finite in avanti (FFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x+\epsilon e_i)-f(x)}{\epsilon} \quad \text{con } e_i \ i\text{-esima colonna di } I$$

- differenze finite all'indietro (BFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x)-f(x-\epsilon e_i)}{\epsilon}$$

- differenze finite centrali (CFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x+\epsilon e_i)-f(x-\epsilon e_i)}{2\epsilon}$$

Formule di approssimazione delle derivate

- differenze finite in avanti (FFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x+\epsilon e_i) - f(x)}{\epsilon} \quad \text{con } e_i \ i\text{-esima colonna di } I$$

- differenze finite all'indietro (BFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x) - f(x-\epsilon e_i)}{\epsilon}$$

- differenze finite centrali (CFD):

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \simeq \frac{f(x+\epsilon e_i) - f(x-\epsilon e_i)}{2\epsilon}$$

Metodo che usa il gradiente approssimato

- Calcolo $d = -\nabla_\epsilon f(x)$
- Determino un passo α t.c.

$$\begin{aligned} f(x+\alpha d) &\leq f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d \quad \text{(suff. riduzione)} \\ f(x+\delta\alpha d) &> f(x) + \gamma\delta\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d \quad \text{(suff. spostamento)} \end{aligned}$$

con $\gamma \in (0, 1/2)$ e $\delta > 1$

- Pongo $x \leftarrow x + \alpha d$

Metodo che usa il gradiente approssimato

- Calcolo $d = -\nabla_\epsilon f(x)$
- Determino un passo α t.c.

$$\begin{array}{rcll} f(x+\alpha d) & \leq & f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d & \text{(suff. riduzione)} \\ f(x+\delta\alpha d) & > & f(x) + \gamma\delta\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d & \text{(suff. spostamento)} \end{array}$$

con $\gamma \in (0, 1/2)$ e $\delta > 1$

- Pongo $x \leftarrow x + \alpha d$

Metodo che usa il gradiente approssimato

- Calcolo $d = -\nabla_\epsilon f(x)$
- Determino un passo α t.c.

$$\begin{array}{rcll} f(x+\alpha d) & \leq & f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d & \text{(suff. riduzione)} \\ f(x+\delta\alpha d) & > & f(x) + \gamma\delta\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d & \text{(suff. spostamento)} \end{array}$$

  con $\gamma \in (0, 1/2)$ e $\delta > 1$
- Pongo $x \leftarrow x + \alpha d$

Pseudo-codice

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (0, 1)$, `maxit`

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\|\nabla_c f(x)\| \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $d = -\nabla_c f(x)$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (0, 1)$, `maxit`

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$ `maxit` **and** $\|\nabla_\epsilon f(x)\| \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $d = -\nabla_\epsilon f(x)$

  Let $\alpha \leftarrow \Delta$

  $x \leftarrow x + \alpha d$, $\Delta \leftarrow \alpha$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (0, 1)$, `maxit`

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\|\nabla_\epsilon f(x)\| \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $d = -\nabla_\epsilon f(x)$

  Let $\alpha \leftarrow \Delta$

  if $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$ **then**

  else

  endif

  $x \leftarrow x + \alpha d$, $\Delta \leftarrow \alpha$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (0, 1)$, `maxit`

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\|\nabla_\epsilon f(x)\| \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $d = -\nabla_\epsilon f(x)$

  Let $\alpha \leftarrow \Delta$

  if $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$ **then**

    while $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$

      $\alpha \leftarrow \beta\alpha$

  else

    $\tilde{\alpha} \leftarrow \alpha/\beta$

    while $f(x + \tilde{\alpha} d) \leq f(x) + \gamma\tilde{\alpha}\nabla_\epsilon f(x)^\top d$

      $\alpha \leftarrow \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \leftarrow \alpha/\beta$

  endif

  $x \leftarrow x + \alpha d$, $\Delta \leftarrow \alpha$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (0, 1)$, `maxit`

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$ `maxit` **and** $\|\nabla_\epsilon f(x)\| \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $d = -\nabla_\epsilon f(x)$

  Let $\alpha \leftarrow \Delta$

  if $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$ **then**

    while $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$

      $\alpha \leftarrow \beta\alpha$

  else

    $\tilde{\alpha} \leftarrow \alpha/\beta$

    while $f(x + \tilde{\alpha} d) \leq f(x) + \gamma\tilde{\alpha}\nabla_\epsilon f(x)^\top d$

      $\alpha \leftarrow \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \leftarrow \alpha/\beta$

  endif

  $x \leftarrow x + \alpha d$, $\Delta \leftarrow \alpha$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (0, 1)$, `maxit`

