

Ottimizzazione dei Sistemi Complessi

G. Liuzzi¹

Giovedì 24 Maggio 2018

¹Istituto di Analisi dei Sistemi ed Informatica IASI - CNR

Il “decisore”

- singolo obiettivo: se x^* e \tilde{x} sono ottimi globali, allora $f(x^*) = f(\tilde{x})$ e non c'è alcun motivo (ragionevole) per preferire l'uno all'altro
- multi obiettivo: se x^* e \tilde{x} sono ottimi di Pareto (globali), allora si ha necessariamente

$$\begin{array}{ccc} f(x^*) & \not\leq_P & f(\tilde{x}) \\ f(\tilde{x}) & \not\leq_P & f(x^*) \end{array}$$

cioè, \tilde{x} e x^* sono (tra di loro) non dominati **MA** potrebbero esserci (validi) motivi per preferire l'uno all'altro

Nel caso multi obiettivo è usuale distinguere le seguenti due “figure”

- 1) ottimizzatore, chi (o cosa) è in grado di determinare una o più soluzioni di Pareto per il problema
- 2) decisore, chi (o cosa) è in grado di scegliere (arbitrariamente) **una** soluzione di Pareto in un insieme di soluzioni non dominate

Il “decisore”

- singolo obiettivo: se x^* e \tilde{x} sono ottimi globali, allora $f(x^*) = f(\tilde{x})$ e non c'è alcun motivo (ragionevole) per preferire l'uno all'altro
- multi obiettivo: se x^* e \tilde{x} sono ottimi di Pareto (globali), allora si ha necessariamente

$$\begin{array}{ccc} f(x^*) & \not\leq_P & f(\tilde{x}) \\ f(\tilde{x}) & \not\leq_P & f(x^*) \end{array}$$

cioè, \tilde{x} e x^* sono (tra di loro) non dominati **MA** potrebbero esserci (validi) motivi per preferire l'uno all'altro

Nel caso multi obiettivo è usuale distinguere le seguenti due “figure”

- 1) ottimizzatore, chi (o cosa) è in grado di determinare una o più soluzione di Pareto per il problema
- 2) decisore, chi (o cosa) è in grado di scegliere (arbitrariamente) **una** soluzione di Pareto in un insieme di soluzione non dominate

Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- Metodi senza preferenze nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- Metodi a priori nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore
- Metodi a posteriori nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore

Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- Metodi senza preferenze nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- Metodi a priori nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto "migliore" per il decisore
- Metodi a posteriori nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore

Classificazione

In base al ruolo svolto dal *decisore* nel procedimento di risoluzione di un prob. multiobiettivo ed al momento in cui il decisore interviene, è possibile fornire una classificazione (di massima) dei metodi di soluzione.

- Metodi senza preferenze nei quali il decisore non ha alcun ruolo e si considera soddisfacente l'aver trovato un qualunque ottimo di Pareto
- Metodi a priori nei quali il decisore specifica le sue preferenze prima che il processo risolutivo abbia inizio. In base a tali informazioni, verrà direttamente generata la soluzione di Pareto “migliore” per il decisore
- Metodi a posteriori nei quali si tenta di generare un certo numero di ottimi di Pareto (tutti?) e poi lo si presenta al decisore

Metodo "steepest descent"

$$\begin{aligned} \min & (f_1(x), \dots, f_k(x))^T \\ \text{s.t. } & x \in \mathcal{F} \text{ convesso} \end{aligned}$$

- 1) In x_h , calcola $\theta(x_h)$ e $d_h = y(x_h) - x_h$
- 2) Se $\theta(x_h) \geq -\epsilon$, allora **STOP** x_h Pareto
- 3) Calcola $\beta = 1/2^j$ con j più piccolo intero t.c.

$$f(x_h + \beta d_h) < f(x_h) + \gamma \beta \theta(x_h)$$

- 4) Definisci $x_{h+1} = x_h + \beta d_h$, $h \leftarrow h + 1$, vai al passo 1)

