Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 15 Marzo 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

pseudo-codice “implicit filtering”

INPUT: x_0, Δ_0, Δ_{min}, $\mathtt{maxit}$, $D = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, n\}$

$k \leftarrow 0$

while $k \leq \mathtt{maxit}$ **and** $\Delta_k \geq \Delta_{min}$ **do**

> **if** $\exists\ \bar{d} \in D$ s.t. $f(x_k + \Delta_k \bar{d}) < f(x_k) - \gamma\Delta_k$ **then**
>
> $x_{k+1} \leftarrow x_k + \Delta_k \bar{d}$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$
>
> **else**
>
> $\boxed{\text{implicit filtering step}}$
>
> **endif**
>
> $k \leftarrow k + 1$

end while

RETURN: $\{x_k\}, \{\Delta_k\}$ successioni di punti e passi

pseudo-codice "implicit filtering"

Implicit filtering step:

$d_k = -\nabla_{\Delta_k} f(x_k)$

if $\|d_k\| > \tau\Delta_k$ **and** $f(x_k + \Delta_k d_k) \leq f(x_k) - \gamma\Delta_k\|d_k\|^2$

compute $\alpha_k = 2^\beta \Delta_k$ s.t.

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) - \gamma\alpha_k\|d_k\|^2 \\ f(x_k + 2\alpha_k d_k) &> f(x_k) - \gamma 2\alpha_k\|d_k\|^2 \end{aligned}$$

if $\alpha_k\|d_k\|^2 > \tau\Delta_k$ **then**

$x_{k+1} \leftarrow x_k + \alpha_k d_k$, $\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k$

else

$\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

endif

else

$\Delta_{k+1} \leftarrow \Delta_k/2$, $x_{k+1} \leftarrow x_k$

endif

Analisi di Convergenza

Quale proprietà si dimostra per prima ?

Assunzione (A1)

L'insieme di livello $L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) \leq f(x_0)\}$ è compatto

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ e $\mathtt{maxit} = +\infty$, allora $\{\Delta_k\}$ è una succ. infinita e

$$\lim_{k \to \infty} \Delta_k = 0.$$

Analisi di Convergenza

Quale proprietà si dimostra per prima ?

Assunzione (A1)

L'insieme di livello $L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) \leq f(x_0)\}$ *è compatto*

Lemma

Se (A1) è soddisfatta, $\Delta_{min} \leq 0$ *e* $\texttt{maxit} = +\infty$*, allora* $\{\Delta_k\}$ *è una succ. infinita e*

$$\lim_{k\to\infty} \Delta_k = 0.$$

Convergenza a zero del passo (segue)

Dim.: Se $\Delta_{min} \leq 0$ e $\texttt{maxit} = +\infty$, la condizione del **while** più esterno è sempre vera, quindi l'algoritmo non termina mai, producendo una succ. $\{\Delta_k\}$ infinita.

Dalla def. dell'algoritmo segue che, per ogni k,

- $\Delta_k > 0$;
- $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$.

Quindi, $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \bar{\Delta} \geq 0$. Supponiamo che $\bar{\Delta} > 0$.
Esiste un intero $\bar{k}$ tale che, per $k \geq \bar{k}$ il passo non viene più ridotto. Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$ risulta $\Delta_{k+1} = \Delta_k = \Delta_{\bar{k}} = \bar{\Delta}$.
Per $k \geq \bar{k}$, o

- $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma\bar{\Delta} \leq f(x_k) - \gamma\tau\bar{\Delta}$ oppure
- $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma\alpha_k\|d_k\|^2 \leq f(x_k) - \gamma\tau\bar{\Delta}$

Convergenza a zero del passo (segue)

Dim.: Se $\Delta_{min} \leq 0$ e $\texttt{maxit} = +\infty$, la condizione del **while** più esterno è sempre vera, quindi l'algoritmo non termina mai, producendo una succ. $\{\Delta_k\}$ infinita.

Dalla def. dell'algoritmo segue che, per ogni k,

- $\Delta_k > 0$;
- $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$.

Quindi, $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \bar{\Delta} \geq 0$. Supponiamo che $\bar{\Delta} > 0$.
Esiste un intero $\bar{k}$ tale che, per $k \geq \bar{k}$ il passo non viene più ridotto. Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$ risulta $\Delta_{k+1} = \Delta_k = \Delta_{\bar{k}} = \bar{\Delta}$.
Per $k \geq \bar{k}$, o

- $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma\bar{\Delta} \leq f(x_k) - \gamma\tau\bar{\Delta}$ oppure
- $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma\alpha_k\|d_k\|^2 \leq f(x_k) - \gamma\tau\bar{\Delta}$

Convergenza a zero del passo (segue)

Dim.: Se $\Delta_{min} \leq 0$ e $\texttt{maxit} = +\infty$, la condizione del **while** più esterno è sempre vera, quindi l'algoritmo non termina mai, producendo una succ. $\{\Delta_k\}$ infinita.

Dalla def. dell'algoritmo segue che, per ogni k,

- $\Delta_k > 0$;
- $\Delta_{k+1} \leq \Delta_k$.

Quindi, $\lim_{k\to\infty} \Delta_k = \bar{\Delta} \geq 0$. Supponiamo che $\bar{\Delta} > 0$.
Esiste un intero $\bar{k}$ tale che, per $k \geq \bar{k}$ il passo non viene più ridotto. Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$ risulta $\Delta_{k+1} = \Delta_k = \Delta_{\bar{k}} = \bar{\Delta}$.
Per $k \geq \bar{k}$, o

- $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma\bar{\Delta} \leq f(x_k) - \gamma\tau\bar{\Delta}$ oppure
- $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma\alpha_k\|d_k\|^2 \leq f(x_k) - \gamma\tau\bar{\Delta}$

Convergenza a zero del passo (segue)

Quindi, per ogni $k \geq \bar{k}$, possiamo scrivere

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \gamma\tau\bar{\Delta} \leq f(x_{k-1}) - 2\gamma\tau\bar{\Delta} \leq \cdots \leq f(x_{\bar{k}}) - (k - \bar{k} + 1)\gamma\tau\bar{\Delta}$$

Quando $k \to \infty$, la relazione di sopra comporta che $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = -\infty$ che è in contraddizione con la continuità di f e compattezza di $L(x_0)$. $\square$

Convergenza a punti stazionari

Teorema

Se vale (A1) e se $f(x)$ è continuamente differenziabile, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $H \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in H}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K \subseteq H$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari

Teorema

Se vale (A1) e se $f(x)$ è continuamente differenziabile, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $H \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in H}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K \subseteq H$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari

Teorema

Se vale (A1) e se $f(x)$ è continuamente differenziabile, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $H \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in H}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K \subseteq H$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari

Teorema

Se vale (A1) e se $f(x)$ è continuamente differenziabile, allora

$$\liminf_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0.$$

Dim.

- $\{x_k\} \subset L(x_0)$;
- esiste $H \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ s.t. $\Delta_{k+1} = \Delta_k/2$.

Consideriamo la sottosuccessione $\{x_k\}_{k\in H}$ (contenuta in $L(x_0)$, ammette punti limite). Percui, esiste $K \subseteq H$ s.t.

