Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 10 Maggio 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Introduzione

Cominciamo con il considerare il problema multiobiettivo

$$\min_x \; f(x)$$
$$s.t. \; x \in \mathcal{F}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^\top$, f_i cont. differenziabili
- $\mathcal{F} = \{x \in \Re^n : \; \ell \leq x \leq u\}$
- $-\infty < \ell_i < u_i < +\infty$, $i = 1, \dots, n$

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{aligned} C(x) &= \{d \in \Re^n : \; d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F(x) &= \{d \in \Re^n : \; d \neq 0, f(x + \beta d) \leq_P f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \end{aligned}$$

Condizione necessaria di ottimo (1)

Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale) di Pareto, allora $C(x) \cap F(x) = \emptyset$,

cioè, se x è ottimo, non possono esistere direzioni d contemporaneamente ammissibili e di discesa

Condizione necessaria di ottimo (2)

Risulta che

$$F_0(x) = \{d \in \Re^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x)$$

inoltre, dalla convessità di $\mathcal{F}$ segue che

$$C(x) = \{d : \ d = y - x, y \in \mathcal{F}, y \neq x\}$$

Quindi, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $C(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

ovvero,

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ovvero

$$\nexists y \in \mathcal{F} \quad \text{t.c. } \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) < 0$$

ovvero

$$\forall \ y \in \mathcal{F}, \ \exists \ j \in \{1, \dots, k\} : \nabla f_j(x)^\top (y - x) \geq 0$$

Condizione necessaria di ottimo (3)

Dato $x \in \mathcal{F}$, definiamo

$$
\begin{aligned}
\theta(x) &= \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x) \ \leq 0 \\
y(x) &= \arg\min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x)
\end{aligned}
$$

- Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora $\theta(x) = 0$
- Viceversa, se $\theta(x) < 0$ allora x non può essere ottimo (locale) in quanto la direzione $y(x) - x$ è contemporaneamente ammissibile e di discesa

C.N. di ottimo secondo Pareto

Proposizione

Sia x^* ottimo di Pareto, allora

$$0 = \theta(x) = \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\dots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x)$$

C.N. di ottimo debole secondo Pareto

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{aligned} C(x) &= \{d \in \Re^n : \; d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F_d(x) &= \{d \in \Re^n : \; d \neq 0, f(x + \beta d) < f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\}. \end{aligned}$$

Risulta ancora

$$F_0(x) = \{d \in \Re^n : \; \nabla f_i(x)^\top d < 0, i = 1, \ldots, k\} \subseteq F_d(x)$$

Quindi

Proposizione

Sia x^* ottimo debole di Pareto, allora

$$0 = \theta(x) = \min_{y \in \mathcal{F}} \max_{i=1,\ldots,k} \nabla f_i(x)^\top (y - x)$$

Introduzione

Dato il problema multiobiettivo

$$\min_{x} \; f(x)$$
$$s.t. \; x \in \mathcal{F} = \{x \in \Re^n : \; g(x) \leq 0\}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))^\top$, f_i cont. differenziabili
- $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))^\top$, g_j cont. differenziabili

Introduciamo la funzione Lagrangiana del problema

$$L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x)$$

percui:

$$\nabla_x L(x, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \nabla f_i(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \nabla g_j(x)$$

C.N. di Fritz-John (1)

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{aligned} C(x) &= \{d \in \Re^n : \ d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F(x) &= \{d \in \Re^n : \ d \neq 0, f(x + \beta d) \leq_P f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \end{aligned}$$

Anche in questo caso, se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale) di Pareto, allora $C(x) \cap F(x) = \emptyset$

Ora definiamo

$$\begin{aligned} C_0(x) &= \{d \in \Re^n : \ \nabla g_i(x)^\top d < 0, \ i \in I_0(x)\} \subseteq C(x) \\ F_0(x) &= \{d \in \Re^n : \ \nabla f_i(x)^\top d < 0, \ i = 1, \dots, k\} \subseteq F(x) \end{aligned}$$

Se $x \in \mathcal{F}$ è ottimo (locale), allora (a maggior ragione) risulta $C_0(x) \cap F_0(x) = \emptyset$

C.N. di Fritz-John (2)

Teorema

Condizione necessaria affinché un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori $\lambda \in \Re^k$, $\mu \in \Re^m$ tali che:

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$
$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$
$$(\lambda, \mu) \geq 0, \ (\lambda, \mu) \neq 0$$

N.B. nell'enunciato delle teorema nulla vieta che possano essere identicamente nulli i moltiplicatori λ_i associati alle funzioni obiettivo.

