Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 5 Aprile 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Preliminari

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad (P)$$

Definizione (Direzione di discesa)

$d \neq 0$ *è una* **direzione di discesa** *per* f *in* x *quando* $\exists\ \bar{\alpha} > 0$ *tale che*

$$f(x + \alpha d) < f(x), \quad \textit{per ogni } \alpha \in (0, \bar{\alpha}]$$

Definizione (Direzione ammissibile)

$d \neq 0$ *è una* **direzione ammissibile** *per* $\mathcal{F}$ *in* $x \in \mathcal{F}$ *quando* $\exists\ \bar{\alpha} > 0$ *tale che*

$$x + \alpha d \in \mathcal{F}, \quad \textit{per ogni } \alpha \in (0, \bar{\alpha}]$$

Condizioni di ottimalità

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v. & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad (P)$$

Supponiamo di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)

$$\begin{array}{rcl} F(x^*) & = & \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \text{ è di discesa per } f \text{ in } x^*\} \\ G(x^*) & = & \{d \in \mathbb{R}^n : \ d \text{ è ammissibile per } \mathcal{F} \text{ in } x^*\} \end{array}$$

Proposizione (C.N. di ottimo)

$F(x^*) \cap G(x^*) = \emptyset$

Condizioni di ottimalità

Se f, g sono continuamente differenziabili, possiamo definire

$$\begin{aligned} F_0(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla f(x^*)^\top d < 0\} \\ G_0(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^n : \ \nabla g_i(x^*)^\top d < 0, i \in I_0(x^*)\} \end{aligned}$$

per cui risulta: $F_0(x^*) \subseteq F(x^*)$ e $G_0(x^*) \subseteq G(x^*)$ e quindi

Proposizione (C.N. di ottimo)

$F_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \emptyset$

cioè è **inammissibile** il sistema lineare di disequazioni

$$\begin{aligned} &\nabla f(x^*)^\top d < 0 \\ &\nabla g_i(x^*)^\top d < 0, \quad i \in I_0(x^*) \end{aligned}$$

Condizioni di ottimalità

Allora

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esiste un numero $\lambda_0^* \geq 0$ e dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, non tutti nulli, tali che: $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$, per ogni $i = 1, \dots, m$ e

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

Definizione

Un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ è un punto di FJ quando in $\bar{x}$ risulta $F_0(\bar{x}) \cap G_0(\bar{x}) = \emptyset$.

N.B. sono punti di FJ tutti i vettori $x \in \mathcal{F}$ per cui risulta $G_0(x) = \emptyset$.

Condizioni di regolarità

Definizione

Un punto $x \in \mathcal{F}$ *è* **regolare** *se* $G_0(x) \neq \emptyset$

Vale la seguente condizione sufficiente di regolarità.

Proposizione

Condizione sufficiente affinché nel punto $x \in \mathcal{F}$ *risulti* $G_0(x) \neq \emptyset$ *è che sia linearmente indipendente l'insieme* $\{\nabla g_i(x), i \in I_0(x)\}$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P)
- che x^* sia **regolare**

  e.g. $\left\{\nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*)\right\}$ lin. indip.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$ *tali che:*

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \ldots, m.$$

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v. & h(x) = 0 \end{array} \qquad (P)$$

supponiamo:

- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (**un solo** vincolo di uguaglianza)
- f, h continuamente differenziabili
- x^* minimo locale di (P) tale che $\nabla h(x^*) \neq \mathbf{0}$

Facciamo vedere che allora $\nabla f(x^*)$ e $\nabla h(x^*)$ devono essere collineari cioè, deve esistere $\sigma \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x^*) = \sigma \nabla h(x^*)$$

È banale se $\nabla f(x^*) = \mathbf{0}$, quindi supponiamo $\nabla f^* \neq \mathbf{0}$

Perchè $\nabla h(x^*) \neq \mathbf{0}$?