- $\lim_{k\to\infty, k\in K} x_k = \bar{x}$;
- $\lim_{k\to\infty, k\in K} \Delta_k = 0$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Possiamo partizionare l'insieme K in due sottoinsiemi, K_1 e $K_2 = K \setminus K_1$ con

$$K_1 = \{k \in K : \|d_k\| \leq \tau\Delta_k\}$$

(N.B. K è infinito quindi almeno uno dei due insiemi deve essere infinito)

Supponiamo che K_1 sia infinito. Allora possiamo prendere il limite per $k \to \infty$, $k \in K_1$ nella relazione $\|d_k\| \leq \tau\Delta_k$

$$0 = \lim_{k \to \infty, k \in K_1} \tau\Delta_k \geq \lim_{k \to \infty, k \in K_1} \|d_k\| = \|\nabla f(\bar{x})\| \geq 0$$

che prova che $\bar{x}$ è stazionario per f.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Possiamo partizionare l'insieme K in due sottoinsiemi, K_1 e $K_2 = K \setminus K_1$ con

$$K_1 = \{k \in K : \|d_k\| \leq \tau\Delta_k\}$$

(N.B. K è infinito quindi almeno uno dei due insiemi deve essere infinito)

Supponiamo che K_1 sia infinito. Allora possiamo prendere il limite per $k \to \infty$, $k \in K_1$ nella relazione $\|d_k\| \leq \tau\Delta_k$

$$0 = \lim_{k\to\infty, k\in K_1} \tau\Delta_k \geq \lim_{k\to\infty, k\in K_1} \|d_k\| = \|\nabla f(\bar{x})\| \geq 0$$

che prova che $\bar{x}$ è stazionario per f.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Possiamo partizionare l'insieme K in due sottoinsiemi, K_1 e $K_2 = K \setminus K_1$ con

$$K_1 = \{k \in K : \|d_k\| \leq \tau \Delta_k\}$$

(N.B. K è infinito quindi almeno uno dei due insiemi deve essere infinito)

Supponiamo che K_1 sia infinito. Allora possiamo prendere il limite per $k \to \infty$, $k \in K_1$ nella relazione $\|d_k\| \leq \tau \Delta_k$

$$0 = \lim_{k \to \infty, k \in K_1} \tau \Delta_k \geq \lim_{k \to \infty, k \in K_1} \|d_k\| = \|\nabla f(\bar{x})\| \geq 0$$

che prova che $\bar{x}$ è stazionario per f.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Supponiamo ora che K_1 sia finito. Allora K_2 è infinito. In questo caso, per $k \in K_2$ può succedere:

(1) $f(x_k + \Delta_k d_k) > f(x_k) - \gamma \Delta_k \|d_k\|^2$ oppure

(2) $f(x_k + \Delta_k d_k) \le f(x_k) - \gamma \Delta_k \|d_k\|^2$ cioè il metodo calcola $\alpha_k = 2^\beta \Delta_k$ tale che

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\le f(x_k) - \gamma \alpha_k \|d_k\|^2 \\ f(x_k + 2\alpha_k d_k) &> f(x_k) - \gamma 2\alpha_k \|d_k\|^2 \end{aligned}$$

e, siccome $k \in K$,

$$\alpha_k \|d_k\|^2 \le \tau \Delta_k$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Supponiamo ora che K_1 sia finito. Allora K_2 è infinito. In questo caso, per $k \in K_2$ può succedere:

(1) $f(x_k + \Delta_k d_k) > f(x_k) - \gamma \Delta_k \|d_k\|^2$ oppure

(2) $f(x_k + \Delta_k d_k) \leq f(x_k) - \gamma \Delta_k \|d_k\|^2$ cioè il metodo calcola $\alpha_k = 2^\beta \Delta_k$ tale che

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) - \gamma \alpha_k \|d_k\|^2 \\ f(x_k + 2\alpha_k d_k) &> f(x_k) - \gamma 2\alpha_k \|d_k\|^2 \end{aligned}$$

e, siccome $k \in K$,

$$\alpha_k \|d_k\|^2 \leq \tau \Delta_k$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Supponiamo ora che K_1 sia finito. Allora K_2 è infinito. In questo caso, per $k \in K_2$ può succedere:

(1) $f(x_k + \Delta_k d_k) > f(x_k) - \gamma\Delta_k\|d_k\|^2$ oppure

(2) $f(x_k + \Delta_k d_k) \leq f(x_k) - \gamma\Delta_k\|d_k\|^2$ cioè il metodo calcola $\alpha_k = 2^\beta\Delta_k$ tale che

$$\begin{aligned} f(x_k + \alpha_k d_k) &\leq f(x_k) - \gamma\alpha_k\|d_k\|^2 \\ f(x_k + 2\alpha_k d_k) &> f(x_k) - \gamma 2\alpha_k\|d_k\|^2 \end{aligned}$$

e, siccome $k \in K$,

$$\alpha_k\|d_k\|^2 \leq \tau\Delta_k$$

Convergenza a punti stazionari (segue)

Procediamo per contraddizione assumendo che $\|\nabla f(\bar{x})\| > 0$.

Supponiamo che infinite volte capiti (1). Applichiamo il Teorema della media e otteniamo

$$f(x_k + \Delta_k d_k) - f(x_k) = \Delta_k \nabla f(\xi_k)^\top d_k > -\gamma \Delta_k \|d_k\|^2$$

con $\xi_k = x_k + t_k \Delta_k d_k$ e $t_k \in (0, 1)$.
Semplificando e prendendo il limite per $k \to \infty$ otteniamo

$$-\|\nabla f(\bar{x})\|^2 \geq -\gamma \|\nabla f(\bar{x})\|^2$$

ovvero $1 - \gamma \leq 0$ che contraddice l'ipotesi $\gamma < 1$.

Convergenza a punti stazionari (segue)

Supponiamo che infinite volte capiti (2). Questa volta

$$\alpha_k \|d_k\|^2 \leq \tau \Delta_k$$

Prendendo il limite per $k \to \infty$ e ricordando che $\Delta_k \to 0$ e $\|\nabla f(\bar{x})\| > 0$, otteniamo

$$\lim_{k \to \infty, (2)} \alpha_k = 0.$$

Il punto $x_k + \alpha_k d_k$ non è accettato dal metodo questa volta ma vale ugualmente

$$f(x_k + 2\alpha_k d_k) > f(x_k) - \gamma 2\alpha_k \|d_k\|^2.$$

per cui si può ragionare come nel punto precedente e concludere la dimostrazione. □

Convergenza a punti stazionari (segue)

Supponiamo che infinite volte capiti (2). Questa volta

$$\alpha_k \|d_k\|^2 \leq \tau \Delta_k$$

Prendendo il limite per $k \to \infty$ e ricordando che $\Delta_k \to 0$ e $\|\nabla f(\bar{x})\| > 0$, otteniamo

$$\lim_{k \to \infty, (2)} \alpha_k = 0.$$

Il punto $x_k + \alpha_k d_k$ non è accettato dal metodo questa volta ma vale ugualmente

$$f(x_k + 2\alpha_k d_k) > f(x_k) - \gamma 2\alpha_k \|d_k\|^2.$$

per cui si può ragionare come nel punto precedente e concludere la dimostrazione.

Testo d'esame

Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y} \; f(x,y),$$

con $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\}$.

Siano $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$, il punto ed il passo iniziali del metodo **Compass Search** (forte).

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Siano ora $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 0.5$.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Testo d'esame

Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y} \ f(x,y),$$

con $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\}$.

Siano $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$, il punto ed il passo iniziali del metodo **Compass Search** (forte).

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Siano ora $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 0.5$.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Testo d'esame

Si consideri il problema non vincolato seguente:

$$\min_{x,y} \; f(x,y),$$

con $f(x,y) = \max\{x^2 + y^2, (x-1)^2 + y^2\}$.