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\|\nabla_\epsilon f(x)\| \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $d = -\nabla_\epsilon f(x)$

  Let $\alpha \leftarrow \Delta$

  if $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$ **then**

    while $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$

      $\alpha \leftarrow \beta\alpha$

  else

    $\tilde\alpha \leftarrow \alpha/\beta$

    while $f(x + \tilde\alpha d) \leq f(x) + \gamma\tilde\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$

      $\alpha \leftarrow \tilde\alpha$, $\tilde\alpha \leftarrow \alpha/\beta$

  endif

  $x \leftarrow x + \alpha d$, $\Delta \leftarrow \alpha$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (0, 1)$, `maxit`

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$`maxit` **and** $\|\nabla_\epsilon f(x)\| \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$, $d = -\nabla_\epsilon f(x)$

  Let $\alpha \leftarrow \Delta$

  if $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$ **then**

    while $f(x + \alpha d) > f(x) + \gamma\alpha\nabla_\epsilon f(x)^\top d$

      $\alpha \leftarrow \beta\alpha$

  else

    $\tilde{\alpha} \leftarrow \alpha/\beta$

    while $f(x + \tilde{\alpha} d) \leq f(x) + \gamma\tilde{\alpha}\nabla_\epsilon f(x)^\top d$

      $\alpha \leftarrow \tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha} \leftarrow \alpha/\beta$

  endif

  $x \leftarrow x + \alpha d$, $\Delta \leftarrow \alpha$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  If $\exists\, \bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta \bar{d}) < f(x)$

  else

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del “compass search”

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  If $\exists\ \bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$

    $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$

If $\exists\ \bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$

$x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

else

$\Delta \leftarrow \Delta/2$

endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  If $\exists\ \bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$

    $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search"

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$
  If $\exists\ \bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$
    $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$
  else
    $\Delta \leftarrow \Delta/2$
  endif

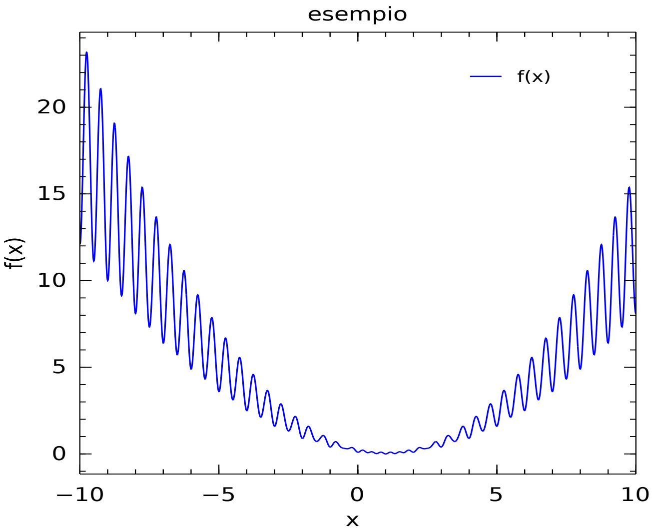
end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