GOAL programming

Dopo aver calcolato il vettore ideale degli obiettivi z^{id} si definisce il problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \|z^{id} - f(x)\|_p \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

dove $\|\cdot\|_p$ è la norma p di un vettore ($1 \leq p \leq \infty$). In particolare, se $v \in \mathfrak{R}^k$

- $1 \leq p < \infty$, $\|v\|_p = \left(\sum_{i=1}^k |v_i|^p \right)^{1/p}$
- $p = \infty$, $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_k|\}$

GOAL programming

Sono particolarmente interessanti le norme $p = 1$ e $p = \infty$ perchè consentono di ottenere problemi *lineari* partendo da problemi multiobiettivo lineari. Infatti, sia

$$\begin{aligned} \min_x & (c_1^\top x, c_2^\top x, \dots, c_k^\top x) \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{aligned}$$

Otteniamo

- quando $p = 1$

$$\begin{aligned} \min_x & \sum_{i=1}^k \|c_i^\top x - z^{id}\| \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{aligned}$$

- quando $p = \infty$

$$\begin{aligned} \min_x & \max_{i=1, \dots, k} \{\|c_i^\top x - z^{id}\|\} \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{aligned}$$

GOAL programming

- $p = 1$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \sum_{i=1}^k \alpha_i \\ \text{s.t.} \quad & \alpha_i \leq c_i^\top x - z^{id} \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

- $p = \infty$, il problema è equivalente al problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \alpha \\ \text{s.t.} \quad & \alpha \leq c_i^\top x - z^{id} \leq \alpha, \quad i = 1, \dots, k \\ & Ax \leq b \end{aligned}$$

Metodo dell'ord. lessicografico

Il decisore specifica un ordinamento delle f.ob. Siano

$$f_1(x), \dots, f_k(x)$$

le f.ob. ordinate per “importanza” decrescente (dalla più importante alla meno importante)

Metodo dell'ord. lessicografico

- Passo 1

$$x^{*,1} = \arg \min_{x \in \mathcal{F}} f_1(x)$$

- Passo 2

$$x^{*,2} = \arg \min_{x \in \mathcal{F}} f_2(x)$$

$$f_1(x) \leq f_1(x^{*,1})$$

- Passo 3

$$x^{*,3} = \arg \min_{x \in \mathcal{F}} f_3(x)$$

$$f_1(x) \leq f_1(x^{*,2})$$

$$f_2(x) \leq f_2(x^{*,2})$$

⋮

- Passo h

$$x^{*,h} = \arg \min_{x \in \mathcal{F}} f_h(x)$$

$$f_i(x) \leq f_i(x^{*,h-1})$$

$$i = 1, \dots, h-1$$

Metodo della “value function”

Il decisore specifica una funzione (value function)

$$U(z_1, \dots, z_k)$$

Si risolve il problema (singolo obiettivo)

$$\begin{aligned} \min \quad & U(f_1(x), \dots, f_k(x)) \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Metodo dei pesi

- 0) Poni $X = \emptyset$
- 1) Scegli $w_i, i = 1, \dots, k$ t.c.

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad w \geq 0$$

- 2) Determina

$$x^* = \arg \min \sum_{i=1}^k w_i f_i(x) \\ \text{s.t. } x \in \mathcal{F}$$

- 3) $X = X \cup \{x^*\}$, vai al passo 1)