Siano $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 1$, il punto ed il passo iniziali del metodo **Compass Search** (forte).

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Siano ora $x_0 = (0,0)^\top$ e $\Delta_0 = 0.5$.

- Scrivere i punti di tentativo (e relativi valori di funzione) del metodo nella sua prima iterazione.
- Scrivere il punto x_1, determinato dal metodo alla fine della prima iterazione.

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Alla generica iterazione k lo stato dell'algoritmo è dato da:

$$X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$$

indichiamo $f_i = f(x_i)$ e supponiamo X_k ordinato in modo che

$$f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_{n+1}.$$

Ricordiamo l'espressione del "centroide" dei primi n punti in X_k

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Idea: Sfruttare x_{n+1} e $\bar{x}$ per cercare un punto "migliore" di x_{n+1}

Il metodo di Nelder-Mead

Dato un parametro μ, definiamo

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_{n+1})$$

Il metodo usa: $-1 < \mu_{ic} < 0 < \mu_{oc} < \mu_r < \mu_e$ e

$$\begin{array}{lrclrcl}
\text{(inner contraction)} & x^{ic} & = & x(\mu_{ic}), & f^{ic} & = & f(x^{ic}) \\
\text{(outer contraction)} & x^{oc} & = & x(\mu_{oc}), & f^{oc} & = & f(x^{oc}) \\
\text{(reflect)} & x^{r} & = & x(\mu_{r}), & f^{r} & = & f(x^{r}) \\
\text{(expand)} & x^{e} & = & x(\mu_{e}), & f^{e} & = & f(x^{e})
\end{array}$$

Il metodo di Nelder-Mead

Dato un parametro μ, definiamo

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_{n+1})$$

Il metodo usa: $-1 < \mu_{ic} < 0 < \mu_{oc} < \mu_r < \mu_e$ e

$$\begin{array}{llllll}
\text{(inner contraction)} & x^{ic} & = & x(\mu_{ic}), & f^{ic} & = & f(x^{ic}) \\
\text{(outer contraction)} & x^{oc} & = & x(\mu_{oc}), & f^{oc} & = & f(x^{oc}) \\
\text{(reflect)} & x^{r} & = & x(\mu_{r}), & f^{r} & = & f(x^{r}) \\
\text{(expand)} & x^{e} & = & x(\mu_{e}), & f^{e} & = & f(x^{e})
\end{array}$$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \le f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \le f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \le f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \le f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0,1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \ldots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

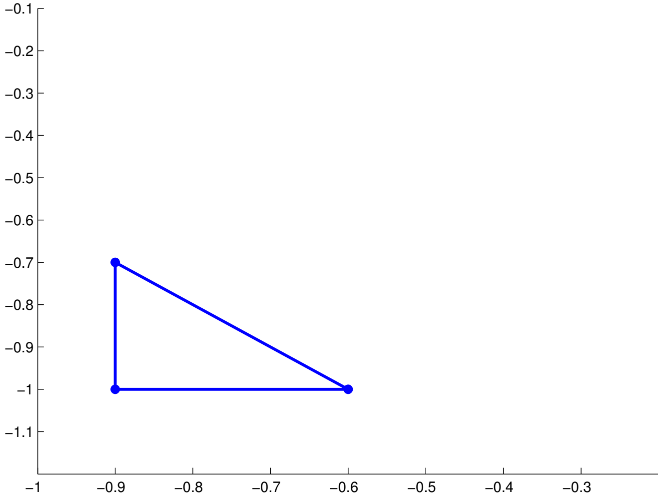
Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
  - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
  - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
  - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
  - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
  - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
  - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
  - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

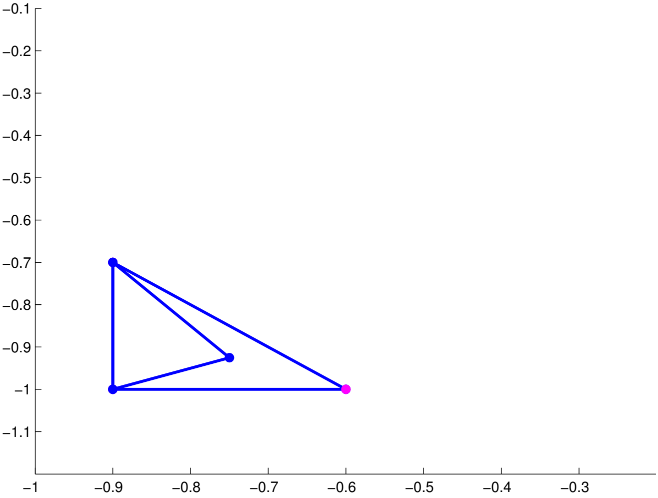
Iterazione k

- Se $\boxed{f_1 \leq f^r < f_n}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f^r < f_1}$, allora
    - Se $f^e < f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^e\}$ **FINE**
    - altrimenti $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^r\}$ **FINE**
- Se $\boxed{f_n \leq f^r < f_{n+1}}$, allora
    - Se $f^{oc} \leq f^r$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{oc}\}$ **FINE**
    - altrimenti **shrink**
- Se $\boxed{f_{n+1} \leq f^r}$, allora
    - Se $f^{ic} < f_{n+1}$, allora $X_{k+1} = X_k \setminus \{x_{n+1}\} \cup \{x^{ic}\}$ **FINE**
    - altrimenti **shrink**
- **shrink**:
    - $X_{k+1} = \{x_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_{n+1}\}$ dove
    - $\hat{x}_i = x_1 + \gamma(x_i - x_1)$, $i = 2, \dots, n+1$, $\gamma \in (0, 1)$