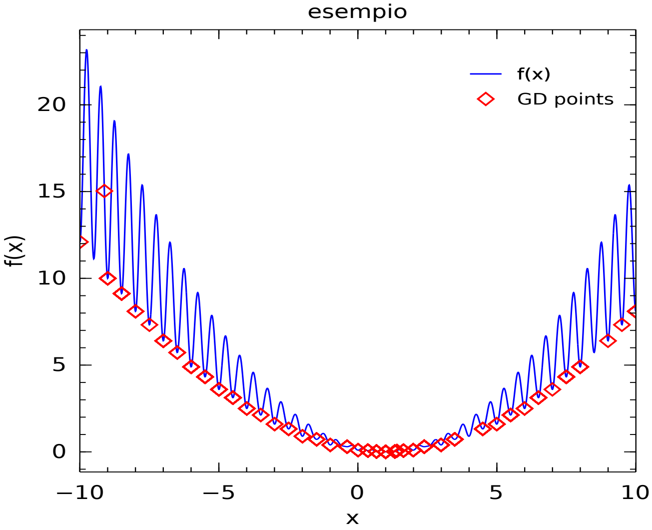
Esempio

Confronto su un problema in Julia

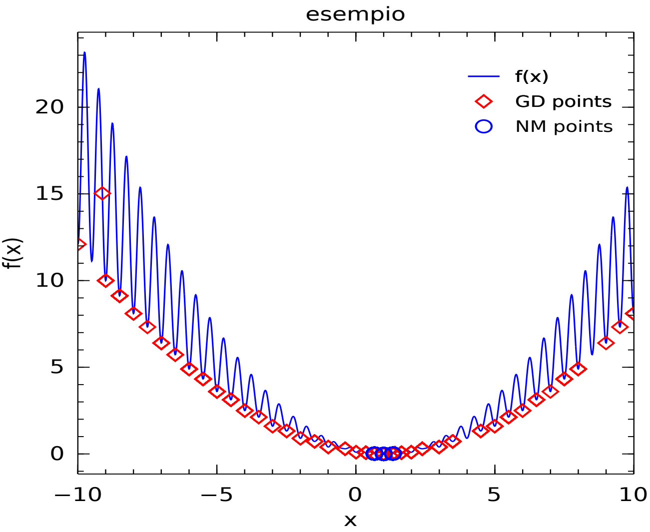
Esempio, molti minimi locali



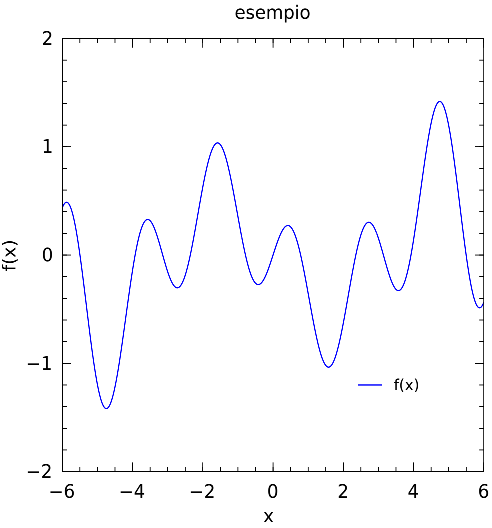
Esempio, molti minimi locali



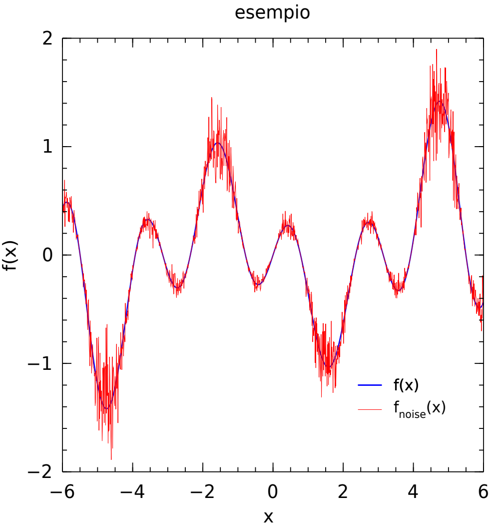
Esempio, molti minimi locali



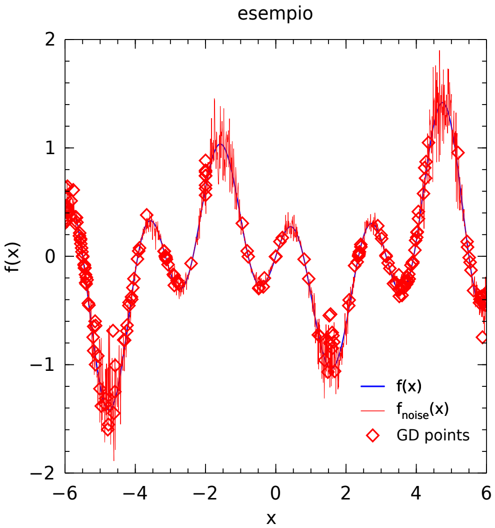
Esempio



Esempio

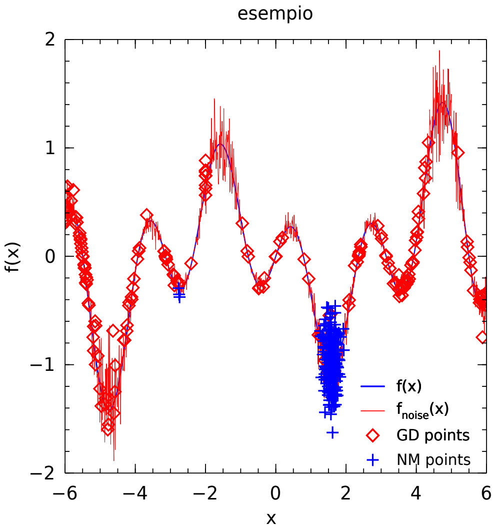


Esempio



200 minimizzazioni a partire da 200 p.ti iniziali random

Esempio



200 minimizzazioni a partire da 200 p.ti iniziali random

Perché?

