

# Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi<sup>1</sup>

Venerdì 23 Marzo 2018

---

<sup>1</sup>Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR



# Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \quad f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0 \quad h: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 \quad g: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
 \end{array} \quad (P_0)$$

Sia  $\mathcal{F}$  l'insieme ammissibile di  $(P_0)$

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \leq 0
 \end{array}$$



# Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0 \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 \quad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
 \end{array} \quad (P_0)$$

Sia  $\mathcal{F}$  l'insieme ammissibile di  $(P_0)$

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \leq 0
 \end{array}$$



# Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0 \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 \quad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
 \end{array} \quad (P_0)$$

Sia  $\mathcal{F}$  l'insieme ammissibile di  $(P_0)$

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \leq 0
 \end{array}$$



# Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \quad f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0 \quad h : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^p \quad p \leq n \\
 & g(x) \leq 0 \quad g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m
 \end{array} \quad (P_0)$$

Sia  $\mathcal{F}$  l'insieme ammissibile di  $(P_0)$

Problema con soli vincoli di uguaglianza o disuguaglianza

$$\begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & h(x) = 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min_x & f(x) \\
 \text{c.v.} & g(x) \leq 0
 \end{array}$$



# Definizione di minimo

## Definizione (Minimo globale)

$x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo globale **stretto** quando

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{F}, x \neq x^*$$

## Definizione (Minimo locale)

$x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo locale quando, esiste un  $\epsilon > 0$  t.c.

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon)$$



# Definizione di minimo

## Definizione (Minimo globale)

$x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo globale **stretto** quando

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in \mathcal{F}, x \neq x^*$$

## Definizione (Minimo locale)

$x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo locale **stretto** quando, esiste un  $\epsilon > 0$  t.c.

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon), x \neq x^*$$



# Definizione di minimo

## Definizione (Minimo globale)

$x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo globale **stretto** quando

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in \mathcal{F}, x \neq x^*$$

## Definizione (Minimo locale)

$x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo locale **stretto** quando, esiste un  $\epsilon > 0$  t.c.

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon), x \neq x^*$$



# Definizione di minimo

## Definizione (Minimo globale)

$x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo globale **stretto** quando

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in \mathcal{F}, x \neq x^*$$

## Definizione (Minimo locale)

$x^* \in \mathcal{F}$  è un punto di minimo locale **stretto** quando, esiste un  $\epsilon > 0$  t.c.

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}(x^*, \epsilon), x \neq x^*$$



# Problemi vincolati

Sia  $x \in \mathbb{R}^n$ , definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$



# Problemi vincolati

Sia  $x \in \mathbb{R}^n$ , definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$



# Problemi vincolati

Sia  $x \in \mathbb{R}^n$ , definiamo

- $I_-(x) = \{i : g_i(x) < 0\}$
- $I_0(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$
- $I_+(x) = \{i : g_i(x) > 0\}$



# Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) = y_i, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$



# Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v} & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v} & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v} & g_i(x) = y_i, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$



## Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) = y_i, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$



# Problemi vincolati

Trasformazioni:

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & h(x) \leq 0 \\ & -h(x) \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) + y_i^2 = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \min_{x,y} & f(x) \\ \text{c.v.} & g_i(x) = y_i, \quad y_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \end{array}$$



# Preliminari

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (P)$$

## Definizione (Direzione di discesa)

$d \neq 0$  è una **direzione di discesa** per  $f$  in  $x$  quando  $\exists \bar{\alpha} > 0$  tale che

$$f(x + \alpha d) < f(x), \quad \text{per ogni } \alpha \in (0, \bar{\alpha}]$$

## Definizione (Direzione ammissibile)

$d \neq 0$  è una **direzione ammissibile** per  $\mathcal{F}$  in  $x \in \mathcal{F}$  quando  $\exists \bar{\alpha} > 0$  tale che

$$x + \alpha d \in \mathcal{F}, \quad \text{per ogni } \alpha \in (0, \bar{\alpha}]$$



# Condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (P)$$

Supponiamo di conoscere un punto di **minimo locale**  $x^*$  del problema  $(P)$

$$F(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è di discesa per } f \text{ in } x^*\}$$

$$G(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è ammissibile per } \mathcal{F} \text{ in } x^*\}$$

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$$



# Condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (P)$$

Supponiamo di conoscere un punto di **minimo locale**  $x^*$  del problema  $(P)$

$$\begin{aligned} F(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è di discesa per } f \text{ in } x^*\} \\ G(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è ammissibile per } \mathcal{F} \text{ in } x^*\} \end{aligned}$$