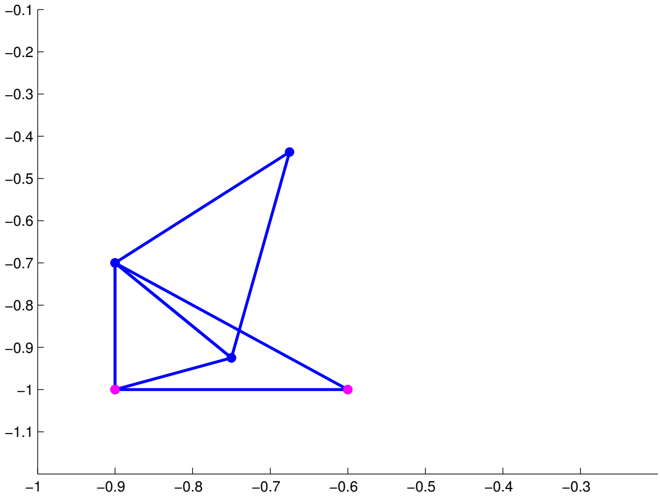
Esempio su Funzione di Broyden



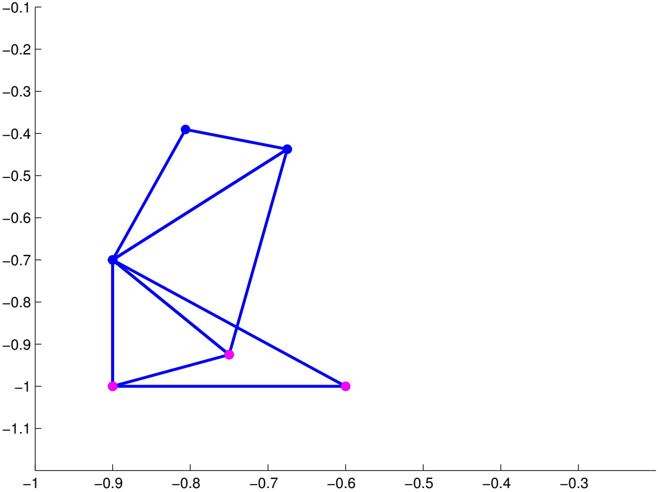
Esempio su Funzione di Broyden



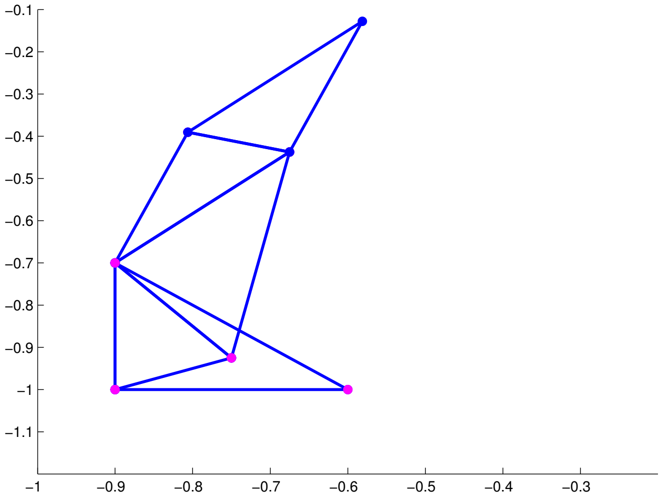
Esempio su Funzione di Broyden



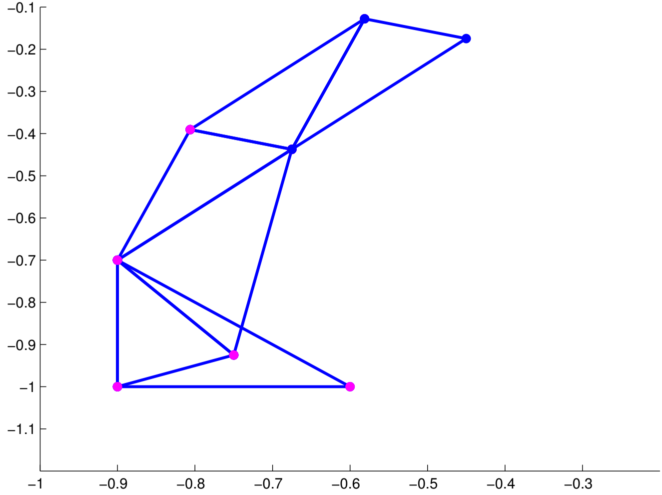
Esempio su Funzione di Broyden



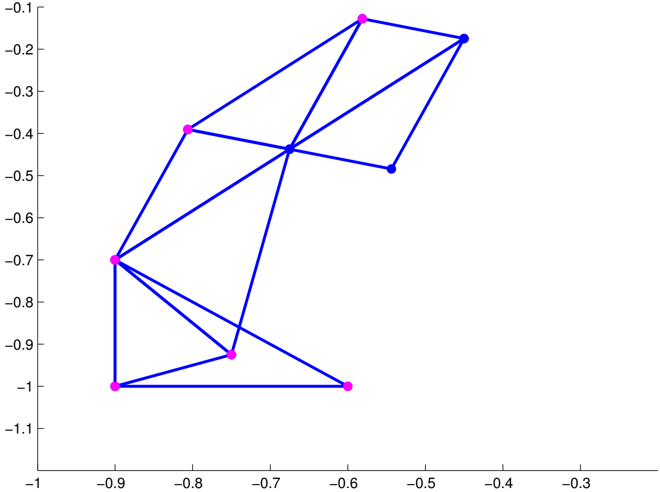
Esempio su Funzione di Broyden



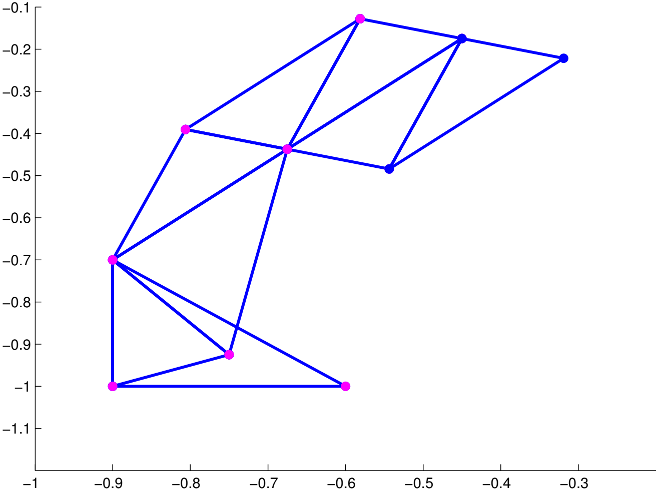
Esempio su Funzione di Broyden



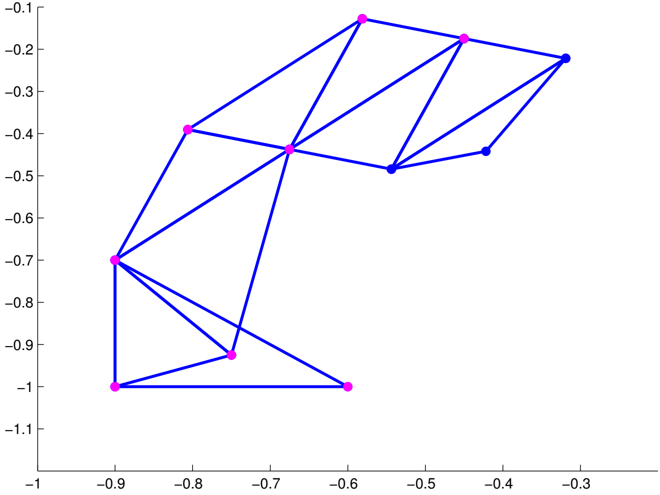
Esempio su Funzione di Broyden



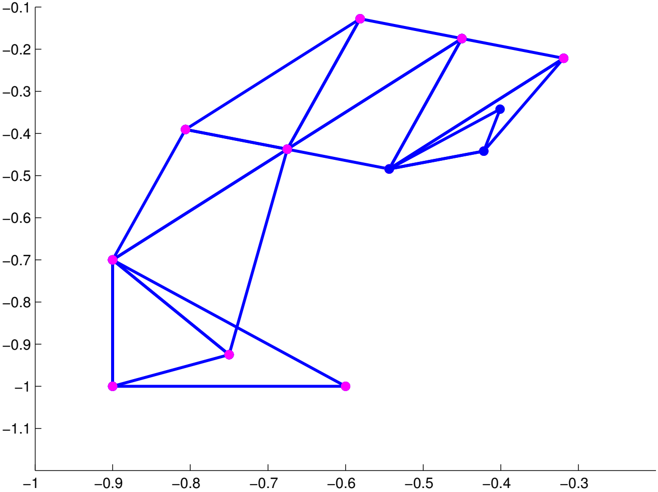
Esempio su Funzione di Broyden



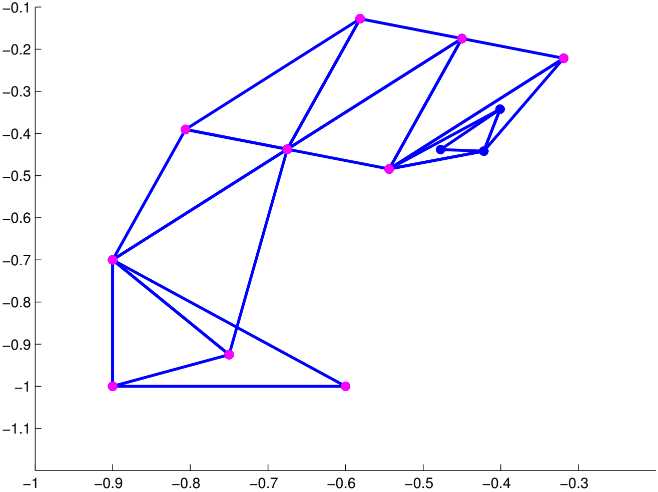
Esempio su Funzione di Broyden



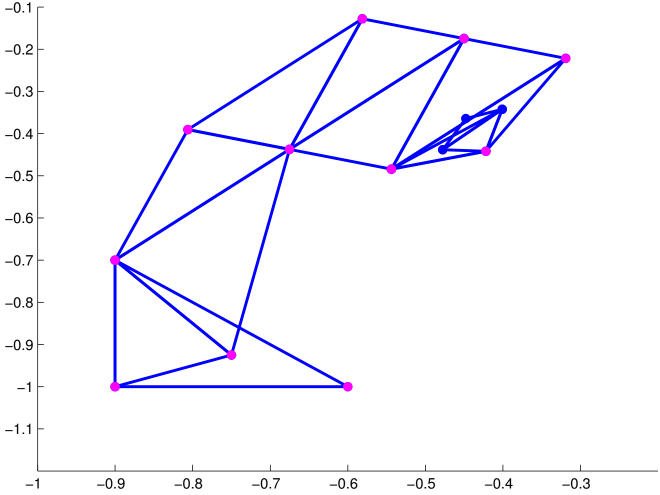
Esempio su Funzione di Broyden



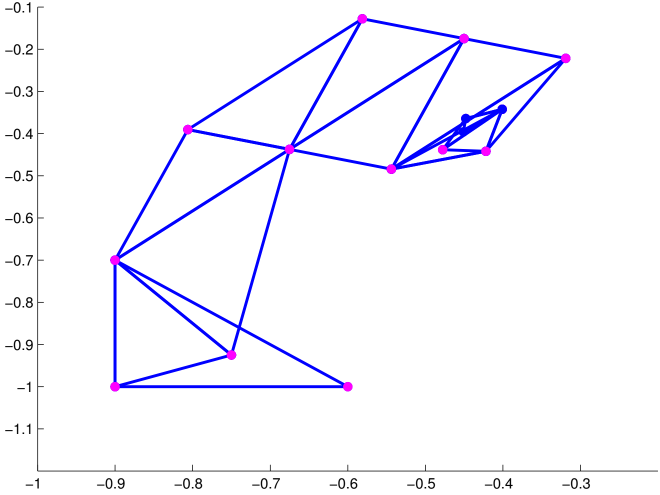
Esempio su Funzione di Broyden



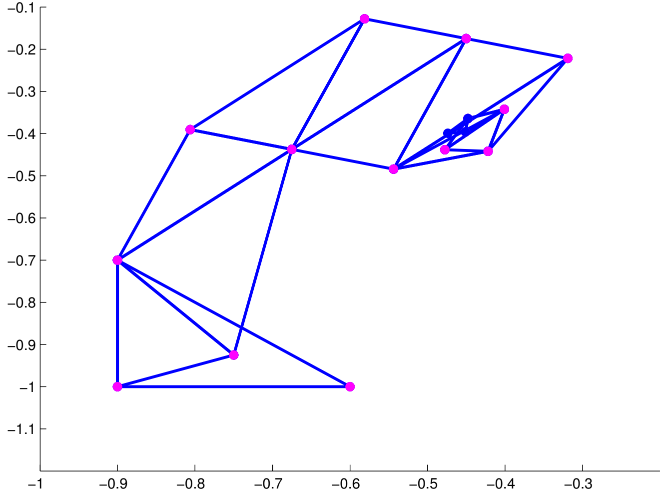
Esempio su Funzione di Broyden



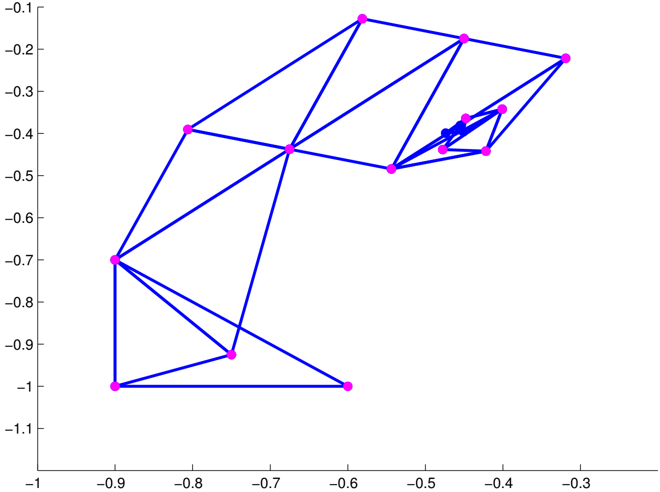
Esempio su Funzione di Broyden



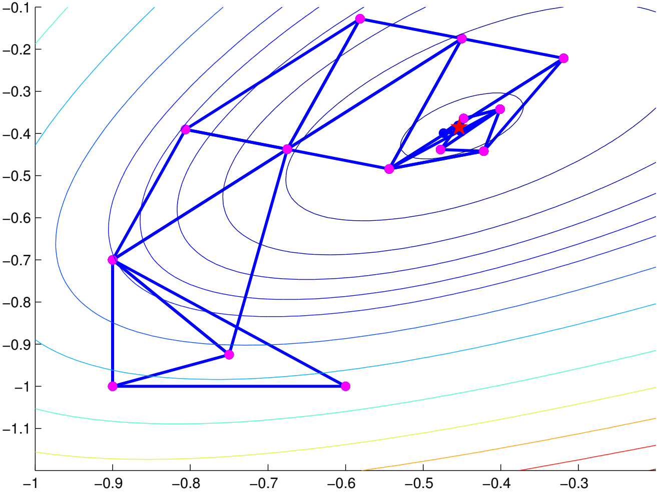
Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Esempio su Funzione di Broyden



Esercizio

Sia

$$\begin{aligned} X &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ F &= \left\{ \quad 3, \qquad 7, \qquad 1, \quad \right\} \end{aligned}$$

Il centroide $\bar{x}$ di x_1 e x_2 (dopo il riordino) è

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Il metodo considera i punti

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu d = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_3)$$

per valori $\mu = 1,\ 2,\ 1/2,\ -1/2$

Esercizio

Sia

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
F &= \{ \quad 1, \qquad 3, \qquad 7, \quad \}
\end{aligned}
$$

Il centroide $\bar{x}$ di x_1 e x_2 (dopo il riordino) è

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Il metodo considera i punti

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu d = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_3)$$

per valori $\mu = 1,\ 2,\ 1/2,\ -1/2$

Esercizio

Sia

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
F &= \{ \quad 1, \qquad 3, \qquad 7, \quad \}
\end{aligned}
$$

Il centroide $\bar{x}$ di x_1 e x_2 (dopo il riordino) è

$$
\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}
$$

Il metodo considera i punti

$$
x(\mu) = \bar{x} + \mu d = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_3)
$$

per valori $\mu = 1,\ 2,\ 1/2,\ -1/2$

Esercizio

Sia

$$
\begin{aligned}
X &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\
F &= \{ \quad 1, \qquad 3, \qquad 7, \quad \}
\end{aligned}
$$