Supponiamo $f(x)$ sia affetta da rumore additivo quindi

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon$$

Differenze finite su $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) &\cong \frac{\tilde{f}(x+\Delta e_i) - \tilde{f}(x)}{\Delta} = \frac{f(x+\Delta e_i) + \epsilon_1 - f(x) - \epsilon_2}{\Delta} \\ &\cong \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta}\end{aligned}$$

Problema: per avere una buona approssimazione devo usare $\Delta \ll 1$ **ma** in questo caso

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta} \gg 1!!!$$

Perché?

Supponiamo $f(x)$ sia affetta da rumore additivo quindi

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon$$

Differenze finite su $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) &\cong \frac{\tilde{f}(x+\Delta e_i) - \tilde{f}(x)}{\Delta} = \frac{f(x+\Delta e_i) + \epsilon_1 - f(x) - \epsilon_2}{\Delta} \\
&\cong \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta}
\end{aligned}$$

Problema: per avere una buona approssimazione devo usare $\Delta \ll 1$ **ma** in questo caso

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta} \gg 1!!!$$

Perché?

Supponiamo $f(x)$ sia affetta da rumore additivo quindi

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon$$

Differenze finite su $\tilde{f}$:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) \cong \frac{\tilde{f}(x+\Delta e_i) - \tilde{f}(x)}{\Delta} = \frac{f(x+\Delta e_i) + \epsilon_1 - f(x) - \epsilon_2}{\Delta}$$

$$\cong \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta}$$

Problema: per avere una buona approssimazione devo usare $\Delta \ll 1$ **ma** in questo caso

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta} \gg 1!!!$$

Perché?

Supponiamo $f(x)$ sia affetta da rumore additivo quindi

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon$$

Differenze finite su $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) &\cong \frac{\tilde{f}(x+\Delta e_i) - \tilde{f}(x)}{\Delta} = \frac{f(x+\Delta e_i) + \epsilon_1 - f(x) - \epsilon_2}{\Delta} \\ &\cong \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta}\end{aligned}$$

Problema: per avere una buona approssimazione devo usare $\Delta \ll 1$ **ma** in questo caso

$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta} \gg 1!!!$$

Perché?

Supponiamo $f(x)$ sia affetta da rumore additivo quindi

$$\tilde{f}(x) = f(x) + \epsilon$$

Differenze finite su $\tilde{f}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i}(x) &\cong \frac{\tilde{f}(x + \Delta e_i) - \tilde{f}(x)}{\Delta} = \frac{f(x + \Delta e_i) + \epsilon_1 - f(x) - \epsilon_2}{\Delta} \\ &\cong \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta} \end{aligned}$$

Problema: per avere una buona approssimazione devo usare $\Delta \ll 1$ **ma** in questo caso

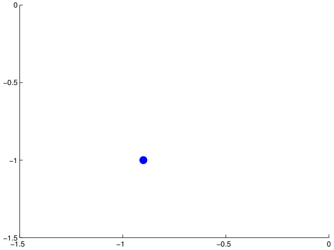
$$\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\Delta} \gg 1!!!$$

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto iniziale: $x_0 = (-0.9; -1.0)^\top$
$f(x)$ iniziale: $f(x_0) = 11.3524$
Passo iniziale: $\Delta = 0.3$

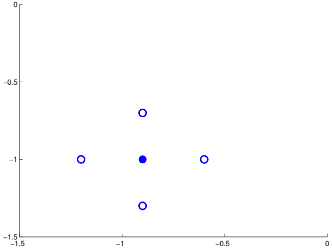


Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto iniziale: $x_0 = (-0.9; -1.0)^\top$
$f(x)$ iniziale: $f(x_0) = 11.3524$
Passo iniziale: $\Delta = 0.3$



Calcoliamo $f(x)$ nei punti

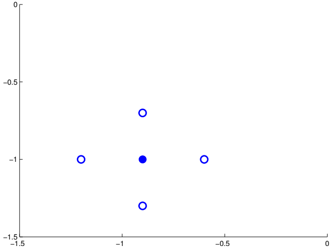
Est	11.7904
Ovest	19.9504
Nord	
Sud	29.4628

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto iniziale: $x_0 = (-0.9; -1.0)^\top$
$f(x)$ iniziale: $f(x_0) = 11.3524$
Passo iniziale: $\Delta = 0.3$



Calcoliamo $f(x)$ nei punti

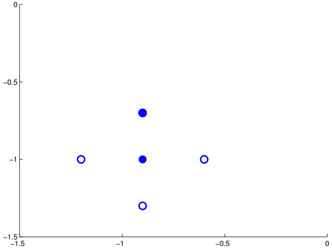
Est	11.7904
Ovest	19.9504
Nord	5.0788
Sud	29.4628

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.9; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 5.0788$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$