Se assumiamo che $\bar{x}$ oltre ad essere un ottimo secondo Pareto è anche un **punto regolare** per i vincoli, allora è possibile asserire che almeno uno dei moltiplicatori λ_i è strettamente positivo

C.N. di Karush-Kuhn-Tucker

Teorema

Sia $\bar{x} \in \mathcal{F}$ *un punto in cui sono* lin. indipendenti i gradienti dei vincoli attivi. *Condizione necessaria affinché* $\bar{x}$ *sia ottimo secondo Pareto è che esistano dei vettori* $\lambda \in \Re^k$, $\mu \in \Re^m$ *tali che:*

$$\nabla_x L(\bar{x}, \lambda, \mu) = 0$$
$$\mu^\top g(\bar{x}) = 0$$
$$(\lambda, \mu) \geq 0, \;\; \lambda \neq 0$$

C.N. di ottimo debole di Pareto

Dato $x \in \mathcal{F}$ definiamo

$$\begin{aligned} C(x) &= \{d \in \Re^n : \; d \neq 0, x + \beta d \in \mathcal{F}, \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \\ F_d(x) &= \{d \in \Re^n : \; d \neq 0, f(x + \beta d) < f(x), \forall \beta \in (0, \alpha], \alpha > 0\} \end{aligned}$$

Risulta ancora

$$\begin{aligned} C_0(x) &= \{d \in \Re^n : \; \nabla g_i(x)^\top d < 0, \; i \in I_0(x)\} \subseteq C(x) \\ F_0(x) &= \{d \in \Re^n : \; \nabla f_i(x)^\top d < 0, \; i = 1, \ldots, k\} \subseteq F_d(x) \end{aligned}$$

Quindi, le C.N. di FJ e di KKT appena viste sono necessarie anche per l'ottimalità debole di Pareto

Problema multiobiettivo convesso

Dato il problema multiobiettivo

$$\begin{array}{l} \min\limits_{x} \; f(x) \\ s.t.\; x \in \mathcal{F} = \{x \in \Re^n : \; g(x) \leq 0\} \end{array}$$

con

- $f(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x))^\top$, f_i cont. differenziabili e convesse
- $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))^\top$, g_j cont. differenziabili e convesse

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Supponiamo

- di aver determinato un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$
- dei moltiplicatori $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

e supponiamo (per assurdo) che $\bar{x}$ non sia un ottimo di Pareto del problema.

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Sfruttando i moltiplicatori (noti) $\bar{\lambda} > 0$ costruiamo la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

$F(x)$ è combinazione con coeff. positivi di funzioni convesse ed è pertanto convessa.
Quindi, il problema

$$\begin{aligned} &\min \; F(x) \\ &s.t. \; g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

è un problema convesso.
Il punto $\bar{x}$, con i moltiplicatori $\bar{\mu}$, soddisfa le condizioni sufficienti di ottimo ed è quindi ottimo globale del problema.

Condizione sufficiente di ottimo di Pareto

Se $\bar{x}$ non fosse ottimo di Pareto del prob. multiobiettivo, allora dovrebbe esistere un altro punto $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ tale che $f(\tilde{x}) \leq_P f(\bar{x})$.

Quindi, risulterebbe anche $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$, contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è ottimo globale del problema singolo obiettivo

Proposizione

C.S. affinché $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\bar{\lambda} > 0$ e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\begin{aligned} &\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0 \\ &\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0 \end{aligned}$$

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Supponiamo

- di aver determinato un punto $\bar{x} \in \mathcal{F}$
- dei moltiplicatori $\bar{\lambda} \geq 0$ (non tutti nullil) e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

e supponiamo (per assurdo) che $\bar{x}$ non sia un ottimo debole di Pareto del problema.

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Sfruttando i moltiplicatori (noti) $\bar{\lambda} \geq 0$ costruiamo la funzione

$$F(x) = \sum_{i=1}^{k} \bar{\lambda}_i f_i(x).$$

$F(x)$ è combinazione con coeff. positivi di funzioni convesse ed è pertanto convessa.
Quindi, il problema

$$\begin{array}{l} \min \; F(x) \\ s.t. \; g(x) \leq 0 \end{array}$$

è un problema convesso.
Il punto $\bar{x}$, con i moltiplicatori $\bar{\mu}$, soddisfa le condizioni sufficienti di ottimo ed è quindi ottimo globale del problema.

Condizione sufficiente di ottimo debole di Pareto

Se $\bar{x}$ non fosse ottimo debole di Pareto del prob. multiobiettivo, allora dovrebbe esistere un altro punto $\tilde{x} \in \mathcal{F}$ tale che $f(\tilde{x}) < f(\bar{x})$.

Quindi, risulterebbe anche $F(\tilde{x}) < F(\bar{x})$, contraddicendo il fatto che $\bar{x}$ è ottimo globale del problema singolo obiettivo

Proposizione

C.S. affinché $\bar{x} \in \mathcal{F}$ sia ottimo debole di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\bar{\lambda} \geq 0$ (non tutti nulli) e $\bar{\mu} \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$$
$$\bar{\mu}^\top g(\bar{x}) = 0$$

Condizione necessaria e sufficiente di ottimo debole di Pareto

Proposizione

C.N.S. affinché $x^* \in \mathcal{F}$ sia ottimo debole di Pareto per il problema multiobiettivo è che esistano moltiplicatori $\lambda^* \geq 0$ (non tutti nulli) e $\mu^* \geq 0$ tali che

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$
$$g(x^*)^\top \mu^* = 0$$