Il centroide $\bar{x}$ di x_1 e x_2 (dopo il riordino) è

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Il metodo considera i punti

$$x(\mu) = \bar{x} + \mu d = \bar{x} + \mu(\bar{x} - x_3)$$

per valori $\mu = 1,\ 2,\ 1/2,\ -1/2$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Esercizio

- si calcola $d = \bar{x} - x_3 = (1,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_r = x(1) = \bar{x} + d = (2,\ 0)^\top$
- si calcola $x_e = x(2) = \bar{x} + 2d = (3,\ -1/2)^\top$
- si calcola $x_{oc} = x(1/2) = \bar{x} + 1/2d = (3/2,\ 1/4)^\top$
- si calcola $x_{ic} = x(-1/2) = \bar{x} - 1/2d = (1/2,\ 3/4)^\top$

Nelder&Mead

In $\mathbb{R}^2$ siano dati i seguenti punti:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

a cui corrispondono: $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 3$, $f(x_3) = 5$.

Determinare i punti x_r, x_e, x_{oc} e x_{ic} utilizzati nel metodo di Nelder&Mead

Nelder&Mead

In $\mathbb{R}^2$ siano dati i seguenti punti:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

a cui corrispondono: $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 3$, $f(x_3) = 5$.

Determinare i punti x_r, x_e, x_{oc} e x_{ic} utilizzati nel metodo di Nelder&Mead

È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

È un "buon" metodo?

La risposta è:

- generalmente **Si**
- però non ha proprietà di convergenza a punti stazionari
- esistono contro-esempi sui quali converge a punti **NON** stazionari
- p.es. la funzione di McKinnon

La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \leq 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

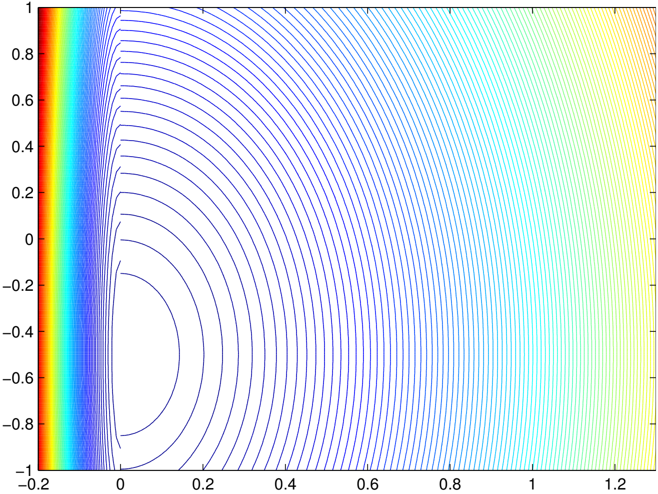
La funzione di McKinnon

$$f(x,y) = \begin{cases} \theta\phi|x|^\tau + y + y^2 & \text{se } x \le 0 \\ \theta x^\tau + y + y^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

- strettamente convessa per $\tau > 1$
- continuamente differenziabile per $\tau > 1$
- due volte cont. differenziabile per $\tau > 2$
- tre volte cont. differenziabile per $\tau > 3$

La funzione di McKinnon

Per $\tau = 2$, $\theta = 6$, $\phi = 60$, la funzione è

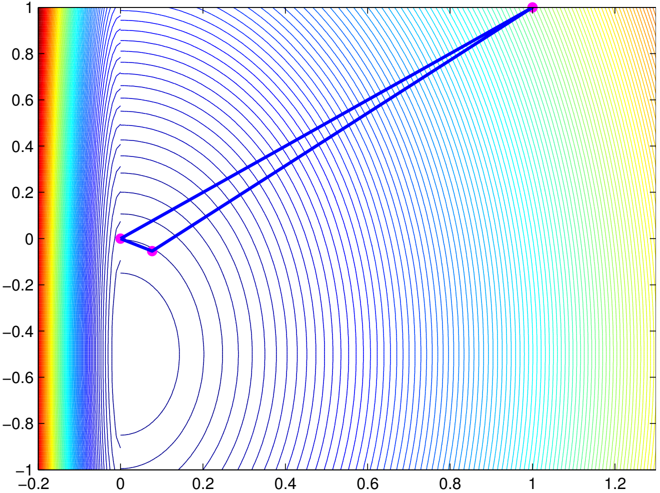


La funzione di McKinnon

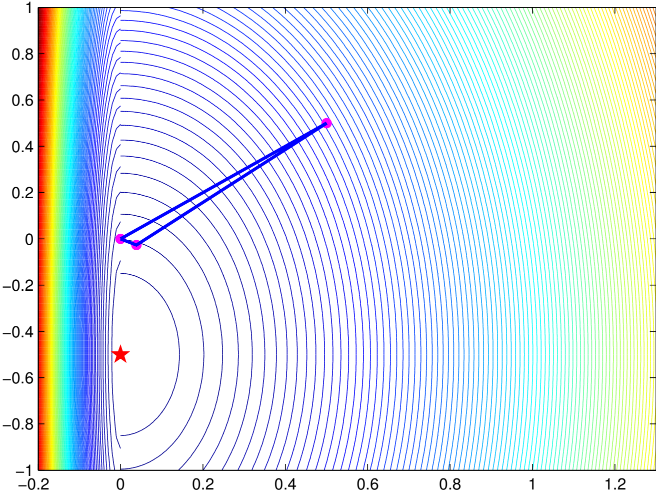
Se inizializziamo il metodo di Nelder-Mead con il simplesso

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{33}}{88} \\ \frac{1-\sqrt{33}}{88} \end{pmatrix}, \right\}$$

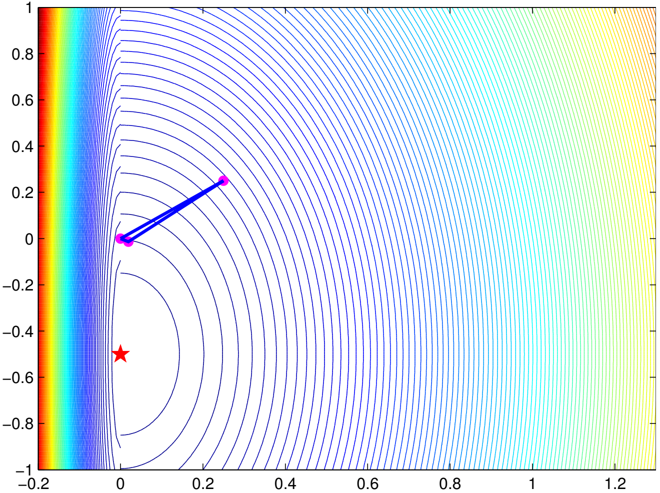
La funzione di McKinnon



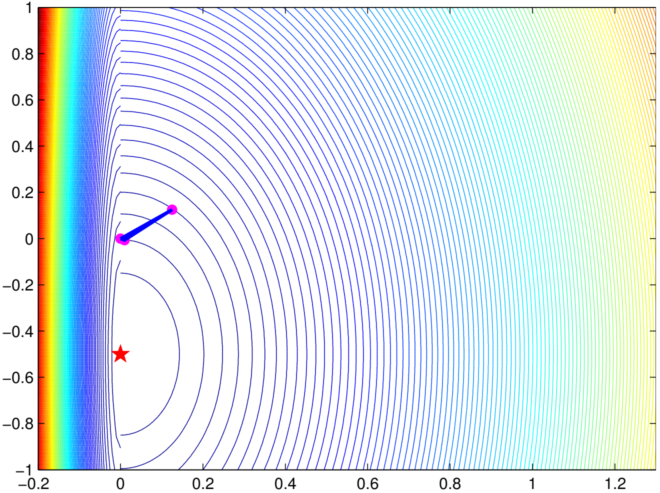
La funzione di McKinnon



La funzione di McKinnon



La funzione di McKinnon



Perchè...