Calcoliamo $f(x)$ nei punti

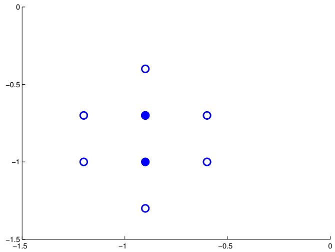
Est	11.7904
Ovest	19.9504
Nord	**5.0788**
Sud	29.4628

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.9; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 5.0788$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$



Calcoliamo $f(x)$ nei punti

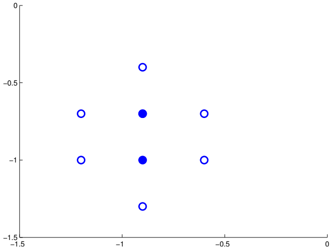
Est	
Ovest	17.4208
Nord	6.4948
Sud	11.3524

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.9; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 5.0788$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$



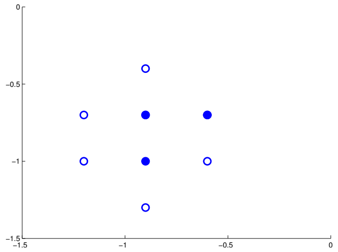
Calcoliamo $f(x)$ nei punti

Est	2.2048
Ovest	17.4208
Nord	6.4948
Sud	11.3524

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$



Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 2.2048$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$

Calcoliamo $f(x)$ nei punti

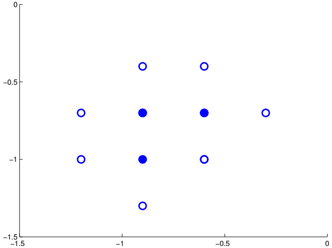
Est	**2.2048**
Ovest	17.4208
Nord	6.4948
Sud	11.3524

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 2.2048$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$



Calcoliamo $f(x)$ nei punti

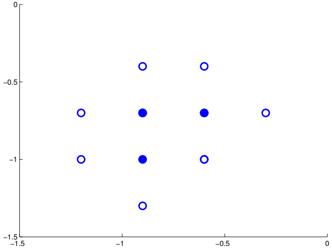
Est	4.9108
Ovest	5.0788
Nord	
Sud	11.7904

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.7)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 2.2048$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$



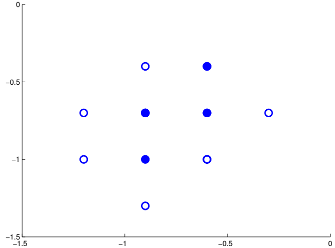
Calcoliamo $f(x)$ nei punti

Est	4.9108
Ovest	5.0788
Nord	0.5248
Sud	11.7904

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$



Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.5248$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$

Calcoliamo $f(x)$ nei punti

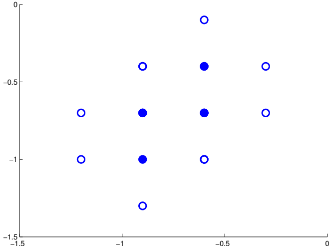
Est	4.9108
Ovest	5.0788
Nord	**0.5248**
Sud	11.7904

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.5248$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$



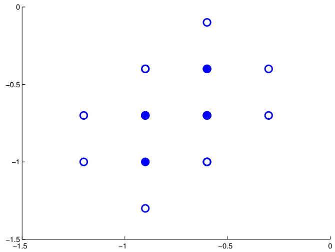
Calcoliamo $f(x)$ nei punti

Est	0.5668
Ovest	6.4948
Nord	3.3808
Sud	2.2048

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$



Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.5248$
Passo corrente: $\Delta = 0.3$

Calcoliamo $f(x)$ nei punti

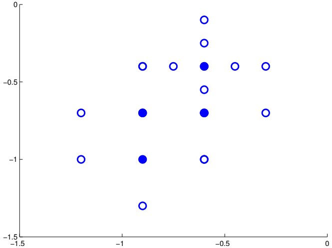
Est	0.5668
Ovest	6.4948
Nord	3.3808
Sud	2.2048

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.5248$
Passo corrente: $\Delta = 0.15$



Calcoliamo $f(x)$ nei punti

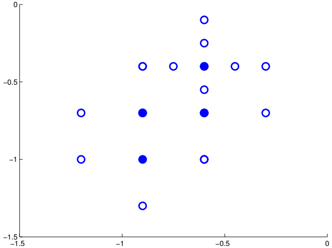
Est	
Ovest	2.5335
Nord	1.5660
Sud	0.6054

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.6; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.5248$
Passo corrente: $\Delta = 0.15$



