Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Venerdì 6 Aprile 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Condizione Necessaria del II ordine

Supponiamo:

- x^* minimo locale
- f, g, h **due volte** continuamente differenziabili
- x^*, λ^*, μ^* soddisfano KKT

Teorema (C.N. II ordine)

Se $d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0$, *per ogni* $d \in Y^*$,

$$
\begin{aligned}
Y^* = \Big\{ d \in \mathbb{R}^n : \nabla h_j(x^*)^\top d = 0, j = 1, \dots, p \\
\nabla g_i(x^*)^\top d = 0,\ i \in I_0(x^*), \lambda_i^* > 0, \\
\nabla g_i(x^*)^\top d \geq 0,\ i \in I_0(x^*), \lambda_i^* = 0 \Big\}
\end{aligned}
$$

Condizione Necessaria del II ordine

Supponiamo:

- x^* minimo locale
- f, g, h **due volte** continuamente differenziabili
- x^*, λ^*, μ^* soddisfano KKT

Teorema (C.N. II ordine)

Se $d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d \geq 0$, *per ogni* $d \in Y^*$,

$$
\begin{aligned}
Y^* \;=\; \Big\{ d \in \mathbb{R}^n : & \nabla h_j(x^*)^\top d = 0, j = 1, \dots, p \\
& \nabla g_i(x^*)^\top d = 0,\; i \in I_0(x^*), \lambda_i^* > 0, \\
& \nabla g_i(x^*)^\top d \geq 0,\; i \in I_0(x^*), \lambda_i^* = 0 \Big\}
\end{aligned}
$$

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g differenziabili e **convesse**
- h **affini**, e.g. $h_j(x) = a^\top x - b = 0$

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $x^* \in \mathcal{F}$ e esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, m,$$

allora x^* è un minimo locale (globale) di (P_0)

Condizioni di ottimalità

Supponiamo:

- f, g differenziabili e **convesse**
- h **affini**, e.g. $h_j(x) = a^\top x - b = 0$

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $x^* \in \mathcal{F}$ e esistono dei moltiplicatori $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \geq 0$, $\mu_1^*, \ldots, \mu_p^*$ tali che:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{r} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, \quad \text{per ogni } i = 1, \ldots, m,$$

allora x^* è un minimo locale (globale) di (P_0)

Funzione Lagrangiana

Per il problema (P_0), definiamo la funzione Lagrangiana

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \\ &= f(x) + \lambda^\top g(x) + \mu^\top h(x) \end{aligned}$$

Condizioni di ottimalità

Ci sono condizioni sufficienti di ottimo nel caso **non convesso**?
Supponiamo:

- f, g, h **due volte** continuamente differenziabili
- x^*, λ^*, μ^* soddisfano KKT

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$, per ogni $d \in Y^*$, $d \neq 0$

$$
\begin{aligned}
Y^* \; = \; \Big\{ d \in \mathbb{R}^n : \nabla h_j(x^*)^\top d = 0, j = 1, \dots, p \\
\nabla g_i(x^*)^\top d = 0, \; i \in I_0(x^*), \lambda_i^* > 0, \\
\nabla g_i(x^*)^\top d \geq 0, \; i \in I_0(x^*), \lambda_i^* = 0 \Big\}
\end{aligned}
$$

allora x^* è un minimo locale stretto di (P_0)

Condizioni di ottimalità

Ci sono condizioni sufficienti di ottimo nel caso **non convesso**?
Supponiamo:

- f, g, h **due volte** continuamente differenziabili
- x^*, λ^*, μ^* soddisfano KKT

Teorema (Condizione Sufficiente)

Se $d^\top \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$, *per ogni* $d \in Y^*$, $d \neq 0$

$$
\begin{aligned}
Y^* \quad = \quad \Big\{ d \in \mathbb{R}^n : \nabla h_j(x^*)^\top d = 0, j = 1, \dots, p \\
\nabla g_i(x^*)^\top d = 0,\ i \in I_0(x^*), \lambda_i^* > 0, \\
\nabla g_i(x^*)^\top d \geq 0,\ i \in I_0(x^*), \lambda_i^* = 0 \Big\}
\end{aligned}
$$

allora x^* *è un minimo locale stretto di* (P_0)

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_x & -0.1(x_1 - 4)^2 + x_2^2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

Esempio

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & x_1 + x_2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 2 \leq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & -0.1(x_1 - 4)^2 + x_2^2 \\ c.v & x_1^2 + x_2^2 - 1 \geq 0 \end{array}$$

Problemi vincolati

Problema vincolato nonlineare generale

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x} & f(x) \\ c.v & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array} \qquad (P_0)$$

con $\mathcal{F}$ insieme ammissibile di (P_0)