- Compass Search “funziona” ?
- Hooke & Jeeves “funziona” ?
- Nelder & Mead “**non** funziona” (teoricamente) ?

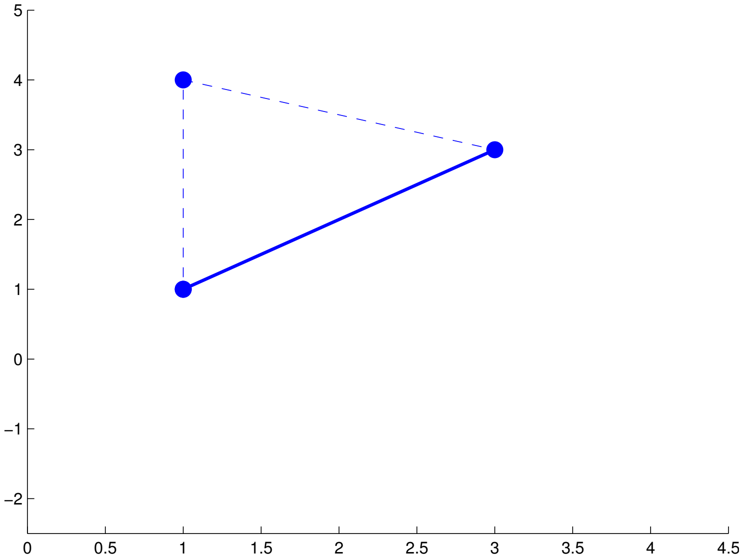
Cosa “davvero” distingue i primi due dal terzo ?

Perchè...

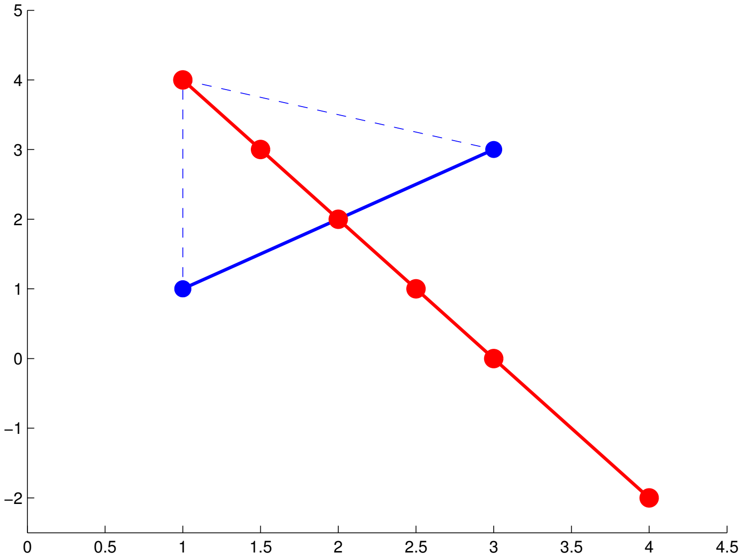
- Compass Search “funziona” ?
- Hooke & Jeeves “funziona” ?
- Nelder & Mead “**non** funziona” (teoricamente) ?

Cosa “davvero” distingue i primi due dal terzo ?

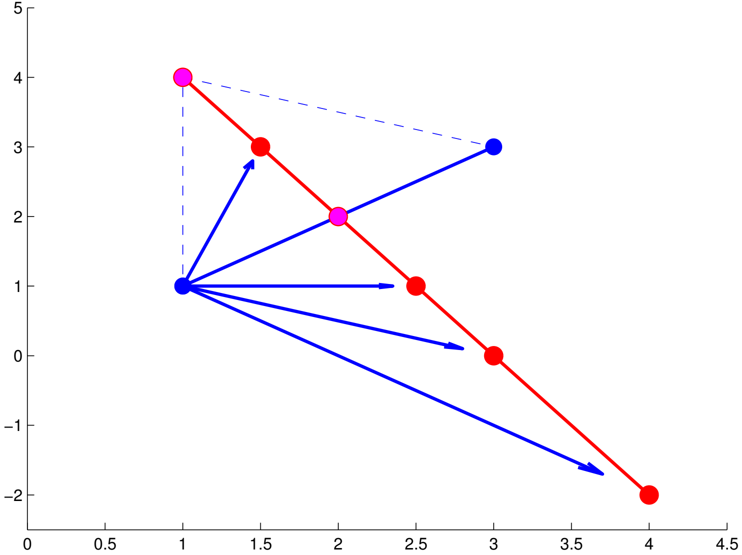
Perchè...



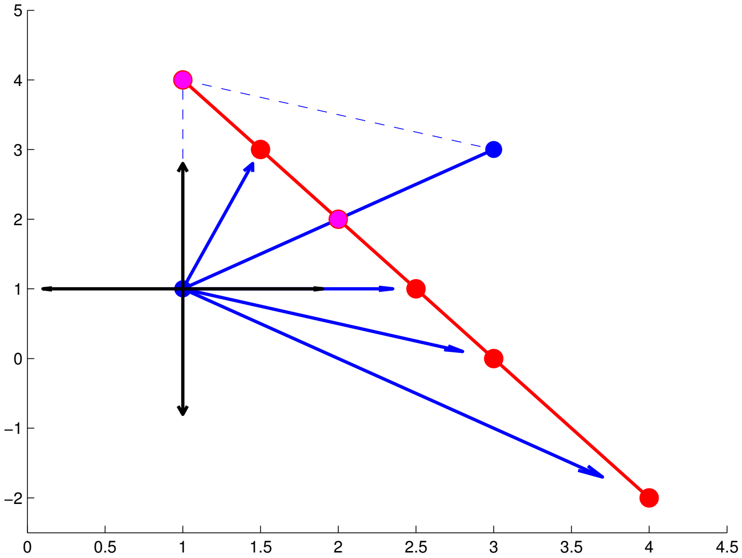
Perchè...



Perchè...



Perchè...



... e quindi ...

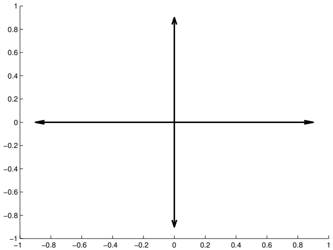
Quando $D = \{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_n\}$

$$\kappa(D) = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$

Comunque scelto un $v \in \mathbb{R}^n$, esiste $d \in D$ tale che

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \geq \kappa(D) > 0$$

Quando $v = -\nabla f(x) \neq 0$, esiste sempre una direzione $d \in D$ **di discesa**



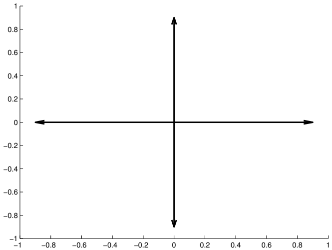
... e quindi ...