Calcoliamo $f(x)$ nei punti

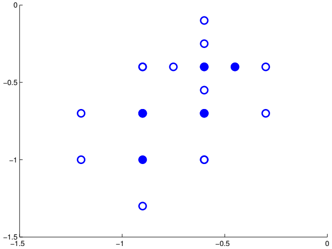
Est	0.0069
Ovest	2.5335
Nord	1.5660
Sud	0.6054

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.45; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.0069$
Passo corrente: $\Delta = 0.15$
Calcoliamo $f(x)$ nei punti

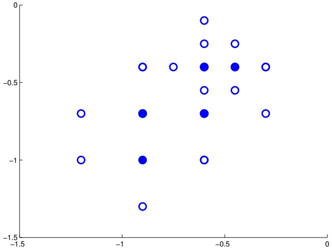


Est	**0.0069**
Ovest	2.5335
Nord	1.5660
Sud	0.6054

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$



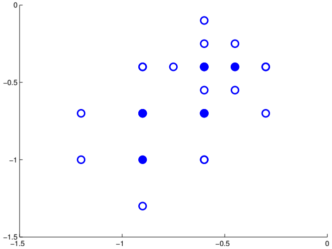
Punto corrente: $x_k = (-0.45; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.0069$
Passo corrente: $\Delta = 0.15$
Calcoliamo $f(x)$ nei punti

Est	0.5668
Ovest	0.5248
Nord	0.3957
Sud	0.7670

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$



Punto corrente: $x_k = (-0.45; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.0069$
Passo corrente: $\Delta = 0.15$
Calcoliamo $f(x)$ nei punti

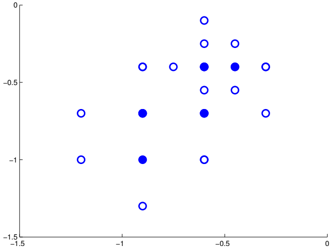
Est	0.5668
Ovest	0.5248
Nord	0.3957
Sud	0.7670

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.45; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.0069$
Passo corrente: $\Delta = 0.075$
Calcoliamo $f(x)$ nei punti



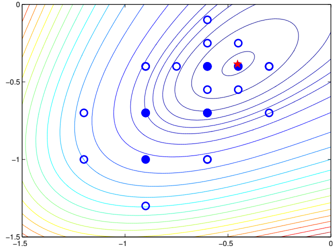
Est	0.5668
Ovest	0.5248
Nord	0.3957
Sud	0.7670

Compass Search

Consideriamo il problema:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$$

Punto corrente: $x_k = (-0.45; -0.4)^\top$
$f(x)$ corrente: $f(x_k) = 0.0069$
Passo corrente: $\Delta = 0.075$
Calcoliamo $f(x)$ nei punti



Est	0.5668
Ovest	0.5248
Nord	0.3957
Sud	0.7670

Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
2.204800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.000298	0.018750
0.000298	0.009375
0.000298	0.004687
0.000298	0.002344
0.000173	0.002344
0.000054	0.002344
0.000043	0.002344
0.000033	0.002344

Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
2.204800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.000298	0.018750
0.000298	0.009375
0.000298	0.004687
0.000298	0.002344
0.000173	0.002344
0.000054	0.002344
0.000043	0.002344
0.000033	0.002344

Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
2.204800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.000298	0.018750
0.000298	0.009375
0.000298	0.004687
0.000298	0.002344
0.000173	0.002344
0.000054	0.002344
0.000043	0.002344
0.000033	0.002344

Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
2.204800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.000298	0.018750
0.000298	0.009375
0.000298	0.004687
0.000298	0.002344
0.000173	0.002344
0.000054	0.002344
0.000043	0.002344
0.000033	0.002344

Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
2.204800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.000298	0.018750
0.000298	0.009375
0.000298	0.004687
0.000298	0.002344
0.000173	0.002344
0.000054	0.002344
0.000043	0.002344
0.000033	0.002344

Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
2.204800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.000298	0.018750
0.000298	0.009375
0.000298	0.004687
0.000298	0.002344
0.000173	0.002344
0.000054	0.002344
0.000043	0.002344
0.000033	0.002344

Ricapitolando

$f(x_k)$	Δ_k
11.352400	0.300000
5.078800	0.300000
2.204800	0.300000
0.524800	0.300000
0.524800	0.150000
0.006925	0.150000
0.006925	0.075000
0.006925	0.037500
0.006925	0.018750
0.000298	0.018750
0.000298	0.009375
0.000298	0.004687
0.000298	0.002344
0.000173	0.002344
0.000054	0.002344
0.000043	0.002344
0.000033	0.002344

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, `maxit`, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$ `maxit` **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$

Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

if $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

else

endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

  if $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

    $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \texttt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$
  Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

  if $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

    $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

  else

    $\Delta \leftarrow \Delta/2$

  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$
  Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

  if $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**
    $x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$
  else
    $\Delta \leftarrow \Delta/2$
  endif

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, maxit, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq$maxit **and** $\Delta \geq \Delta_{min}$ **do**

$\quad k \leftarrow k + 1$

$\quad$ Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x + \Delta\bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x + \Delta d_i)$

$\quad$ **if** $f(x + \Delta\bar{d}) < f(x)$ **then**

$\quad\quad x \leftarrow x + \Delta\bar{d}$

$\quad$ **else**

$\quad\quad \Delta \leftarrow \Delta/2$

$\quad$ **endif**

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x_k + \Delta_k d_i)$

  if $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) < f(x_k)$ **then**

    $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k \bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

  else

    $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

  endif

  $k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: x (miglior punto determinato)

Pseudo-codice del "compass search" forte

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\texttt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \dots, n\}$

$k \leftarrow 0$, $x \leftarrow x_0$, $\Delta \leftarrow \Delta_0$

while $k \le \texttt{maxit}$ **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

$k \leftarrow k + 1$

Let $\bar{d} \in D$ be s.t. $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) = \min_{d_i \in D} f(x_k + \Delta_k d_i)$

if $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) < f(x_k)$ **then**

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k \bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

else

$\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k / 2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

endif

$k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: $\{x_k\}, \{\Delta_k\}$ successioni di punti e passi

Un po' di analisi

Assunzione (A1)

L'insieme di livello $L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq f(x_0)\}$ *è compatto*

N.B. nei (due) metodi visti, il passo Δ_k, iterazione dopo iterazione,

- o diminuisce (di un fattore costante $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$)
- o rimane costante ($\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$)

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ *e* $\texttt{maxit} = +\infty$*, allora* $\{\Delta_k\}$ *è una succ. infinita e*

$$\lim_{k \to \infty} \Delta_k = 0.$$

Un po' di analisi

Assunzione (A1)

L'insieme di livello $L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \le f(x_0)\}$ *è compatto*

N.B. nei (due) metodi visti, il passo Δ_k, iterazione dopo iterazione,

- o diminuisce (di un fattore costante $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$)
- o rimane costante ($\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$)

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \le 0$ *e* $\mathtt{maxit} = +\infty$*, allora* $\{\Delta_k\}$ *è una succ. infinita e*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0.$$

Un po' di analisi

Assunzione (A1)

L'insieme di livello $L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) \leq f(x_0)\}$ *è compatto*

N.B. nei (due) metodi visti, il passo Δ_k, iterazione dopo iterazione,

- o diminuisce (di un fattore costante $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$)
- o rimane costante ($\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$)

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ *e* `maxit` $= +\infty$, *allora* $\{\Delta_k\}$ *è una succ. infinita e*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0.$$

Convergenza a zero del passo

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ *e* $\texttt{maxit} = +\infty$, *allora* $\{\Delta_k\}$ *è una succ. infinita e*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0.$$

Dim.: Se $\Delta_{min} \leq 0$ e $\texttt{maxit} = +\infty$, la condizione del **while** più esterno è sempre vera, quindi l'algoritmo non termina mai, producendo una succ. $\{\Delta_k\}$ infinita.

Dalla def. dell'algoritmo segue che, per ogni k,

- $\Delta_k > 0$;
- $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$.

Quindi, $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \bar{\Delta} \geq 0$. Supponiamo che $\bar{\Delta} > 0$.

Convergenza a zero del passo

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ *e* $\texttt{maxit} = +\infty$*, allora* $\{\Delta_k\}$ *è una succ. infinita e*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0.$$

Dim.: Se $\Delta_{min} \leq 0$ e $\texttt{maxit} = +\infty$, la condizione del **while** più esterno è sempre vera, quindi l'algoritmo non termina mai, producendo una succ. $\{\Delta_k\}$ infinita.

Dalla def. dell'algoritmo segue che, per ogni k,

- $\Delta_k > 0$;
- $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$.

Quindi, $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \bar{\Delta} \geq 0$. Supponiamo che $\bar{\Delta} > 0$.

Convergenza a zero del passo

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ *e* $\texttt{maxit} = +\infty$*, allora* $\{\Delta_k\}$ *è una succ. infinita e*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0.$$

Dim.: Se $\Delta_{min} \leq 0$ e $\texttt{maxit} = +\infty$, la condizione del **while** più esterno è sempre vera, quindi l'algoritmo non termina mai, producendo una succ. $\{\Delta_k\}$ infinita.

Dalla def. dell'algoritmo segue che, per ogni k,

- $\Delta_k > 0$;
- $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$.

