Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi[1]

Giovedì 17 Maggio 2018

[1] Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Il problema

Dati:

- $\mu \in \mathbb{R}^n$: vettore di rendimenti attesi
- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$: matrice di covarianze

si definisce il problema multiobiettivo:

$$\max\ \mu^\top x,\ \min \tfrac{1}{2} x^\top Q x$$

$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

$e = (1,\ 1, \ldots, 1)^\top$

Calcolo del vettore ideale z^{id}

Risolvi (separatamente) i due problemi (a singolo obiettivo):

$$\max\ \mu^\top x \qquad\qquad \min \tfrac{1}{2}x^\top Qx$$

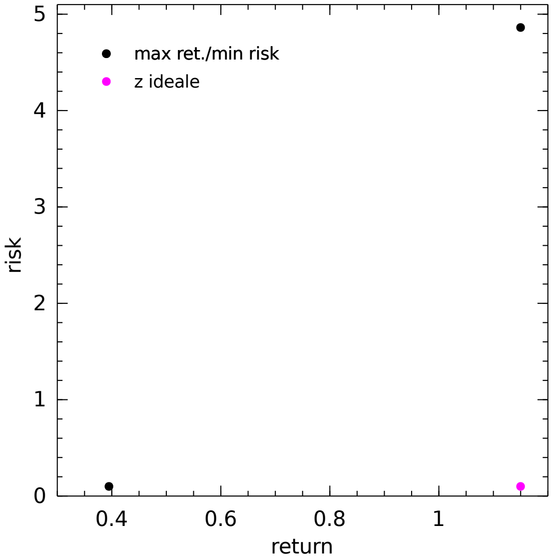
$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \qquad s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$x^*_\mu \qquad\qquad\qquad x^*_\sigma$$

$$z^{id} = \left(\mu^\top x^*_\mu,\ \frac{1}{2}(x^*_\sigma)^\top Q x^*_\sigma\right)^\top$$

Calcolo del vettore ideale z^{id}



Metodi SENZA preferenze

GOAL programming ($\|\cdot\|_\infty$)

Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\min \|\mu^\top x - z_1^{id}, x^\top Qx/2 - z_2^{id}\|_\infty$$

$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

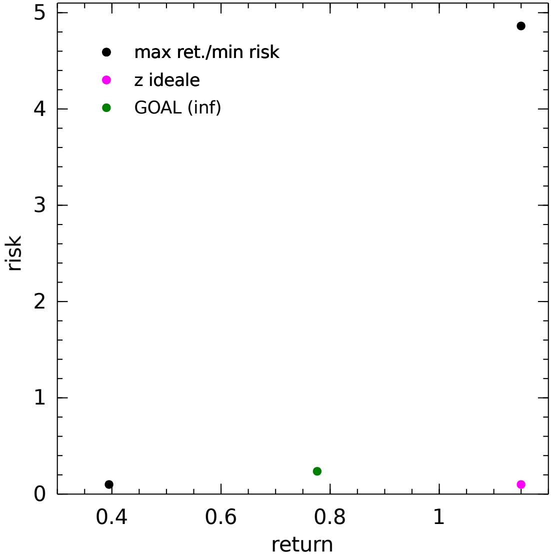
ovvero

$$\begin{aligned} &\min \alpha \\ &s.t.\ z_1^{id} - \mu^\top x \leq \alpha \\ &\qquad x^\top Qx/2 - z_2^{id} \leq \alpha \\ &\qquad e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x_\infty^*$$

GOAL programming ($\|\cdot\|_\infty$)



GOAL programming ($\|\cdot\|_1$)

Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\min \|\mu^\top x - z_1^{id}, x^\top Qx/2 - z_2^{id}\|_1$$

$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

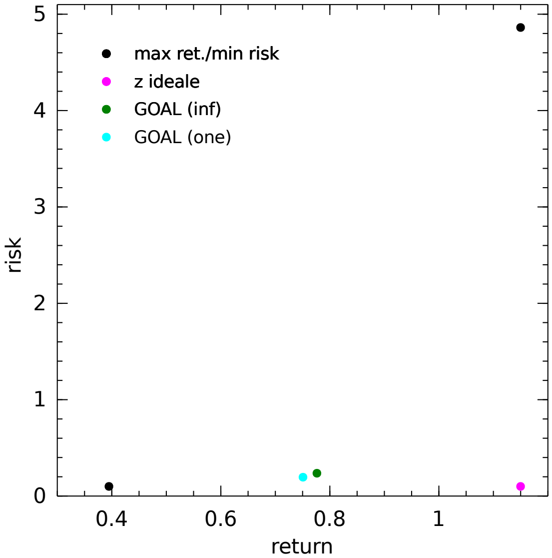
ovvero

$$\begin{array}{l} \min -\mu^\top x + x^\top Qx/2 \\ s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$x^*_{one}$$

GOAL programming ($\|\cdot\|_1$)



Metodi “a posteriori”