Definizione

Teoricamente è possibile definire

$$q_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ +\infty & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\infty(x) = f(x) + q_\infty(x)$$

È evidente che:

- risolvere il problema $\min\ P_\infty(x)$ fornisce soluzioni del problema (P_0).
- minimizzare $P_\infty(x)$ è (o può essere) molto "complicato"

Definizione

Teoricamente è possibile definire

$$q_\infty(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ +\infty & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\infty(x) = f(x) + q_\infty(x)$$

È evidente che:

- risolvere il problema $\min\ P_\infty(x)$ fornisce soluzioni del problema (P_0).
- minimizzare $P_\infty(x)$ è (o può essere) molto "complicato"

Definizione

Anziché $q_\infty(x)$, definiamo

$$q(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathcal{F} \\ > 0 & \text{se } x \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

e quindi

$$P_\epsilon(x) = f(x) + \frac{1}{\epsilon} q(x)$$

N.B.:

- se $f(x)$ e $q(x)$ sono cont. differenziabili, allora anche $P_\epsilon(x)$ lo è
- per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{\epsilon \to 0} P_\epsilon(x) = P_\infty(x)$

Espressione di q(x)

Il termine $q(x)$ deve “penalizzare con continuità” l’eventuale inammissibilità di x

P.es., con riferimento a (P_0),

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} [h_i(x)]^2 + \sum_{i=1}^{m} [\max\{0, g_i(x)\}]^2$$

- per nessun valore di $\epsilon > 0$, min $P_\epsilon(x)$ è equivalente a (P_0)
- per ogni valore di $\epsilon > 0$, una min. non vincolata di $P_\epsilon(x)$ produce (in genere) un punto $x^* \notin \mathcal{F}$, cioè $q(x^*) > 0$

Algoritmo di soluzione

Algoritmo `SEQPEN`

INPUT: `maxit`, $\tau > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots,$ `maxit`

Trova una soluzione $(x(\epsilon_k))$ del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x). \tag{2}$$

if $q(x(\epsilon_k)) \leq \tau$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x(\epsilon_k)$

Proprietà di monotonicità

Teorema

Siano soddisfatte le ipotesi seguenti:

- *esiste* $x^* \in \mathcal{F}$ *soluzione globale del problema vincolato;*
- *per ogni* k*, la funzione* $P_{\epsilon_k}(x)$ *ammette minimo globale* x^k.

Allora,

1. $P_{\epsilon_k}(x_k) \leq f(x^*)$;
2. $q(x^k) \geq q(x^{k+1})$;
3. $f(x^k) \leq f(x^{k+1})$;
4. $P_{\epsilon_k}(x^k) \leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1})$.

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \le \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\le P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\le P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\le f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\le f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\le f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\le -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) + q(x)/\epsilon_k = \min_{x \in \mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim.

Dim.

$$P_{\epsilon_k}(x^k) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)+q(x)/\epsilon_k \leq \min_{x\in\mathcal{F}} f(x)+q(x)/\epsilon_k = \min_{x\in\mathcal{F}} f(x) = f(x^*).$$

che prova la (1).

$$\begin{aligned} P_{\epsilon_k}(x^k) &\leq P_{\epsilon_k}(x^{k+1}) \\ P_{\epsilon_{k+1}}(x^{k+1}) &\leq P_{\epsilon_{k+1}}(x^k) \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} &\leq f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k &\leq f(x^{k+1}) + q(x^{k+1})/\epsilon_k \\ -f(x^k) - q(x^k)/\epsilon_{k+1} &\leq -f(x^{k+1}) - q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1} \end{aligned}$$

Proprietà di monotonicità – dim. (segue)

da cui segue

$$q(x^k)(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1}) \leq q(x^{k+1})(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1})$$

tenendo conto del fatto che $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$

$$q(x^{k+1}) \leq q(x^k)$$

che prova la (2). Ora, ricordando che

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \leq (q(x^{k+1}) - q(x^k))/\epsilon_k \leq 0$$

che prova la (3). La (4) segue da

$$f(x^k)+q(x^k)/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1}$$

ricordando che $\epsilon_k > \epsilon_{k+1}$. $\square$

Proprietà di monotonicità – dim. (segue)

da cui segue

$$q(x^k)(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1}) \leq q(x^{k+1})(1/\epsilon_k - 1/\epsilon_{k+1})$$

tenendo conto del fatto che $\epsilon_{k+1} < \epsilon_k$

$$q(x^{k+1}) \leq q(x^k)$$

che prova la (2). Ora, ricordando che

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \leq (q(x^{k+1}) - q(x^k))/\epsilon_k \leq 0$$

che prova la (3). La (4) segue da

$$f(x^k)+q(x^k)/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_k \leq f(x^{k+1})+q(x^{k+1})/\epsilon_{k+1}$$

ricordando che $\epsilon_k > \epsilon_{k+1}$. $\square$

Proprietà di convergenza

Teorema

Siano soddisfatte le ipotesi seguenti:

- *esiste* $x^* \in \mathcal{F}$ *soluzione globale del problema vincolato;*
- *per ogni* k*, la funzione* $P_{\epsilon_k}(x)$ *ammette minimo globale* x^k*;*
- *tutti i punti* x^k *rimangono in un insieme compatto* D*.*

Allora,

1. $\lim_{k\to\infty} q(x^k) = 0$;
2. $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(x^*)$;
3. $\lim_{k\to\infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^*)$;
4. *ogni punto di accumulazione di* $\{x^k\}$ *è soluzione globale del problema vincolato;*
5. $\lim_{k\to\infty} q(x^k)\epsilon_k = 0$;

Proprietà di convergenza – dim.

Dim. Sappiamo che

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \geq f(x^0) + q(x^k)/\epsilon_k$$

ovvero

$$f(x^*) - f(x^0) \geq q(x^k)/\epsilon_k.$$

Quando $k \to \infty$, deve risultare

$$\lim_{k\to\infty} q(x^k) = 0$$

(altrimenti si avrebbe un assurdo) il che prova la (1).
Sia ora $\bar{x}$ un qualunque punto di accumulazione di $\{x^k\} \subset D$ compatto. Risulta intanto che $q(\bar{x}) = 0$, cioè che $\bar{x} \in \mathcal{F}$.

Proprietà di convergenza – dim.

Dim. Sappiamo che

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \geq f(x^0) + q(x^k)/\epsilon_k$$

ovvero

$$f(x^*) - f(x^0) \geq q(x^k)/\epsilon_k.$$

Quando $k \to \infty$, deve risultare

$$\lim_{k\to\infty} q(x^k) = 0$$

(altrimenti si avrebbe un assurdo) il che prova la (1).

Sia ora $\bar{x}$ un qualunque punto di accumulazione di $\{x^k\} \subset D$ compatto. Risulta intanto che $q(\bar{x}) = 0$, cioè che $\bar{x} \in \mathcal{F}$.

Proprietà di convergenza – dim.

Dim. Sappiamo che

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) = f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k \geq f(x^0) + q(x^k)/\epsilon_k$$

ovvero

$$f(x^*) - f(x^0) \geq q(x^k)/\epsilon_k.$$

Quando $k \to \infty$, deve risultare

$$\lim_{k\to\infty} q(x^k) = 0$$

(altrimenti si avrebbe un assurdo) il che prova la (1).
Sia ora $\bar{x}$ un qualunque punto di accumulazione di $\{x^k\} \subset D$ compatto. Risulta intanto che $q(\bar{x}) = 0$, cioè che $\bar{x} \in \mathcal{F}$.

Proprietà di convergenza – dim. (segue)

$$f(x^*) \geq P_{\epsilon_k}(x^k) \geq f(x^k)$$

Quindi, le successioni $\{P_{\epsilon_k}(x^k)\}$ e $\{f(x^k)\}$ sono monotone non decrescenti e limitate superiormente, quindi ammettono limite.

$$f(x^*) \geq \lim_{k\to\infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = \lim_{k\to\infty} f(x^k) + q(x^k)/\epsilon_k$$

$$f(x^*) \geq \lim_{k\to\infty} P_{\epsilon_k}(x^k) = f(\bar{x}) + \lim_{k\to\infty} q(x^k)/\epsilon_k \geq f(\bar{x}) \geq f(x^*).$$

Da qui segue che valgono (2) e (3). Inoltre, che $f(\bar{x}) = f(x^*)$, cioè che $\bar{x}$ è soluzione globale del problema vincolato e inoltre che vale la (5). $\square$

Esempio 1

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \; x^2$$
$$x \geq 1$$

Ammete $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = x^2 + \frac{1}{\epsilon} \max\{0, 1 - x\}^2$$

Esempio 1

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\min \; x^2$$
$$x \geq 1$$

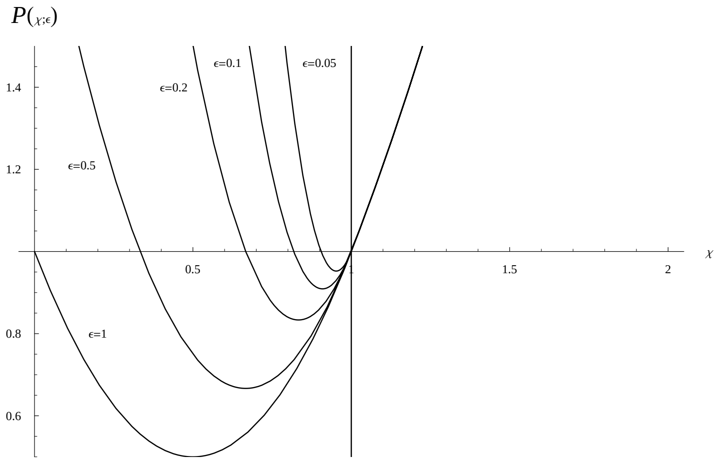
Ammete $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = x^2 + \frac{1}{\epsilon} \max\{0, 1 - x\}^2$$