Quando $D = \{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n\}$

$$\kappa(D) = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$

Comunque scelto un $v \in \mathbb{R}^n$, esiste $d \in D$ tale che

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \geq \kappa(D) > 0$$



Quando $v = -\nabla f(x) \neq 0$, esiste sempre una direzione $d \in D$ **di discesa**

... e quindi ...

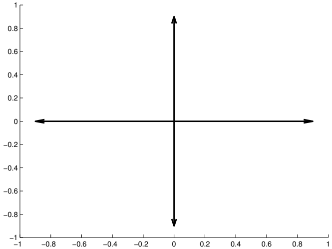
Quando $D = \{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_n\}$

$$\kappa(D) = \frac{1}{\sqrt{n}} > 0$$

Comunque scelto un $v \in \mathbb{R}^n$, esiste $d \in D$ tale che

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d,v) \geq \kappa(D) > 0$$

Quando $v = -\nabla f(x) \neq 0$, esiste sempre una direzione $d \in D$ **di discesa**



... e quindi ...

Quando $D = \{\text{vedi figura}\}$

$$\kappa(D) \leq 0$$

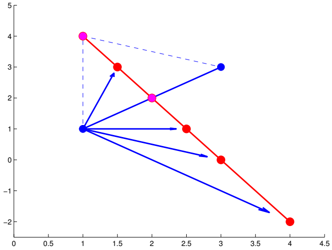
esistono $v \in \mathbb{R}^n$ tali che, per ogni $d \in D$, si ha

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \leq 0$$

Potrebbe capitare che $\nabla f(x) \neq 0$, e ogni $d \in D$ è tale che

$$-\nabla f(x)^\top d \leq 0$$

cioè **nessuna** dir. in D è **di discesa**



... e quindi ...

Quando $D = \{\text{vedi figura}\}$

$$\kappa(D) \leq 0$$

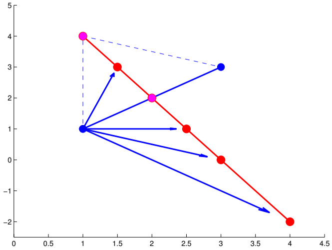
esistono $v \in \mathbb{R}^n$ tali che, per ogni $d \in D$, si ha

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d, v) \leq 0$$

Potrebbe capitare che $\nabla f(x) \neq 0$, e ogni $d \in D$ è tale che

$$-\nabla f(x)^\top d \leq 0$$

cioè **nessuna** dir. in D è **di discesa**



... e quindi ...

Quando $D = \{\text{vedi figura}\}$

$$\kappa(D) \leq 0$$

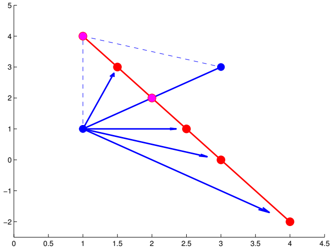
esistono $v \in \mathbb{R}^n$ tali che, per ogni $d \in D$, si ha

$$\frac{v^\top d}{\|v\|\|d\|} = \cos\theta(d,v) \leq 0$$

Potrebbe capitare che $\nabla f(x) \neq 0$, e ogni $d \in D$ è tale che

$$-\nabla f(x)^\top d \leq 0$$

cioè **nessuna** dir. in D è **di discesa**



... e quindi ...

per il metodo **compass search** che usa

- $D = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$,
- $\kappa(D) = 1/\sqrt(n) > 0$

quando il punto corrente **non** è stazionario $(\nabla f(x) \neq 0)$

- esiste sempre (almeno) una direzione $d \in D$ che è **di discesa**

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

- per passi Δ sufficientemente piccoli **deve accadere**

$$f(x + \Delta d) < f(x)$$

cioè il punto x corrente (se non-stazionario) prima o dopo viene aggiornato

... e quindi ...

per il metodo **compass search** che usa

- $D = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$,
- $\kappa(D) = 1/\sqrt(n) > 0$

quando il punto corrente **non** è stazionario $(\nabla f(x) \neq 0)$

- esiste sempre (almeno) una direzione $d \in D$ che è **di discesa**

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

- per passi Δ sufficientemente piccoli **deve accadere**

$$f(x + \Delta d) < f(x)$$

cioè il punto x corrente (se non-stazionario) prima o dopo viene aggiornato

... e quindi ...

per il metodo **compass search** che usa

- $D = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$,
- $\kappa(D) = 1/\sqrt(n) > 0$

quando il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- esiste sempre (almeno) una direzione $d \in D$ che è **di discesa**

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

- per passi Δ sufficientemente piccoli **deve accadere**

$$f(x + \Delta d) < f(x)$$

cioè il punto x corrente (se non-stazionario) prima o dopo viene aggiornato

... e quindi ...

per il metodo **compass search** che usa

- $D = \{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$,
- $\kappa(D) = 1/\sqrt(n) > 0$

quando il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- esiste sempre (almeno) una direzione $d \in D$ che è **di discesa**

$$\nabla f(x)^\top d < 0$$

- per passi Δ sufficientemente piccoli **deve accadere**

$$f(x + \Delta d) < f(x)$$

cioè il punto x corrente (se non-stazionario) prima o dopo viene aggiornato

... e quindi ...

per il metodo **Nelder&Mead** che usa

- D t.c. $\kappa(D) \leq 0$

anche se il punto corrente **non** è stazionario $(\nabla f(x) \neq 0)$

- le direzioni $d \in D$ potrebbero tendere a direzioni $\bar{d}$ che **non** sono di discesa

$$\nabla f(x)^\top \bar{d} \geq 0$$

- anche per spostamenti piccolissimi (i.e. punti in X vicinissimi) nessuno dei punti x_r, x_e, x_{oc}, x_{ic} migliora il valore $f(x)$

cioè il punto x corrente non-stazionario non viene **mai** aggiornato!!

... e quindi ...

per il metodo **Nelder&Mead** che usa

- D t.c. $\kappa(D) \leq 0$

anche se il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- le direzioni $d \in D$ potrebbero tendere a direzioni $\bar{d}$ che **non** sono di discesa

$$\nabla f(x)^\top \bar{d} \geq 0$$

- anche per spostamenti piccolissimi (i.e. punti in X vicinissimi) nessuno dei punti x_r, x_e, x_{oc}, x_{ic} migliora il valore $f(x)$

cioè il punto x corrente non-stazionario non viene **mai** aggiornato!!

... e quindi ...

per il metodo **Nelder&Mead** che usa

- D t.c. $\kappa(D) \leq 0$

anche se il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- le direzioni $d \in D$ potrebbero tendere a direzioni $\bar{d}$ che **non** sono di discesa
$$\nabla f(x)^\top \bar{d} \geq 0$$

- anche per spostamenti piccolissimi (i.e. punti in X vicinissimi) nessuno dei punti x_r, x_e, x_{oc}, x_{ic} migliora il valore $f(x)$

cioè il punto x corrente non-stazionario non viene **mai** aggiornato!!

... e quindi ...

per il metodo **Nelder&Mead** che usa

- D t.c. $\kappa(D) \leq 0$

anche se il punto corrente **non** è stazionario ($\nabla f(x) \neq 0$)

- le direzioni $d \in D$ potrebbero tendere a direzioni $\bar{d}$ che **non** sono di discesa
$$\nabla f(x)^\top \bar{d} \geq 0$$
- anche per spostamenti piccolissimi (i.e. punti in X vicinissimi) nessuno dei punti x_r, x_e, x_{oc}, x_{ic} migliora il valore $f(x)$

cioè il punto x corrente non-stazionario non viene **mai** aggiornato!!