Metodo dei pesi

Scegli un vettore $w \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{0}_2 \leq_P w$
Determina una soluzione (non-dominata) risolvendo il problema:

$$\min w_1(-\mu^\top x) + w_2 x^\top Qx/2$$

$$s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n$$

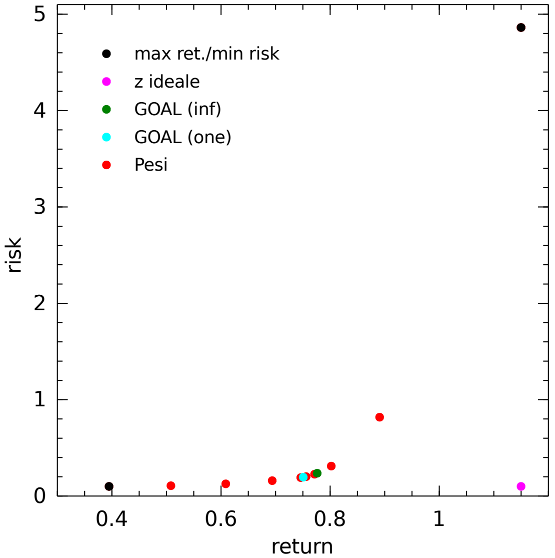
ovvero, ponendo $w_1 = \beta$, $w_2 = (1-\beta)$, $\beta \in [0,1]$

$$\begin{array}{l} \min -\beta\mu^\top x + (1-\beta)x^\top Qx/2 \\ s.t.\ e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{array}$$

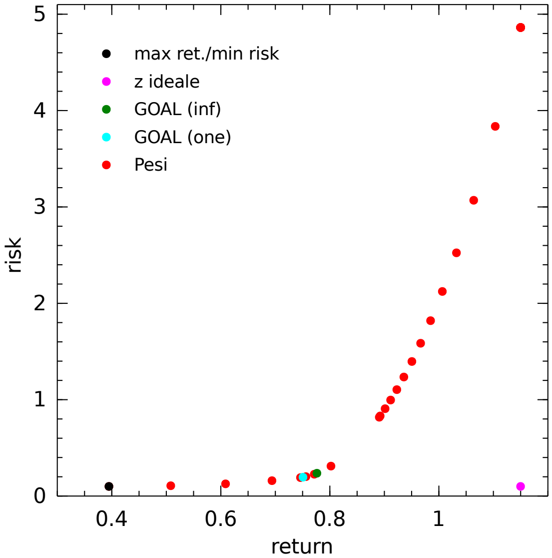
$$\Downarrow$$

$$x^*_\beta$$

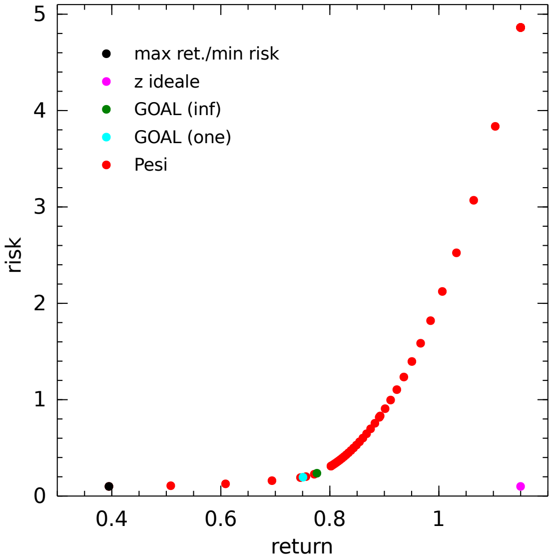
Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0, 1, 10)$)



Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0.89, 1, 20)$)



Metodo dei pesi ($\beta = \text{linspace}(0.7777778, 0.888887, 20)$)



Metodo degli ε-vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^\top Qx/2$
- $k-1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\begin{aligned} &\min x^\top Qx/2 \\ &s.t.\ \mu^\top x \geq \varepsilon \\ &\qquad e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x^*_σ

Metodo degli ε-vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^\top Qx/2$
- $k-1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\min x^\top Qx/2$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & \mu^\top x \geq \varepsilon \\ & e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x_σ^*

Metodo degli ε-vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^\top Qx/2$
- $k-1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\min x^\top Qx/2$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & \mu^\top x \geq \varepsilon \\ & e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x^*_σ

Metodo degli ε-vincoli

Scegli:

- una funzione obiettivo, e.g. $x^\top Qx/2$
- $k-1$ livelli ε_i per le rimanenti, e.g. ε

Risolvi il problema

$$\begin{aligned} &\min x^\top Qx/2 \\ &s.t.\ \mu^\top x \geq \varepsilon \\ &\qquad e^\top x = 1,\ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

ATTENZIONE!! stiamo modificando la regione ammissibile del problema, quindi, nel nostro caso,

- se ε troppo **grande** il problema potrebbe divenire **inammissibile**
- se ε troppo **piccolo** il problema potrebbe restituire **nuovamente** la soluzione x^*_σ

Metodo degli ε-vincoli

$$\min x^\top Qx/2$$

$$\begin{aligned} s.t.\ & \mu^\top x \geq \varepsilon \\ & e^\top x = 1,\ \ x \geq \mathbf{0}_n \end{aligned}$$

Domanda: quale è un range "ragionevole" di valori per il parametro ε?