Consideriamo in $\mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$h(x, y) = y^2 - x^3$$

ed il punto $\bar{P} = (1,\ 1)^\top$. Risulta

$$h(\bar{P}) = 0 \quad e \quad \nabla h(\bar{P})^\top = (-3,\ 2)$$

Se vogliamo determinare quali vettori $d \in \mathbb{R}^2$ sono tangenti alla curva in $\bar{P}$, dobbiamo risolvere l'equazione

$$\nabla h(\bar{P})^\top d = -3d_x + 2d_y = 0$$

Tutti i vettori sulla retta di equazione $-3x + 2y = 0$ sono tangenti (quindi la retta è la tangente alla curva in $\bar{P}$)

Perchè $\nabla h(x^*) \neq \mathbf{0}$?

Cosa succede se al posto di $\bar{P}$ considerassimo il punto $\hat{P} = (0,\ 0)^\top$?

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza (segue)

Dalla definizione di minimo locale segue che esiste $\epsilon > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x^*),$$

per ogni $x \in \mathcal{B}(x^*;\epsilon) = \mathcal{B}$ e tale che $h(x) = 0$
La curva di livello $f(x) = f(x^*) = c$ ci permette di partzionare $\mathcal{B}$ in

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^+ &\equiv \{x \in \mathcal{B} : f(x) > c\} \\ \mathcal{B}^- &\equiv \{x \in \mathcal{B} : f(x) < c\} \end{aligned}$$

Se ∇f^* e ∇h^* (non nulli) non fossero collineari, allora la curva $h(x) = 0$ intersecherebbe la curva $f(x) = c$ in x^*.

Quindi esisterebbero punti x tali che $x \in \mathcal{B}^-$ e $h(x) = 0$. Per tali punti risulterebbe $f(x) < c = f(x^*)$ contraddicendo l'ipotesi che x^* è minimo locale di (P).

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza (segue)

x^* minimo locale t.c. $\nabla h(x^*) \neq 0$, allora:

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esiste un moltiplicatore μ^* tale che:

$$\nabla f(x^*) + \mu^* \nabla h(x^*) = 0,$$

x^* minimo locale, allora:

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esistono moltiplicatori $\lambda_0^* \geq 0$ e μ^* (non entrambi nulli) tale che:

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \mu^* \nabla h(x^*) = 0,$$

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v. & h(x) = 0 \end{array} \qquad (P)$$

supponiamo:

- $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $(1 \leq p < n)$
- f, h continuamente differenziabili
- x^* minimo locale di (P) tale che $\{\nabla h_i(x^*),\ i = 1, \dots, p\}$ lin.indipendenti

Facciamo vedere che allora $\nabla f(x^*)$ è combinazione lineare di $\nabla h_i(x^*),\ i = 1, \dots, p$.
Il caso $\nabla f(x^*) = 0$ è banale, quindi supponiamo $\nabla f(x^*) \neq 0$

Teorema (T1)

Teorema (M.R.Hestenes, 1975)

Siano $\bar{x}$ *e* d *tali che*

- $h(\bar{x}) = 0$;
- $\nabla h_i(\bar{x})$, $i = 1, \dots, p$ *lin. indipendenti;*
- $\nabla h_i(\bar{x})^\top d = 0$.

Allora, è possibile definire una curva $x(t) \in C^1$, $-\delta \leq t \leq \delta$, *tale che*

- $h(x(t)) = 0$;
- $x(0) = \bar{x}$;
- $\dot{x}(0) = d$.

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza (segue)

Per il fatto che $p < n$, segue che il sistema omogeneo

$$\nabla h_i(x^*)^\top d = 0, \ \ i = 1, \dots, p$$

(è sottodimensionato e) ammette (infinite) soluzioni $d \neq 0$.
Tali soluzioni sono i vettori "tangenti" alla superficie $h(x) = 0$ in x^*.
Il Teorema (T1), comunque scelta una soluzione d (tangente), esiste una curva $x(t) \in C^1$, $-\delta < t < \delta$ sulla superficie tale che