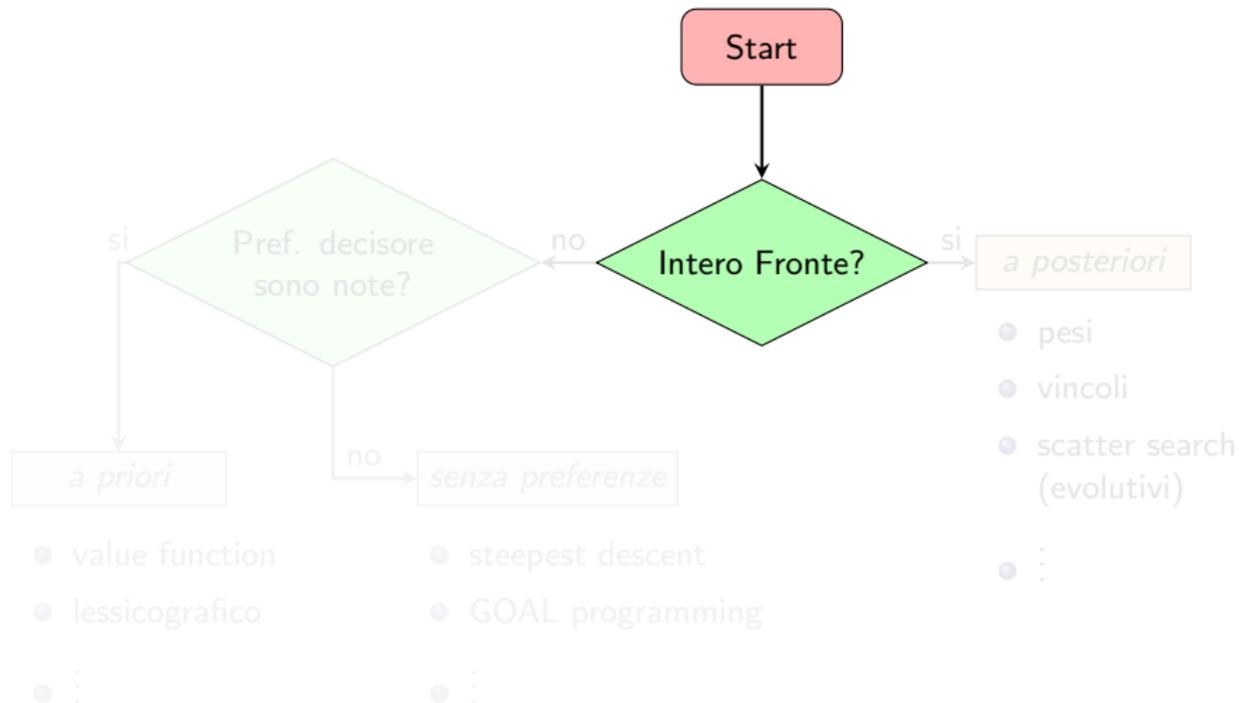
Metodo degli ϵ -vincoli

- 0) Poni $X = \emptyset$
- 1) Scegli $\ell \in \{1, \dots, k\}$ e $\epsilon_i, i = 1, \dots, k, i \neq \ell$
- 2) Determina