Esempio 1

Grafici di $P_\epsilon(x)$ $(\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05)$



Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\begin{array}{c} \min\ -x^4 \\ x = 1 \end{array}$$

Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Esempio 2

Consideriamo il seguente problema vincolato (banale)

$$\begin{gathered} \min \; -x^4 \\ x = 1 \end{gathered}$$

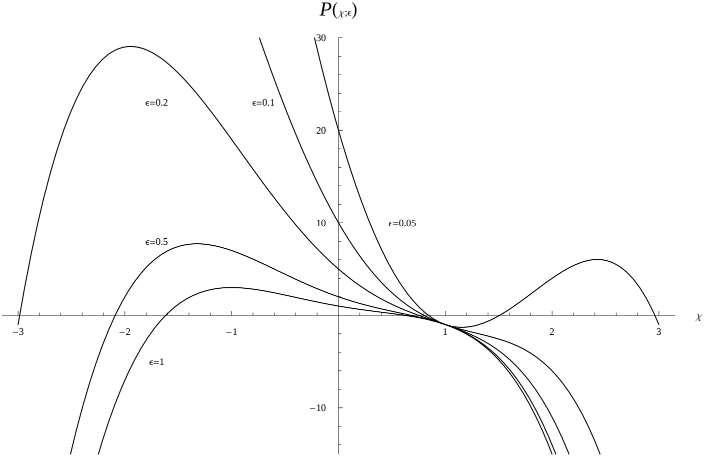
Ammete (ovviamente) $x^* = 1$ come **unico** punto di minimo globale

La funzione di penalità esterna è:

$$P_\epsilon(x) = -x^4 + \frac{1}{\epsilon}(x-1)^2$$

Esempio 2

Grafici di $P_\epsilon(x)$ $(\epsilon = 1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.05)$



Algoritmo SEQPEN

Algoritmo `SEQPEN`

INPUT: `maxit`, $\tau > 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots,$ `maxit`

Trova una soluzione globale (x^k) del problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} P_{\epsilon_k}(x). \tag{3}$$

if $q(x^k) \le \tau$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Algoritmo SEQPEN

L'algoritmo che abbiamo visto:

- ad ogni passo richiede di risolvere all'ottimo **gloable**

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; P_\epsilon(x);$$

- è (o può essere) **molto costoso**;
- non sempre è possibile;
- gli algoritmi di min. non vincolata determinano $\hat{x}$ t.c.

$$\|\nabla P_\epsilon(\hat{x})\| \leq \texttt{tol}.$$

Algoritmo SEQPEN modificato (1)

Algoritmo $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: $\texttt{maxit}$, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots, \texttt{maxit}$

Calcola x^k t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x^k)\| \leq \rho$

if $q(x^k) \leq \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k / 2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Algoritmo SEQPEN modificato (1)

Algoritmo $\texttt{SEQPEN}_{mod}$

INPUT: $\texttt{maxit}$, $\{\tau_k\} \to 0$, $\rho > 0$, $k = 0$, $\epsilon_0 > 0$

for $k = 0, 1, \ldots, \texttt{maxit}$

Calcola x^k t.c. $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x^k)\| \leq \tau_k$

if $\tau_k < \rho$ **and** $q(x^k) \leq \rho$ **then** STOP

$\epsilon_{k+1} = \epsilon_k/2$

endfor

OUTPUT: una sol. approssimata $x^* = x^k$

Proprietà di convergenza

Teorema

Sia $\{x_k\}$ *una successione t.c.* $\|\nabla P_{\epsilon_k}(x_k)\| \leq \tau_k$ *e* $\{x_k\}_K$ *una sottosucc. convergente ad* x^* *t.c. siano lin. indipendenti*

$$\nabla g_i(x^*),\ i \in I_0(x^*),\ \nabla h_j(x^*),\ \forall\, j.$$

Allora, x^* *è un punto di KKT di* (P_0) *con molt.* λ^* *e* μ^* *t.c.*

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}\max\{g(x_k),0\}\right\}_K \to \lambda^*$$

$$\left\{\frac{2}{\epsilon_k}h(x_k)\right\}_K \to \mu^*$$