Quindi, $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \bar{\Delta} \geq 0$. Supponiamo che $\bar{\Delta} > 0$.

Convergenza a zero del passo (segue)

Esiste un intero $\bar{k}$ tale che, per $k \geq \bar{k}$ il passo non viene più ridotto. Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) \text{ e } \Delta_{k+1} = \Delta_k = \Delta_{\bar{k}} = \bar{\Delta}.$$

Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$, i punti x_k appartengono ad una griglia, ovvero, per $i > 0$

$$x_{\bar{k}+i} = x_{\bar{k}} + \bar{\Delta} \sum_{r=0}^{i-1} d_{i_r} \in L(x_0) \quad d_{i_r} \in D$$

Questo e (A1) implicano che la sottosuccessione $\{x_k\}_{k \geq \bar{k}}$ (e quindi $\{x_k\}$) è costituita da un numero **finito** di punti distinti.

Convergenza a zero del passo (segue)

Esiste un intero $\bar{k}$ tale che, per $k \geq \bar{k}$ il passo non viene più ridotto. Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) \text{ e } \Delta_{k+1} = \Delta_k = \Delta_{\bar{k}} = \bar{\Delta}.$$

Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$, i punti x_k appartengono ad una griglia, ovvero, per $i > 0$

$$x_{\bar{k}+i} = x_{\bar{k}} + \bar{\Delta} \sum_{r=0}^{i-1} d_{i_r} \in L(x_0) \qquad d_{i_r} \in D$$

Questo e (A1) implicano che la sottosuccessione $\{x_k\}_{k \geq \bar{k}}$ (e quindi $\{x_k\}$) è costituita da un numero **finito** di punti distinti.

Convergenza a zero del passo (segue)

Esiste un intero $\bar{k}$ tale che, per $k \geq \bar{k}$ il passo non viene più ridotto. Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) \text{ e } \Delta_{k+1} = \Delta_k = \Delta_{\bar{k}} = \bar{\Delta}.$$

Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$, i punti x_k appartengono ad una griglia, ovvero, per $i > 0$

$$x_{\bar{k}+i} = x_{\bar{k}} + \bar{\Delta} \sum_{r=0}^{i-1} d_{i_r} \in L(x_0) \quad d_{i_r} \in D$$

Questo e (A1) implicano che la sottosuccessione $\{x_k\}_{k \geq \bar{k}}$ (e quindi $\{x_k\}$) è costituita da un numero **finito** di punti distinti.

Convergenza a zero del passo (segue)

Ma allora, deve necessariamente esistere un intero $\tilde{k} > \bar{k}$ t.c.

$$x_{\tilde{k}+1} = x_{\tilde{k}},$$

ma questo contraddice il fatto che $f(x_{\tilde{k}+1}) < f(x_{\tilde{k}})$ e allora, $\bar{\Delta} = 0$.

Convergenza a zero del passo (segue)

Ma allora, deve necessariamente esistere un intero $\tilde{k} > \bar{k}$ t.c.

$$x_{\tilde{k}+1} = x_{\tilde{k}},$$

ma questo contraddice il fatto che $f(x_{\tilde{k}+1}) < f(x_{\tilde{k}})$ e allora, $\bar{\Delta} = 0$.

Un po' di analisi (matematica)

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}$)

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Definizione (Segmento in $\mathbb{R}^n$)

Dati due punti $a, b \in \mathbb{R}^n$, il segmento di estremi a e b è

$$[a, b] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b, \ t \in [0, 1]\}$$

$$(a, b) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b, \ t \in (0, 1)\}$$

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}^n$)

$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)^\top (b - a)$$

Un po' di analisi (matematica)

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}$)

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Definizione (Segmento in $\mathbb{R}^n$)

Dati due punti $a, b \in \mathbb{R}^n$, il segmento di estremi a e b è

$$[a, b] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b,\ t \in [0, 1]\}$$
$$(a, b) \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b,\ t \in (0, 1)\}$$

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}^n$)

$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)^\top (b - a)$$

Un po' di analisi (matematica)

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}$)

$f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

Definizione (Segmento in $\mathbb{R}^n$)

Dati due punti $a, b \in \mathbb{R}^n$, il segmento di estremi a e b è

$$\begin{aligned} [a, b] &\triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b, \ \ t \in [0, 1]\} \\ (a, b) &\triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta + (1 - t)b, \ \ t \in (0, 1)\} \end{aligned}$$

Teorema (della media o di Lagrange in $\mathbb{R}^n$)

$f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in $[a, b]$. Esiste sempre un $\xi \in (a, b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = \nabla f(\xi)^\top (b - a)$$