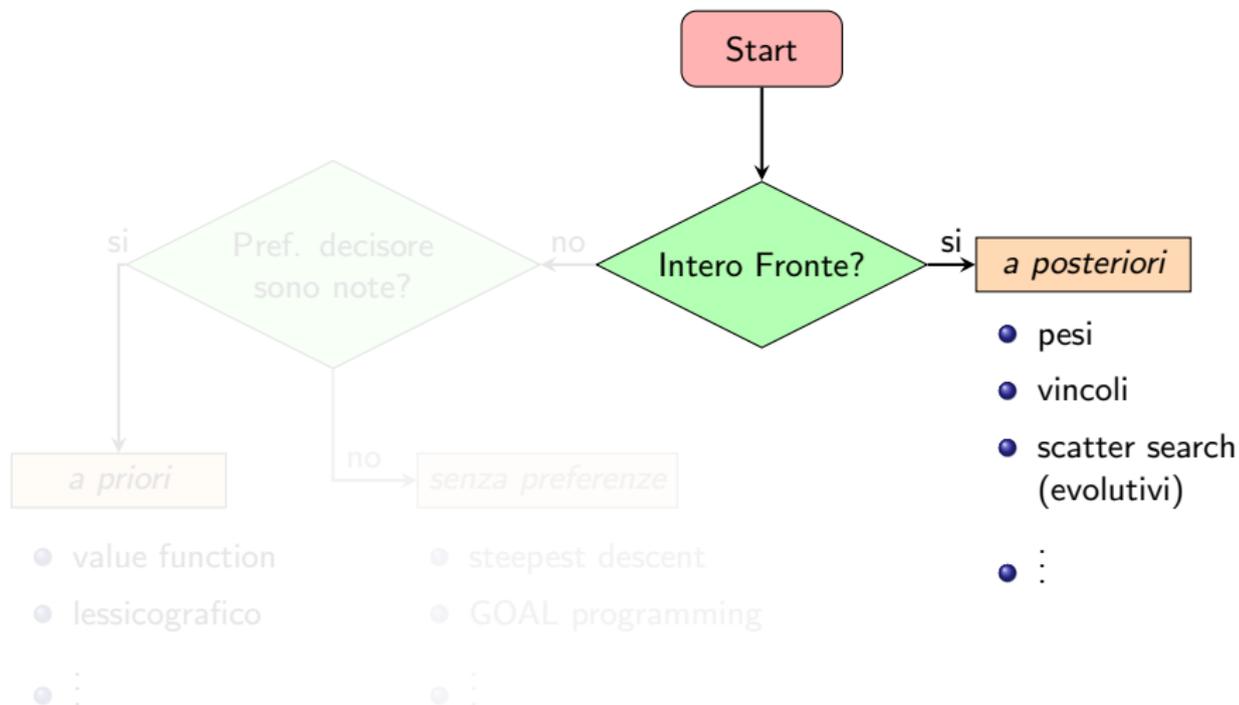
$$\begin{aligned}x^* = & \arg \min f_\ell(x) \\ & \text{s.t. } f_i(x) \leq \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, k, \quad i \neq \ell \\ & x \in \mathcal{F}\end{aligned}$$

- 3) $X = X \cup \{x^*\}$, vai al passo 1)

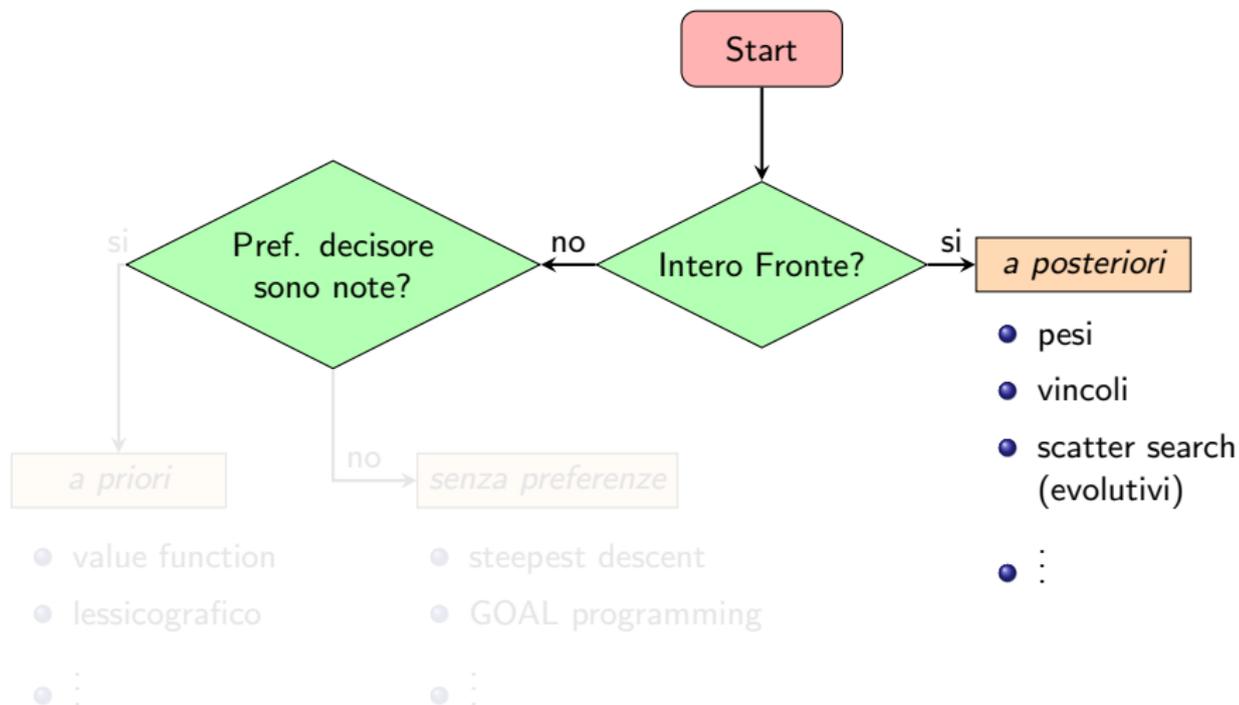
Riassumendo ...