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$$



# Condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ \text{c.v.} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (P)$$

Supponiamo di conoscere un punto di **minimo locale**  $x^*$  del problema  $(P)$

$$\begin{aligned} F(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è di discesa per } f \text{ in } x^*\} \\ G(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : d \text{ è ammissibile per } \mathcal{F} \text{ in } x^*\} \end{aligned}$$

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$$



# Condizioni di ottimalità

Se  $f, g$  sono continuamente differenziabili, possiamo definire

$$F_0(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x^*)^\top d < 0\}$$

$$G_0(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)^\top d < 0, i \in I_0(x^*)\}$$

per cui risulta:  $F_0(x^*) \subseteq F(x^*)$  e  $G_0(x^*) \subseteq G(x^*)$  e quindi

Proposizione (C.N. di ottimo)

$$F_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \emptyset$$

cioè è **inammissibile** il sistema lineare di disequazioni

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)^\top d &< 0 \\ \nabla g_i(x^*)^\top d &< 0, \quad i \in I_0(x^*) \end{aligned}$$



# Condizioni di ottimalità

Se  $f, g$  sono continuamente differenziabili, possiamo definire

$$F_0(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x^*)^\top d < 0\}$$

$$G_0(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n : \nabla g_i(x^*)^\top d < 0, i \in I_0(x^*)\}$$

per cui risulta:  $F_0(x^*) \subseteq F(x^*)$  e  $G_0(x^*) \subseteq G(x^*)$  e quindi

**Proposizione (C.N. di ottimo)**

$$F_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \emptyset$$

cioè è **inammissibile** il sistema lineare di disequazioni

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*)^\top d &< 0 \\ \nabla g_i(x^*)^\top d &< 0, \quad i \in I_0(x^*) \end{aligned}$$



# Condizioni di ottimalità

Allora

## Teorema (Fritz-John, 1948)

*Esiste un numero  $\lambda_0^* \geq 0$  e dei moltiplicatori  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ , non tutti nulli, tali che:  $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$  e*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

## Definizione

*Un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  è un punto di FJ quando in  $\bar{x}$  risulta  $F_0(\bar{x}) \cap G_0(\bar{x}) = \emptyset$ .*

N.B. sono punti di FJ tutti i vettori  $x \in \mathcal{F}$  per cui risulta  $G_0(x) = \emptyset$ .



# Condizioni di ottimalità

Allora

## Teorema (Fritz-John, 1948)

*Esiste un numero  $\lambda_0^* \geq 0$  e dei moltiplicatori  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ , non tutti nulli, tali che:  $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ , per ogni  $i = 1, \dots, m$  e*

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

## Definizione

*Un punto  $\bar{x} \in \mathcal{F}$  è un punto di FJ quando in  $\bar{x}$  risulta  $F_0(\bar{x}) \cap G_0(\bar{x}) = \emptyset$ .*

N.B. sono punti di FJ tutti i vettori  $x \in \mathcal{F}$  per cui risulta  $G_0(x) = \emptyset$ .



# Condizioni di regolarità

## Definizione

Un punto  $x \in \mathcal{F}$  è **regolare** se  $G_0(x) \neq \emptyset$

Vale la seguente condizione sufficiente di regolarità.

## Proposizione

Condizione sufficiente affinché nel punto  $x \in \mathcal{F}$  risulti  $G_0(x) \neq \emptyset$  è che sia linearmente indipendente l'insieme  $\{\nabla g_i(x), i \in I_0(x)\}$



# Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- $f, g$  continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale**  $x^*$  del problema  $(P)$
- che  $x^*$  sia **regolare**

e.g.  $\{\nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*)\}$  lin. indep.

Allora

Teorema (Karush, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

*Esistono dei moltiplicatori  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$  tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$



# Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- $f, g$  continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale**  $x^*$  del problema  $(P)$
- che  $x^*$  sia **regolare**

e.g.  $\left\{ \nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*) \right\}$  lin. indep.

Allora

Teorema (Karush, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

*Esistono dei moltiplicatori  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$  tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$



# Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- $f, g$  continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale**  $x^*$  del problema  $(P)$
- che  $x^*$  sia **regolare**

e.g.  $\left\{ \nabla g_i(x^*), i \in I_0(x^*) \right\}$  lin. indep.

Allora

**Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)**

*Esistono dei moltiplicatori  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$  tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