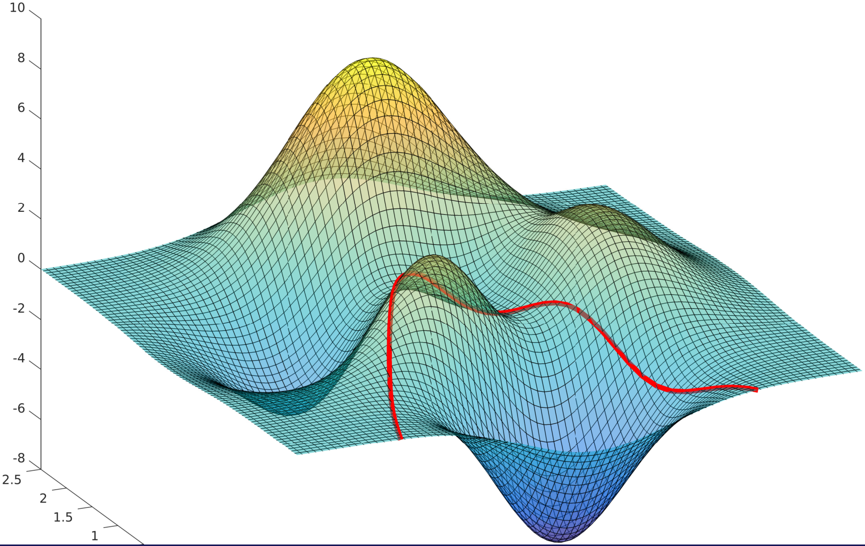
$$h(x(t)) = 0. \quad x(0) = x^*, \quad \dot{x}(0) = d$$

Lungo la curva $x(t)$ la funzione $f(x)$ diviene

$$\psi(t) = f(x(t))$$

con $\psi(0) = f(x^*)$ e $\psi'(0) = \nabla f(x^*)^\top \dot{x}(0) = \nabla f(x^*)^\top d$.

Figura



Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza (segue)

Dato che x^* è minimo locale, la funzione $\psi(t)$ deve anch'essa avere un minimo locale in $t = 0$ e quindi $\psi'(0) = 0$

$$\psi'(0) = \nabla f(x^*)^\top d = 0$$

Questo vuol dire che tutti i vettori d tangenti alla superficie $h(x) = 0$ in x^* sono anche ortogonali al gradiente di f in x^*

Quindi i due sistemi di equazioni lineari omogenei

$$\nabla h_i(x^*)^\top d = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad \text{e} \quad \begin{array}{l} \nabla h_i(x^*)^\top d = 0, \quad i = 1, \dots, p \\ \nabla f(x^*)^\top d = 0 \end{array}$$

devono avere lo stesso insieme di soluzioni. In altri termini, l'equazione $\nabla f(x^*)^\top d$ deve essere ridondante, cioè devono esistere numeri σ_i, $i = 1, \dots, p$ tali che

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^{p} \sigma_i \nabla h_i(x^*).$$

Condizioni di ottimalità – vinc. di uguaglianza (segue)

x^* minimo locale t.c. $\nabla h_i(x^*)$ lin. indipendenti, allora:

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono moltiplicatori μ_i^* tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0,$$

x^* minimo locale, allora:

Teorema (Fritz-John, 1948)

Esistono moltiplicatori $\lambda_0^* \geq 0$ e μ_i^* (non tutti nulli) tali che:

$$\lambda_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i^* \nabla h_i(x^*) = 0,$$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g, h continuamente differenziabili
- di conoscere un punto di **minimo locale** x^* del problema (P_0)
- che in x^* i vincoli siano **regolari**

e.g. $\left\{\nabla h_j(x^*),\ j = 1, \dots, p,\ \nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*)\right\}$ lin. indip.

Allora

Teorema (Kaursh, 1939, Kuhn-Tucker, 1951)

Esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \textit{per ogni } i = 1, \dots, m.$$

Esempio

$$\min_x \quad x_1 + x_2$$
$$c.v \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0$$

$$\min_x \quad x_1 + x_2$$
$$c.v \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0$$

$$\min_x \quad x_1 + x_2$$
$$c.v \quad x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0$$

$$\min_x \quad x_1 + x_2$$
$$c.v \quad x_2 - x_1^3 \leq 0, \;\; x_2 \geq 0$$