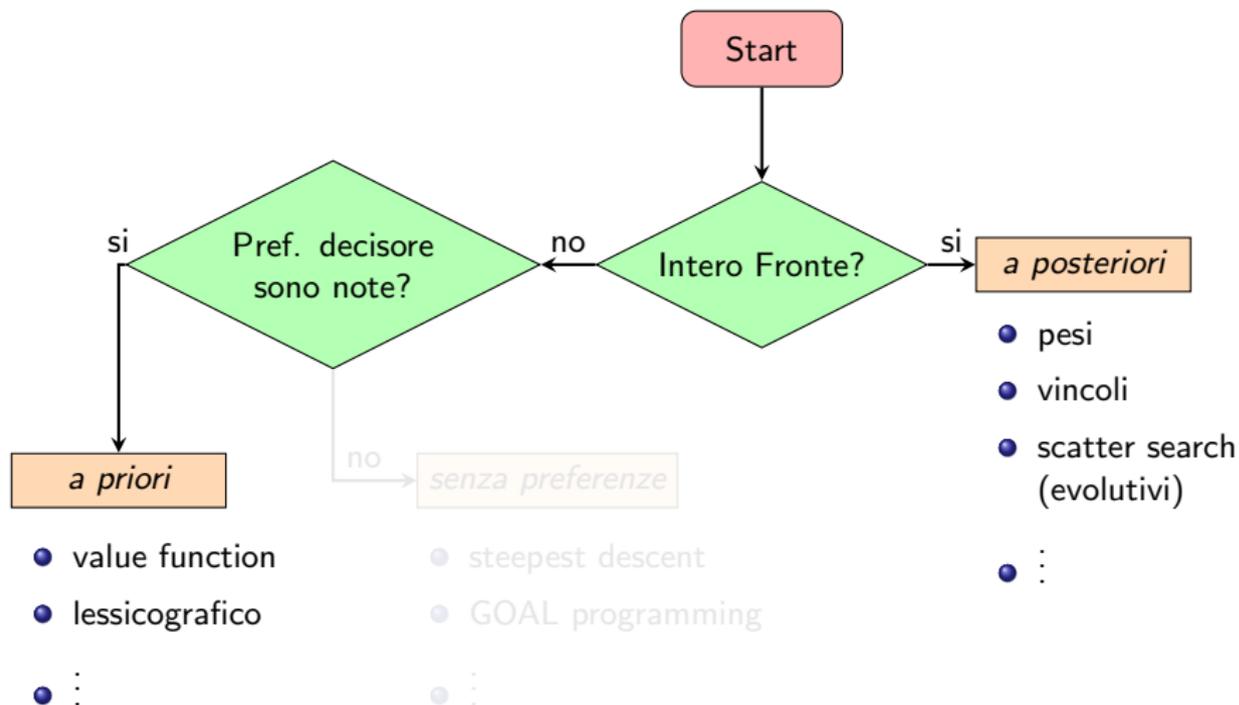
Riassumendo ...



Riassumendo ...



Riassumendo ...



Riassumendo ...

